Cálculo

con geometría analítica

Octava edición

Ron Larson
Robert P. Hostetler

Bruce H. Edwards

Director: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor: Pablo E. Roig Vázquez
Editor de desarrollo: Sergio Campos Peláez
Supervisor de producción: Zeferino García García

CÁLCULO con geometría analítica
VOLUMEN I
Octava edición

ISBN 13: 978-970-10-5274-7
ISBN 10: 970-10-5274-9
ISBN 970-10-2755-8 (Edición anterior)

Translated from the Eight English Edition of
Calculus with Analytic Geometry
by Ron Larson, Robert, P. Hostetler and Bruce H. Edwards

ISBN 0-618-50298-X

1234567890 09876432105

Impreso en México
Impreso en Infagon S.A. de C.V.

Printed in Mexico
Printed in Infagon S.A. de C.V.

Contenido

Capítulo 3 Aplicaciones de la derivada 163

Capítulo 4 Integración 247

Capítulo 5 Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes 321

Capítulo 6 Ecuaciones diferenciales 403

Capítulo 7 Aplicaciones de la integral 445

Capítulo 8 Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias 517

Capítulo 9 Series infinitas 593

Unas palabras de los autores

Bienvenido a *Cálculo con geometría analítica*, octava edición. Mucho ha cambiado desde que escribimos la primera edición en 1973, hace 30 años. Con cada edición hemos escuchado a nuestros usuarios e incorporado muchas de sus sugerencias para mejorar el texto.

Un texto formado por sus usuarios

A partir de su apoyo y sugerencias, el texto ha alcanzado ocho ediciones que incluyen estas mejoras:

- Secciones de ejercicios que contienen una amplia variedad de problemas para habilidades, aplicaciones, exploraciones, desarrollo de conceptos, ejercicios para generar pensamiento crítico y problemas teóricos.
- Abundantes aplicaciones a la vida real que muestran, con precisión, los usos diversos de cálculo.
- Muchas actividades abiertas e investigaciones.
- Presentación clara del texto, con un atractivo diseño de página.
- Diseño de interiores a cuatro tintas.
- Texto rigurosamente matemático.
- Uso de la tecnología como herramienta para resolver problemas y útil en la investigación.
- Referencias a la historia del cálculo y a los matemáticos que lo desarrollaron.

Lo que es nuevo y diferente en la octava edición

En la octava edición continuamos ofreciendo un texto que es pedagógicamente confiable, para profesores y estudiantes, con precisión matemática y comprensible. Los cambios más significantes se listan a continuación:

- ***Las nuevas entradas de capítulo.*** Cada entrada de capítulo tiene dos partes: una descripción de los conceptos que se cubren en el capítulo y una pregunta que invita a explorar una aplicación en la vida real del tema del capítulo.
- ***Nueva presentación de las ecuaciones diferenciales.*** El tema de las ecuaciones diferenciales se introduce ahora en el capítulo 6, en el primer curso de cálculo, lo cual beneficia la preparación de los estudiantes para sus cursos en disciplinas como diseño, física y química. El capítulo contiene cuatro secciones: 6.1 *Campos de pendientes y el método de Euler*, 6.2 *Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento*, 6.3 *Separación de variables y la ecuación logística* y 6.4 *Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.*
- ***Ejercicios de repaso.*** Los ejercicios han sido cuidadosa y extensamente revisados para asegurar que son rigurosos y cubren todos los temas sugeridos por nuestros usuarios. Se han agregado muchos ejercicios de habilidad y desafío.
- ***Actualización de datos.*** Todos los datos en los ejemplos y conjuntos de ejercicios se han actualizado.

Aunque revisamos el texto con cuidado para reforzar la utilidad de algunos temas y agregamos otros, no cambiamos muchas de las cosas que han llevado a nuestros colegas y

a cerca de dos millones de estudiantes a usar este libro. *Cálculo*, octava edición, ofrece cobertura completa del material requerido por los estudiantes del curso de cálculo, incluyendo cuidadoso planteamiento de teorías y pruebas.

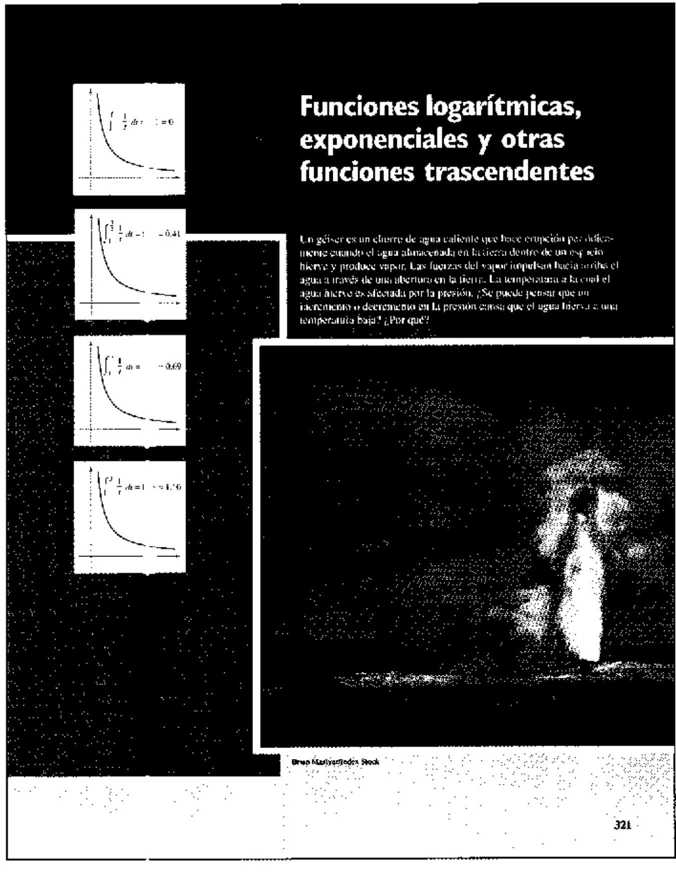
Esperamos que usted disfrutará la octava edición. Damos la bienvenida a cualquier comentario, así como las sugerencias para la mejora continua.

Ron Larson Robert P. Hostetler Bruce H. Edwards

Características

Entradas de capítulo

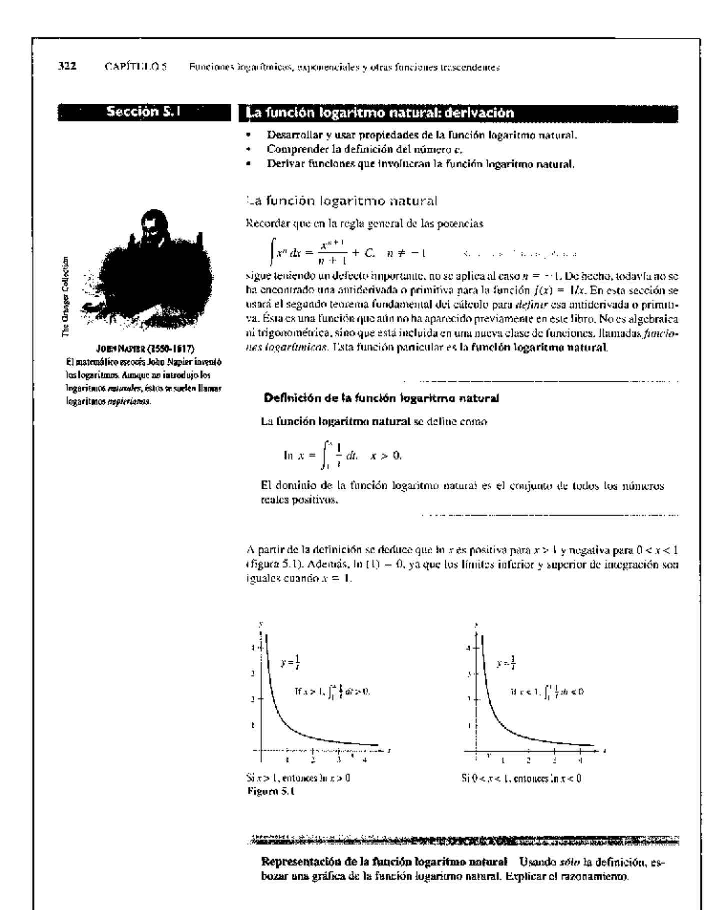
Cada capítulo abre con una aplicación a la vida real de los conceptos presentados en el capítulo, ilustrada con una fotografía. Las preguntas abiertas y reflexiones sobre la aplicación motivan que el estudiante considere cómo los conceptos de cálculo se relacionan con las situaciones de la vida real. Un resumen breve con un componente gráfico resalta los conceptos matemáticos presentados en el capítulo y explica por qué son importantes.



Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

Un géiser es un chorro de agua caliente que hace erupción periódicamente cuando el agua almacenada en la tierra dentro de un espacio hierve y produce vapor. Las fuerzas del vapor impulsan hacia arriba el agua a través de una abertura en la tierra. La temperatura a la cual el agua hierve es afectada por la presión. ¿Se puede pensar que un incremento o decremento en la presión causa que el agua hierva a una temperatura baja? ¿Por qué?

321



322 CAPÍTULO 5 Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

Sección 5.1 **La función logaritmo natural: derivación**

- **Desarrollar y usar propiedades de la función logaritmo natural.**
- **Comprender la definición del número *e*.**
- **Derivar funciones que involucran la función logaritmo natural.**

La función logaritmo natural

Recordar que en la regla general de las potencias

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

sigue teniendo un defecto importante, no se aplica al caso $n = -1$. De hecho, todavía no se ha encontrado una antiderivada o primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección se usará el segundo teorema fundamental del cálculo para *definir* esa antiderivada o primitiva. Ésta es una función que aún no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica, sino que está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas*. Esta función particular es la **función logaritmo natural**.

The Granger Collection

JOHN NAPIER (1550-1617)
El matemático escocés John Napier inventó los logaritmos. Aunque no introdujo los logaritmos *naturales*, éstos se suelen llamar logaritmos *neperianos*.

Definición de la función logaritmo natural

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

A partir de la definición se deduce que $\ln x$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$ (figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.

Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$ Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$
Figura 5.1

Representación de la función logaritmo natural Usando *sólo* la definición, esbozar una gráfica de la función logaritmo natural. Explicar el razonamiento.

Objetivos de estudio

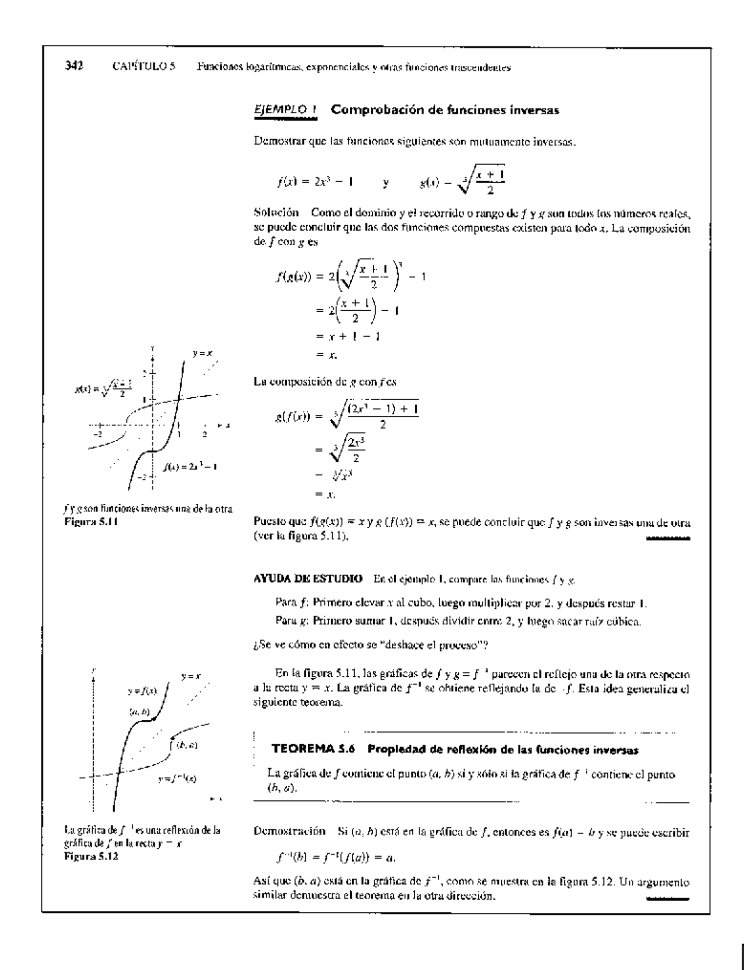
Cada sección empieza con una guía de habilidades a desarrollar a partir de los conceptos importantes cubiertos en la sección. Esto sirve para que el profesor prepare su clase y como una guía de estudio y revisión para el estudiante.

Exploraciones

Las exploraciones para los temas seleccionados, ofrecen la oportunidad para descubrir los conceptos de cálculo antes de que se presentan formalmente en el texto, reforzando así la comprensión del estudiante. Esta sección optativa puede omitirse a discreción del profesor sin la pérdida de continuidad en la cobertura del materia..

Notas históricas

Integradas a lo largo del texto, ayudan a los estudiantes a comprender los fundamentos matemáticos del cálculo.



342 CAPÍTULO 5 Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

EJEMPLO 1 **Comprobación de funciones inversas**

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

$$f(x) = 2x^3 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$

f y g son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).

AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, compare las funciones f y g.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo en efecto se "deshace el proceso"?

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la de f. Esta idea generaliza el siguiente teorema.

TEOREMA 5.6 Propiedad de reflexión de las funciones inversas

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

Demostración Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Así que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.

Teoremas

Se resaltan los teoremas y definiciones para dar énfasis y permitir una localización rápida. Se muestran las pruebas para los teoremas seleccionados para reforzar la comprensión del estudiante.

Ayudas de estudio

Estas ayudan permiten a los estudiantes evitar los errores comunes, los guían en casos especiales y amplían conceptos teóricos.

Gráficas

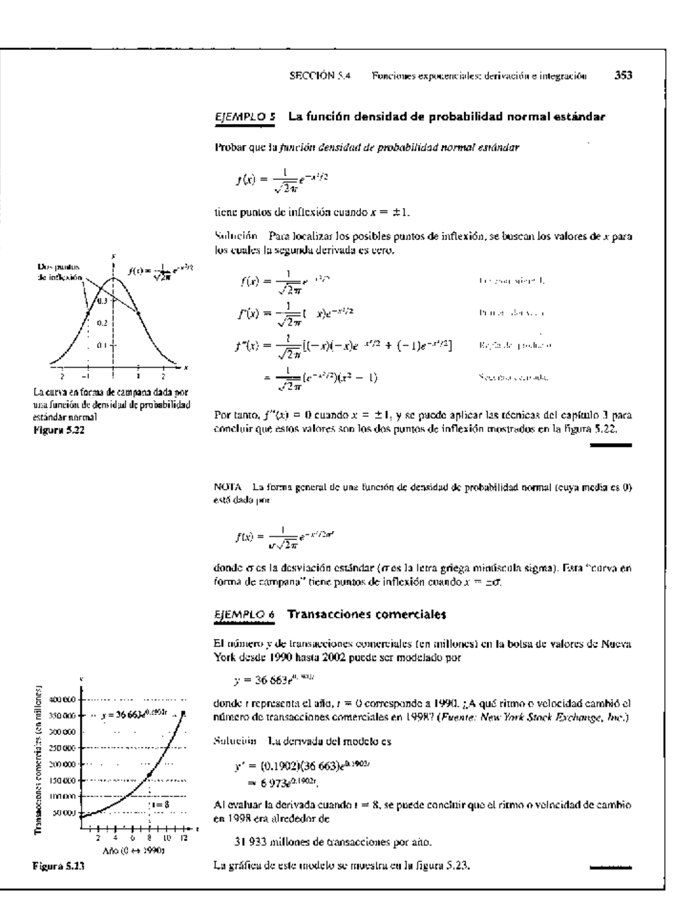
Las numerosas gráficas a lo largo del texto refuerzan la comprensión de los conceptos de cálculo complejos (sobre todo en las representaciones tridimensionales), así como en las aplicaciones de la vida real.

Ejemplos

Para garantizar la utilidad del texto como una herramienta de estudio y aprendizaje, la octava edición contiene numerosos ejemplos. Detallamos las soluciones de ejercicios (muchos de ellos con comentarios para aclarar los pasos o el método) se presentan gráfica, analítica y/o numéricamente para proporcionar oportunidades para la práctica y una visión amplia de los conceptos de cálculo. Muchos ejemplos incorporan el análisis de datos reales.

Notas

Las notas con instrucciones acompañan muchos de los teoremas, definiciones y ejemplos, para ofrecer una perspectiva adicional o puntualizar generalizaciones.



SECCIÓN 5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración 353

EJEMPLO 5 **La función densidad de probabilidad normal estándar**

Probar que la *función densidad de probabilidad normal estándar*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.

Solución Para localizar los posibles puntos de inflexión, se buscan los valores de x para los cuales la segunda derivada es cero.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-x^2/2} \\ f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-x^2/2})(x^2 - 1) \end{aligned}$$

La curva en forma de campana dada por una función de densidad de probabilidad estándar normal
Figura 5.22

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$, y se puede aplicar las técnicas del capítulo 3 para concluir que estos valores son los dos puntos de inflexión mostrados en la figura 5.22.

NOTA La forma general de una función de densidad de probabilidad normal (cuya media es 0) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación estándar (σ es la letra griega minúscula sigma). Esta "curva en forma de campana" tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 **Transacciones comerciales**

El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2002 puede ser modelado por

$$y = 36\,663e^{0.1902t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 1998? (*Fuente: New York Stock Exchange, Inc.*)

Solución La derivada del modelo es

$$\begin{aligned} y' &= (0.1902)(36\,663)e^{0.1902t} \\ &\approx 6\,973e^{0.1902t}. \end{aligned}$$

Al evaluar la derivada cuando $t = 8$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 1998 era alrededor de

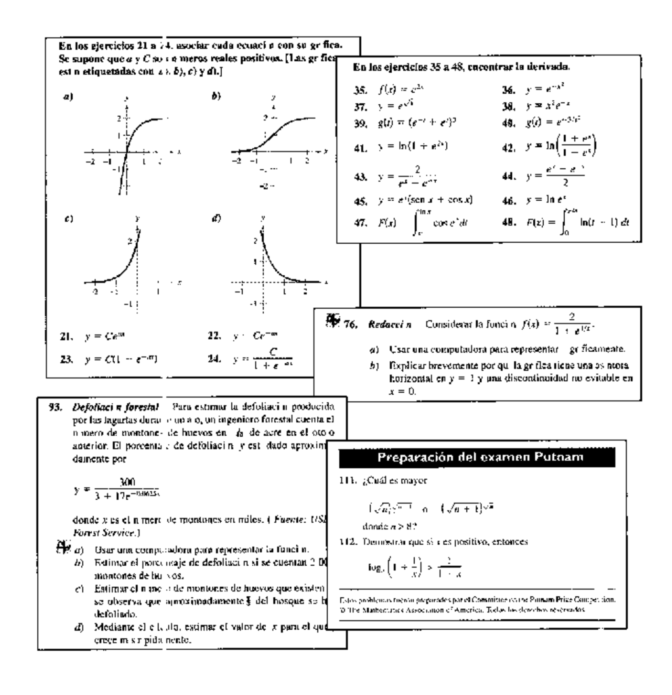
31 933 millones de transacciones por año.

Figura 5.23

La gráfica de este modelo se muestra en la figura 5.23.

Ejercicios

El corazón de cualquier texto de cálculo; los ejercicios mantienen oportunidades de exploración, práctica y comprensión. La octava edición contiene cerca de 10 000 ejercicios de repaso, de sección y de capítulo, cuidadosamente elaborados para reflexionar y alcanzar el reto de estudio. El extenso rango de tipos de problemas incluye verdadero/falso, de escritura, conceptuales, de diseño real de datos y de análisis gráfico.

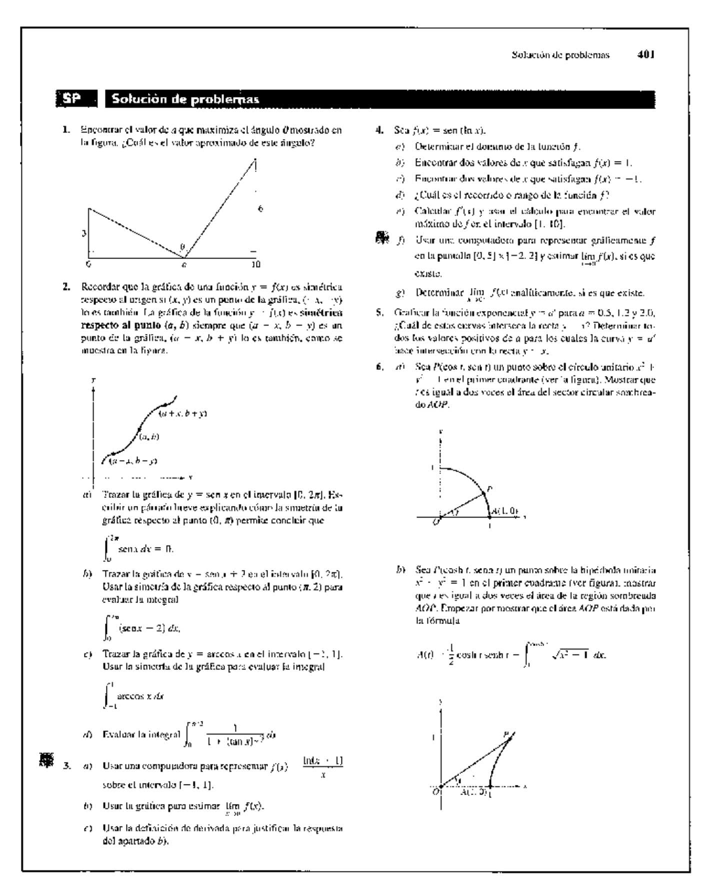


En los ejercicios 35 a 48, encontrar la derivada.

Preparación del examen Putnam

111. ¿Cuál es mayor

112. Demostrar que si x es positivo, entonces



Solución de problemas 401

SP Solución de problemas

SP Solución de problemas

Cada capítulo concluye con un conjunto de ejercicios para pensar y proporcionan al estudiante oportunidades para explorar los conceptos más allá del capítulo.

Tecnología

A lo largo del texto el uso de una calculadora para elaborar gráficas o un sistema de cálculo algebraico se sugiere para la solución de problemas, así como para la exploración y el descubrimiento. Por ejemplo, los estudiantes pueden escoger calculadora para elaborar gráficas y para ejecutar los cálculos complicados, visualizar los conceptos teóricos, descubrir los enfoques alternativos o para verificar los resultados de otros métodos de solución. Sin embargo, no se exige a los estudiantes el acceso a este instrumento para usar con eficacia el texto. Además de describir los beneficios de usar la tecnología para aprender cálculo, el texto también muestra su posible uso incorrecto o interpretación equívoca.

Características adicionales

A lo largo del libro se integran recursos de aprendizaje, como la sección de proyectos de trabajo, las referencias a periódicos, y la sección de desarrollo de conceptos.

Agradecimientos

Agradecemos a las muchas personas que nos han ayudado en las múltiples fases de este proyecto durante los últimos 30 años. Su estímulo, críticas y sugerencias han sido inestimables para nosotros.

Para la octava edición

James Pommersheim
Reed College

Kevin J. Leith
Albuquerque Community College

Andrew J. Guzo
Chatham High School, NJ

Mary J. Quadrini
East Greenwich High School, RI

Jim Burton
Vernon Verona Sherrill High School, NY

Guillermo Barberena III
South Hills High School, TX

Susan A. Natale
The Ursuline School, NY

Patrick Ward
Illinois Central College

Donna J. Gorton
Butler County Community College

Diane Zych
Erie Community College

Guy Hogan
Norfolk State University

Michael Frantz
University of La Verne

Darren Narayan
Rochester Institute of Technology

Stanley J. Brzezicki
Iroquois High School, PA

Leland E. Rogers
Pepperdine University

Paul Seeburger
Monroe Community College

Ashok Kumar
Valdosta State University

Alexander Arhangelskii
Ohio University

James Braselton
Georgia Southern University

Harvey Braverman
Middlesex County College

Jianzhong Su
University of Texas at Arlington

P.S. Crooke
Vanderbilt University

Stan Adamski
Owens Community College

Edith A. Silver
Mercer County Community College

Seth G. Armstrong
Southern Utah University

Desmond Stephens
Florida A&M University

Terence H. Perciante
Wheaton College

Linda A. Bolte
Eastern Washington University

Sudhir Goel
Valdosta State University

Donna Flint
South Dakota State University

Revisores de las ediciones anteriores

Dennis Alber, *Palm Beach Junior College*; James Angelos, *Central Michigan University*; Raymond Badalian, *Los Angeles City College*; Kerry D. Bailey, *Laramie County Community College*; Harry L. Baldwin, Jr., *San Diego State City College*; Homer F. Bechtell, *University of New Hampshire*; Keith Bergeron, *United States Air Force Academy*; Norman Birenes, *University of Regina*; Brian Blank, *Washington State University*; Andrew A. Bulleri, *Howard Community College*; Christopher Butler, *Case Western Reserve University*; Dane R. Camp, *New Trier High School, IL*; Paula Castagna, *Fresno City College*; Jack Ceder, *University of California-Santa Barbara*; Charles L. Cope, *Morehouse College*; Barbara Cortzen, *DePaul University*; Jorge Cossio, *MiamiDade Community College*; Jack Courtney, *Michigan State University*; James Daniels, *Palomar College*; Kathy Davis, *University of Texas*; Paul W. Davis, *Worcester Polytechnic Institute*; Luz M. DeAlba, *Drake University*; Nicolae Dinculeanu, *University of Florida*; Rosario Diprizio, *Oakton Community College*; Garret J. Etgen, *University of Houston*; Russell Euler, *Northwest Missouri State University*; Phillip A. Ferguson, *Fresno City College*; Li Fong, *Johnson County Community College*; Michael Frantz, *University of La Verne*; William R. Fuller, *Purdue University*; Dewey Furness, *Ricks College*; Javier Garza, *Tarleton State University*; K. Elayn Gay, *University of New Orleans*; Thomas M. Green, *Contra Costa College*; Ali Hajjafar, *University of Akron*; Ruth A. Hartman, *Black Hawk College*; Irvin Roy Hentzel, *Iowa State University*; Kathy Hoke, *University of Richmond*; Howard E. Holcomb, *Monroe Community College*; Eric R. Immel, *Georgia Institute of Technology*; Arnold J. Insel, *Illinois State University*; Elgin Honston, *Iowa State University*; Hikeaki Kaneko, *Old Dominion University*; Toni Kasper, *Borough of Manhattan Community College*; William J. Keane, Boston *College*; Timothy J. Kearns, *Boston College*; Ronnie Khuri, *University of Florida*; Frank T. Kocher, Jr., *Pennsylvania State University*; Robert Kowalczyk, *University of Massachusetts-Dartmouth*; Joseph F. Krebs, *Boston College*; David C. Lantz, *Colgate University*; Norbert Lerner, *State University of New York at Cortland*; Maita Levine, *University of Cincinnati*; Murray Lieb, *New Jersey Institute of Technology*; Beth Long, *Pellissippi State Technical College*; Ransom Van B. Lynch, *Phillips Exeter Academy*; Bennet Manvel, *Colorado State University*; Mauricio Marroquin, *Los Angeles Valley College*; Robert L. Maynard, *Tidewater Community College*; Robert McMaster, *John Abbott College*; Gordon Melrose, *Old Dominion University*; Darrell Minor, *Columbus State Community College*; Maurice Monahan, *South Dakota State University*; Michael Montaño, *Riverside Community College*; Philip Montgomery, *University of Kansas*; David C. Morency, *University of Vermont*; Gerald Mueller, *Columbus State Community College*; Duff A. Muir, *United States Air Force Academy*; Charlotte J. Newsom, *Tidewater Community College*; Terry J. Newton, *United States Air Force Academy*; Donna E. Nordstrom, *Pasadena City College*; Larry Norris, *North Carolina State University*; Robert A. Nowlan, *Southern Connecticut State University*; Luis OrtizFranco, *Chapman University*; Barbara L. Osofsky, *Rutgers University*; Judith A. Palagallo, *University of Akron*; Eleanor Palais, *Belmont High School, MA*; Wayne J. Peeples, *University of Texas*; Jorge A. Perez, *LaGuardia Community College*; Darrell J. Peterson, *Santa Monica College*; Donald Poulson, *Mesa Community College*; Lila Roberts, *Georgia Southern University*; Jean L. Rubin, *Purdue University*; John Santomas, *Villanova University*; Barry Sarnacki, *United States Air Force Academy*; N. James Schoonmaker, *University of Vermont*; George W. Schultz, *St. Petersburg Junior College*; Richard E. Shermoen, *Washburn University*; Thomas W. Shilgalis, *Illinois State University*; J. Philip Smith, *Southern Connecticut State University*; Lynn Smith, *Gloucester County College*; Frank Soler, *De Anza College*; Enid Steinbart, *University of New Orleans*; Michael Steuer, *Nassau Community College*; Mark Stevenson, *Oakland Community College*; Anthony Thomas, *University of Wisconsin-Platteville*; Lawrence A. Trivieri, *Mohawk Valley Community College*; John Tweed, *Old Dominion University*; Carol Urban, *College of DuPage*; Marjorie Valentine, *North Side ISD, San Antonio*; Robert J. Vojack, *Ridgewood High School, NJ*; Bert K. Waits, *The Ohio State University*; Florence A. Warfel, *University of Pittsburgh*; John R. Watret, *Enrbry-Riddle Aeronautical University*; Carroll G. Wells, *Western Kentucky University*; Charles Wheeler,

Montgomery College; Jay Wiestling, *Palomar College*; Paul D. Zahn, *Borough of Manhattan Community College*; August J. Zarcone, *College of DuPage*

Agradecemos al personal de Larson Text, Inc., quie ayudó a preparar el manuscrito, sugiriendo el diseño de interiores, y escribiendo y corregiendo las páginas.

Una nota especial de agradecimiento para los profesores que respondieron a nuestro estudio y a cerca de 2 millones de estudiantes que han usado las ediciones anteriores del texto.

A nivel personal, agradecemos a nuestras esposas, Deanna Gilbert Larson, Eloise Hostetler y Consuelo Edwards, por su amor, paciencia y apoyo. También, una nota especial para R. Scott O'Neil.

Si usted tiene sugerencias para mejorar este texto, por favor no se límite para escribirnos. Durante años hemos recibido muchos comentarios útiles de profesores y estudiantes y nosotros valoramos mucho estos comentarios.

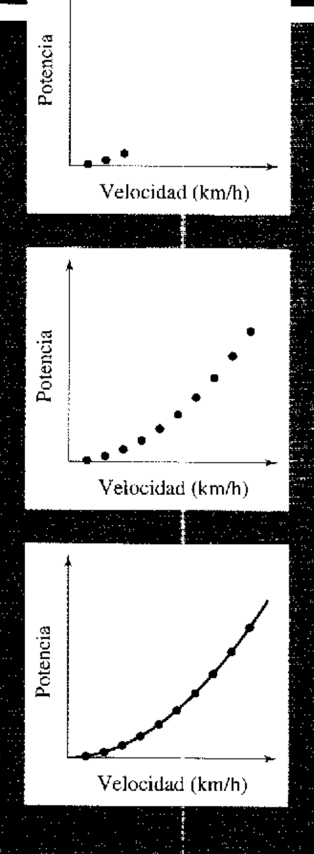
Ron Larson
Robert P. Hostetler
Bruce H. Edwards

Nota del editor

Algunas diferencias de terminología en la ciencia matemática del cálculo diferencial e integral en distintos países de habla hispana

Uso común en España	Uso común en América Latina
ritmo de cambio	velocidad de cambio
teorema del encaje	teorema del emparedado
límites laterales	límites unilaterales
discontinuidades evitables	discontinuidades removibles
discontinuidades inevitables	discontinuidades no removibles
función parte entera	función mayor entero
una función decrece sin cota	una función decrece sin límite
una función crece sin cota	una función crece sin límite
cociente incremental	cociente de diferencias
números críticos	puntos críticos
prueba de la primera derivada	criterio de la primera derivada
prueba del coeficiente dominante para las funciones polinómicas	criterio del coeficiente dominante para las funciones polinómicas
recorrido	rango
primitivas	antiderivadas
capacidad límite	capacidad de soporte
método de las arandelas	método del anillo
funciones simples	funciones parciales
función recurrente	función recursiva
series alternadas	series alternantes

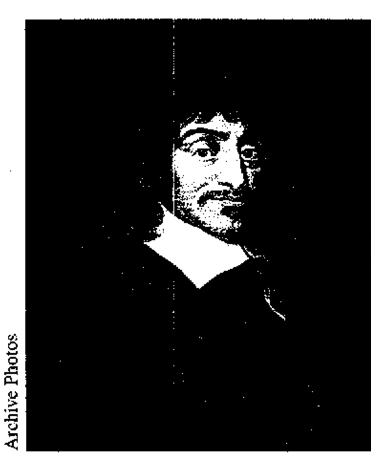
Preparación para el cálculo



Los dos tipos de automóviles de carreras diseñados y construidos por equipos NASCAR son los vehículos para pista corta y para autopista larga. Estos últimos se someten a muchas pruebas en túneles de viento como el que se muestra en la fotografía. Ambos están diseñados ya sea para generar tanto empuje hacia abajo como sea posible o bien, para reducir el derrape del vehículo. ¿Qué diseño cree que se utiliza para cada tipo de automóvil de carreras? ¿Por qué?

Carol Anne Petrachenko/Latin Stock México

Sección P.1 Gráficas y modelos



RENÉ DESCARTES (1596-1650)
Descartes hizo numerosas contribuciones a la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En su libro *La Géométrie*, publicado en 1637, describió la idea de representar los puntos del plano por medio de pares de números reales y las curvas en el plano mediante ecuaciones.

- **Trazar la gráfica de una ecuación.**
- **Encontrar las intersecciones de una gráfica con los ejes.**
- **Analizar las posibles simetrías de una gráfica con respecto a un eje en el origen.**
- **Encontrar los puntos de intersección de dos gráficas.**
- **Interpretar modelos matemáticos con datos de la vida real.**

La gráfica de una ecuación

En 1637, el matemático francés René Descartes, revolucionó las matemáticas al unir sus dos ramas principales: álgebra y geometría. Con ayuda del plano coordenado de Descartes, los conceptos geométricos se pudieron formular de manera analítica y los algebraicos visualizarse de forma gráfica. La potencia de este método es tal que durante un siglo se consiguió desarrollar la mayor parte del cálculo.

Las posibilidades de éxito en el cálculo aumentarán siguiendo el mismo método. Es decir, realizar el cálculo desde múltiples perspectivas *—gráfica, analítica* y *numérica—* incrementará la comprensión de los conceptos fundamentales.

Considerar la ecuación $3x + y = 7$. El punto $(2, 1)$ es un **punto solución** de la ecuación puesto que esta última se satisface (es cierta) cuando se sustituye x por 2 y y por 1. Esta ecuación tiene muchas otras soluciones, como $(1, 4)$ y $(0, 7)$. Para encontrarlas de manera sistemática, despejar y de la ecuación inicial.

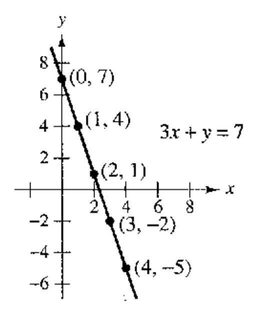
$y = 7 - 3x$ Método analítico.

Ahora, elaboramos una **tabla de valores** dando valores de x.

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	−2	−5

Método numérico.

A partir de la tabla, puede verse que $(0, 7)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, -2)$ y $(4, -5)$ son soluciones de la ecuación inicial $3x + y = 7$. Al igual que muchas ecuaciones, ésta tiene una cantidad infinita de soluciones. El conjunto de todos los puntos solución constituye la **gráfica** de la ecuación, como ilustra la figura P.1.



Procedimiento gráfico: $3x + y = 7$
Figura P.1

NOTA Aunque se mencione el dibujo de la figura P.1 como la gráfica de $3x + y = 7$, en realidad sólo representa una *porción* de la misma. La gráfica completa se extendería fuera de la página.

En este curso se estudiarán varias técnicas para la representación gráfica. La más simple consiste en dibujar puntos hasta que la forma esencial de la gráfica se haga evidente.

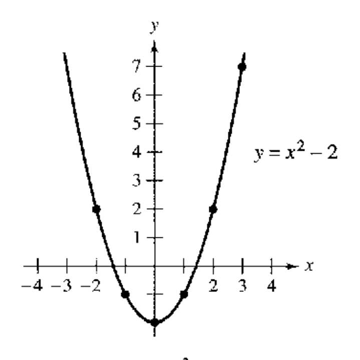
EJEMPLO 1 Dibujo de una gráfica mediante el trazado de puntos

Dibujar la gráfica de $y = x^2 - 2$.

Solución Primero construimos una tabla de valores. A continuación, marcamos los puntos dados en la tabla.

x	−2	−1	0	1	2	3
y	2	−1	−2	−1	2	7

Por último, unir los puntos con una *curva suave*, como se muestra en la figura P.2. Esta gráfica es una **parábola**. Se trata de una de las cónicas que se estudiarán en el capítulo 10.

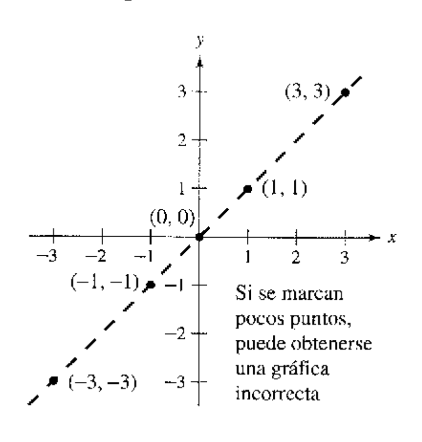


La parábola $y = x^2 - 2$
Figura P.2

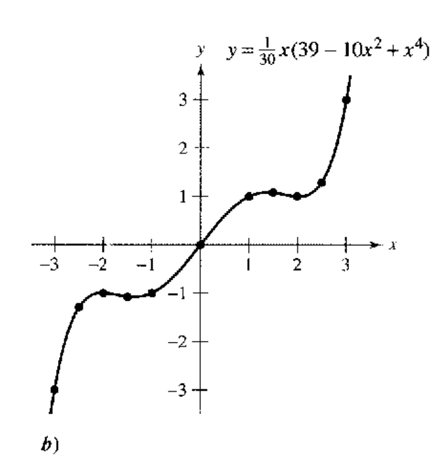
Uno de los inconvenientes de la representación mediante el trazado de puntos radica en que la obtención de una idea confiable de la forma de una gráfica puede exigir que se marque un gran número de puntos. Utilizando sólo unos pocos, se corre el riesgo de obtener una visión deformada de la gráfica. Por ejemplo, suponiendo que para dibujar la gráfica de

$$y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$$

se han marcado sólo cinco puntos: $(-3, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(3, 3)$, como se muestra en la figura P.3*a*. A partir de estos puntos, se podría concluir que la gráfica es una recta. Sin embargo, esto no es correcto. Trazando varios puntos más puede verse que la gráfica es más complicada, como se observa en la figura P.3*b*.



a)



b)

Figura P.3

EXPLORACIÓN

Comparación de los métodos gráfico y analítico Utilizar una calculadora gráfica para representar cada una de las siguientes ecuaciones. En cada caso, encontrar una ventana de representación que muestre las principales características de la gráfica.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$
b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 25$
c) $y = -x^3 - 3x^2 + 20x + 5$
d) $y = 3x^3 - 40x^2 + 50x - 45$
e) $y = -(x + 12)^3$
f) $y = (x - 2)(x - 4)(x - 6)$

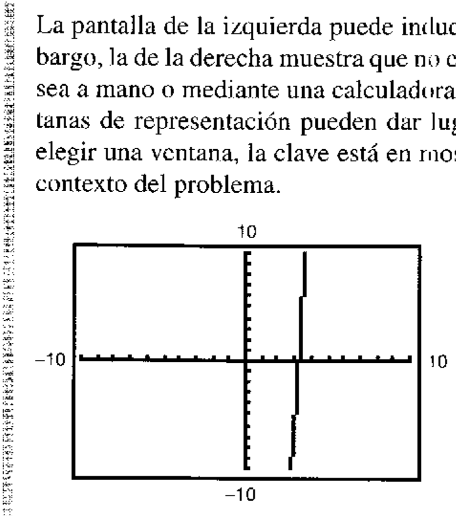
Resolver este problema usando sólo métodos gráficos conllevaría una estrategia simple de "intuición, comprobación y revisión". ¿Qué tipo de aspectos podría involucrar un planteamiento analítico? Por ejemplo, ¿tiene simetrías la gráfica?, ¿tiene inflexiones? Si es así, ¿dónde están?

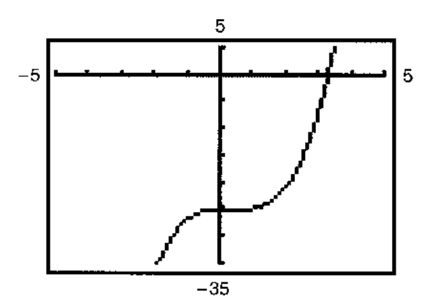
A medida que se avance por los capítulos 1, 2 y 3 de este texto, se estudiarán muchas herramientas analíticas nuevas que serán de ayuda para analizar gráficas de ecuaciones como éstas.

TECNOLOGÍA La tecnología moderna ha simplificado el dibujo de gráficas. No obstante, incluso recurriendo a ella, es posible desfigurar una gráfica. Por ejemplo, las pantallas de una calculadora gráfica de la figura P.4 muestran una porción de la gráfica de

$$y = x^3 - x^2 - 25.$$

La pantalla de la izquierda puede inducir a pensar que la gráfica es una recta. Sin embargo, la de la derecha muestra que no es así. Entonces, cuando se dibuja una gráfica ya sea a mano o mediante una calculadora, debe tenerse en cuenta que las diferentes ventanas de representación pueden dar lugar a imágenes muy distintas de la gráfica. Al elegir una ventana, la clave está en mostrar una imagen de la gráfica que se adecue al contexto del problema.





Visualizaciones en la pantalla de una calculadora de $y = x^3 - x^2 - 25$
Figura P.4

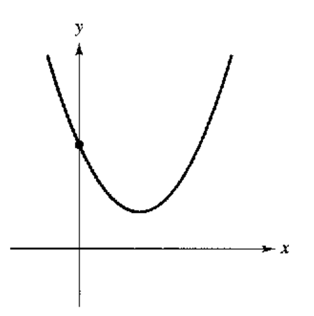
NOTA En este texto se utilizan calculadoras o computadoras con software para representar gráficamente, como *Maple*, *Mathematica*, *Derive*, *Mathcad* o el *TI-89*.

Intersecciones con los ejes

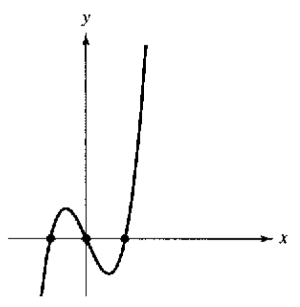
Dos tipos de puntos solución útiles al representar gráficamente una ecuación son aquellos en los que la coordenada x o y es cero. Tales puntos se denominan **intersecciones con los ejes** porque son los puntos en que la gráfica corta (hace intersección con) el eje x o con el eje y. Un punto del tipo $(a, 0)$ es una **intersección en x** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las intersecciones en x de una gráfica, igualar y a cero y despejar x de la ecuación resultante. De manera análoga, un punto del tipo $(0, b)$ es una **intersección en y** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para encontrar las intersecciones en y de una gráfica, igualar x a cero y despejar y de la ecuación resultante.

NOTA En algunos textos se denomina x -intersección a la coordenada x del punto $(a, 0)$ en lugar del propio punto. Salvo que sea necesario distinguirlos, se usará el término *intersección* para denotar tanto al punto de intersección con el eje x como a su abscisa.

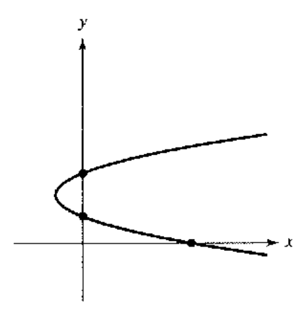
Es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, considerar las cuatro gráficas de la figura P.5.



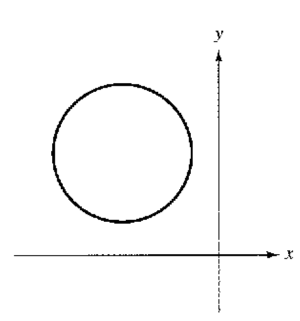
No hay intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y



Tres intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y



Una intersección con el eje x
Dos intersecciones con el eje y



No hay intersecciones

Figura P.5

EJEMPLO 2 Determinación de las intersecciones con los ejes x y y

Encontrar las intersecciones con los ejes en la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Solución Para determinar las intersecciones en x, hacer y igual a cero y despejar x

$$x^3 - 4x = 0 \qquad y \text{ se iguala a cero.}$$

$$x(x-2)(x+2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 2, \text{o } -2 \qquad \text{Despejar } x.$$

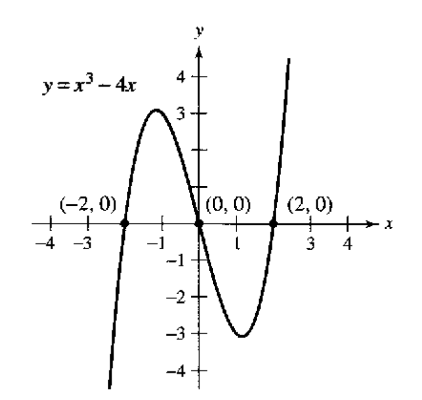
Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en x:

$$(0, 0), (2, 0) \text{ y } (-2, 0) \qquad \text{Intersecciones en } x.$$

Para encontrar las intersecciones en y, igualar x a cero. Resulta entonces $y = 0$. Por tanto, la intersección en y es

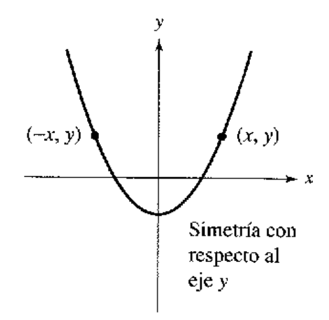
$$(0, 0) \qquad \text{Intersección en } y.$$

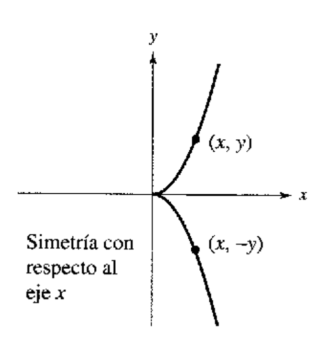
(Ver la figura P.6.)



Intersecciones de una gráfica
Figura P.6

TECNOLOGÍA En el ejemplo 2 se utiliza un método analítico para determinar las intersecciones con los ejes. Cuando no es posible tal enfoque analítico, se puede recurrir a métodos gráficos, buscando los puntos donde la gráfica toca los ejes. Utilizar una calculadora gráfica para aproximar las intersecciones.





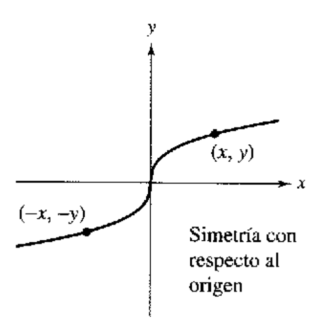


Figura P.7

Simetrías de una gráfica

Es útil conocer la simetría de una gráfica *antes* de intentar trazarla, puesto que sólo se necesitarán la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetrías pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación (ver figura P.7).

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje y** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje x** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada sobre el eje x es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen.

Criterios de simetría

1. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje y si cada uno de los términos tiene exponente par (o es una constante) Por ejemplo, la gráfica de

$$y = 2x^4 - x^2 + 2 \qquad \text{Simetría respecto al eje } y.$$

es simétrica respecto al eje y. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada uno de los términos tiene exponente impar, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Comprobación de la simetría con respecto al origen

Comprobar que la gráfica de

$$y = 2x^3 - x$$

es simétrica respecto al origen.

Solución

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 - x && \text{Ecuación original.} \\ -y &= 2(-x)^3 - (-x) && \text{Sustituir } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y. \\ -y &= -2x^3 + x && \text{Simplificar.} \\ y &= 2x^3 - x && \text{Ecuación equivalente.} \end{aligned}$$

Puesto que la sustitución produce una ecuación equivalente, se concluye que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica con respecto al origen, como se muestra en la figura P.8.

Simetría con respecto al origen
Figura P.8

EJEMPLO 4 Uso de las intersecciones y de las simetrías para representar una gráfica

Dibujar la gráfica de $x - y^2 = 1$.

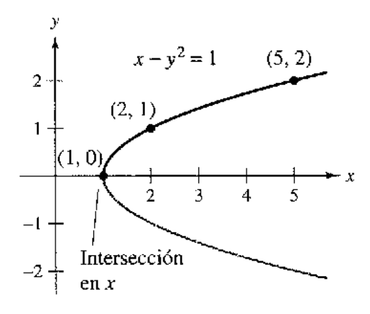
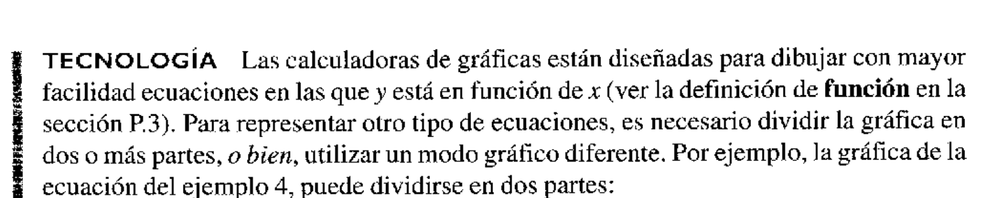


Figura P.9

Solución La gráfica es simétrica respecto al eje x porque al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

$$x - y^2 = 1 \quad \text{Ecuación original.}$$
$$x - (-y)^2 = 1 \quad \text{Sustituir } y \text{ por } -y.$$
$$x - y^2 = 1 \quad \text{Ecuación equivalente.}$$

Esto significa que la porción de la gráfica situada bajo el eje x es una imagen especular de la porción situada sobre el eje. Para dibujar la gráfica, graficar primero la intersección con el eje x y la porción sobre el eje x. Después, reflejar el dibujo en el eje x y obtener la gráfica completa, como se muestra en la figura P.9.



TECNOLOGÍA Las calculadoras de gráficas están diseñadas para dibujar con mayor facilidad ecuaciones en las que y está en función de x (ver la definición de **función** en la sección P.3). Para representar otro tipo de ecuaciones, es necesario dividir la gráfica en dos o más partes, *o bien*, utilizar un modo gráfico diferente. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación del ejemplo 4, puede dividirse en dos partes:

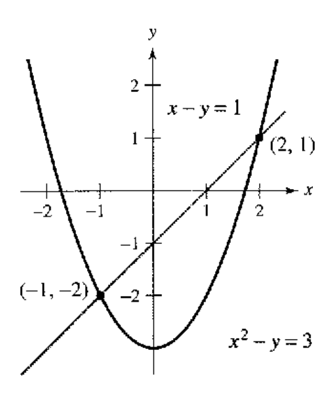
$$y_1 = \sqrt{x-1} \quad \text{Porción superior de la gráfica.}$$
$$y_1 = -\sqrt{x} - 1 \quad \text{Porción inferior de la gráfica.}$$

Puntos de intersección

Se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo punto que satisfaga ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de dos gráficas se determinan al resolver sus ecuaciones de manera simultánea.

EJEMPLO 5 Determinación de los puntos de intersección

Calcular los puntos de intersección de las gráficas de $x^2 - y = 3$ y $x - y = 1$.



Dos puntos de intersección
Figura P.10

Solución Comenzar por representar las gráficas de ambas ecuaciones en el *mismo* sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura P.10. Hecho esto, resulta evidente que las gráficas tienen dos puntos de intersección. Para determinarlos, se puede proceder como sigue.

$$y = x^2 - 3 \quad \text{Despejar } y \text{ de la primera ecuación.}$$
$$y = x - 1 \quad \text{Despejar } y \text{ de la segunda ecuación.}$$
$$x^2 - 3 = x - 1 \quad \text{Igualar los valores obtenidos de } y.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{Escribir la ecuación en la forma general.}$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x = 2 \text{ o } -1 \quad \text{Despejar } x.$$

Los valores correspondientes de y se obtienen sustituyendo $x = 2$ y $x = -1$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Resultan así los dos puntos de intersección:

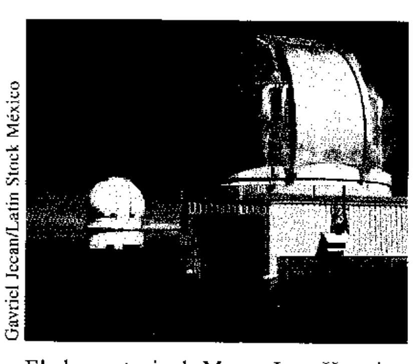
$$(2, 1) \text{ y } (-1, -2) \quad \text{Puntos de intersección.}$$

AYUDA DE ESTUDIO Verificar los puntos de intersección del ejemplo 5 sustituyéndolos en la ecuación original o usando la función de *intersección* de su calculadora o computadora.

Modelos matemáticos

Al aplicar las matemáticas en la vida real con frecuencia se usan ecuaciones como **modelos matemáticos**. Si se desarrolla un modelo matemático con el fin de representar datos reales, debe esforzarse por alcanzar dos objetivos a menudo contradictorios: precisión y sencillez. Es decir, el modelo deberá ser lo bastante sencillo como para poder manejarlo, pero también preciso como para producir resultados significativos. En la sección P.4 se tratan estos objetivos con más detalle.

EJEMPLO 6 El aumento de dióxido de carbono atmosférico



Gavriel Jecan/Latin Stock México

El observatorio de Mauna Loa, Hawai, ha medido el incremento en la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre desde 1958.

El observatorio de Mauna Loa, Hawai, registra la concentración de dióxido de carbono (en partes por millón) en la atmósfera terrestre. En la figura P.11 se muestran los registros correspondientes al mes de enero de varios años. En el número de julio de 1990 de *Scientific American*, se utilizaron esos datos para pronosticar el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre en el año 2035, utilizando el modelo cuadrático:

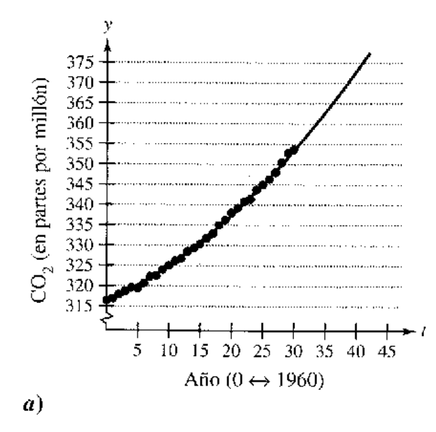
$$y = 316.2 + 0.70t + 0.018t^2$$ Modelo cuadrático para los datos de 1960 a 1990.

donde $t = 0$ representa a 1960, como se muestra en la figura P.11*a*.

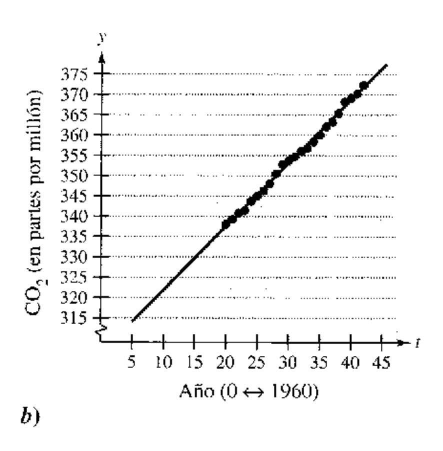
Los datos que se muestran en la figura P.11*b* representan los años 1980 a 2002, y pueden modelarse mediante

$$y = 306.3 + 1.56t$$ Modelo lineal para los datos de 1980 a 2002

donde $t = 0$ representa a 1980. ¿Cuál fue el pronóstico dado en el artículo de *Scientific American* de 1990? Dados los datos más recientes de los años 1980 a 2002, ¿parece exacta esa predicción para el año 2035?



a)



b)

Figura P.11

Solución Para responder a la primera pregunta, se sustituye $t = 75$ (para el año 2035) en el modelo cuadrático.

$$y = 316.2 + 0.70(75) + 0.018(75)^2 = 469.95$$ Modelo cuadrático.

De tal manera, el pronóstico establecido en el artículo de *Scientific American* decía que la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre alcanzaría alrededor de 470 partes por millón en el año 2035. Utilizando el modelo lineal con los datos de los años 1980 a 2002, el pronóstico para el año 2035 es

$$y = 306.3 + 1.56(75) = 423.3$$ Modelo lineal.

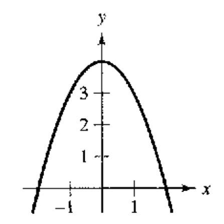
Por tanto, de acuerdo con el modelo lineal para los años 1980 a 2002, parece que el pronóstico de 1990 fue demasiado elevado.

NOTA Los modelos del ejemplo 6 se han elaborado usando un método denominado *ajuste por mínimos cuadrados* (ver la sección 13.9). El modelo lineal tiene una correlación dada por $r^2 = 0.997$ y el modelo cuadrático por $r^2 = 0.996$. Cuanto más próximo es r^2 a 1, "mejor" es el modelo.

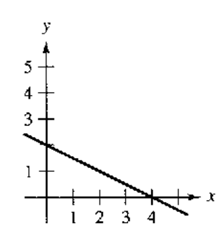
Ejercicios de la sección P.1

En los ejercicios 1 a 4, relacionar cada ecuación con su gráfica.

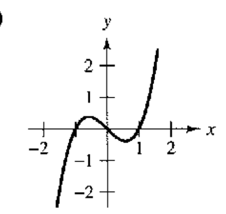
a)



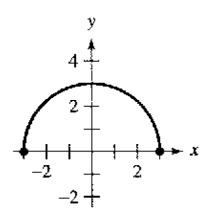
b)



c)



d)



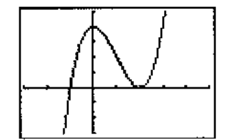
1. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
2. $y = \sqrt{9 - x^2}$
3. $y = 4 - x^2$
4. $y = x^3 - x$

En los ejercicios 5 a 14, elaborar la gráfica de la ecuación mediante el trazado de puntos.

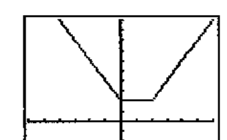
5. $y = \frac{3}{2}x + 1$
6. $y = 6 - 2x$
7. $y = 4 - x^2$
8. $y = (x - 3)^2$
9. $y = |x + 2|$
10. $y = |x| - 1$
11. $y = \sqrt{x} - 4$
12. $y = \sqrt{x + 2}$
13. $y = \dfrac{2}{x}$
14. $y = \dfrac{1}{x - 1}$

En los ejercicios 15 y 16, describir las ventanas de la figura.

15. $y = x^3 - 3x^2 + 4$



16. $y = |x| + |x - 10|$



En los ejercicios 17 y 18, utilizar una computadora para representar gráficamente la ecuación. Desplazar el cursor a lo largo de la curva para determinar de manera aproximada la coordenada desconocida de cada punto solución, con una exactitud de dos decimales.

17. $y = \sqrt{5 - x}$ *a)* $(2, y)$ *b)* $(x, 3)$
18. $y = x^5 - 5x$ *a)* $(-0.5, y)$ *b)* $(x, -4)$

En los ejercicios 19 a 26, encontrar todas las intersecciones con los ejes.

19. $y = x^2 + x - 2$
20. $y^2 = x^3 - 4x$
21. $y = x^2\sqrt{25 - x^2}$
22. $y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$
23. $y = \dfrac{3(2 - \sqrt{x})}{x}$
24. $y = \dfrac{x^2 + 3x}{(3x + 1)^2}$
25. $x^2y - x^2 + 4y = 0$
26. $y = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

En los ejercicios 27 a 38, buscar si existe simetría respecto a cada uno de los ejes y respecto al origen.

27. $y = x^2 - 2$
28. $y = x^2 - x$
29. $y^2 = x^3 - 4x$
30. $y = x^3 + x$
31. $xy = 4$
32. $xy^2 = -10$
33. $y = 4 - \sqrt{x + 3}$
34. $xy - \sqrt{4 - x^2} = 0$
35. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
36. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$
37. $y = |x^3 + x|$
38. $|y| - x = 3$

En los ejercicios 39 a 56, trazar la gráfica de la ecuación. Identificar todas las intersecciones con los ejes y determinar si existe simetría.

39. $y = -3x + 2$
40. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
41. $y = \frac{1}{2}x - 4$
42. $y = \frac{2}{3}x + 1$
43. $y = 1 - x^2$
44. $y = x^2 + 3$
45. $y = (x + 3)^2$
46. $y = 2x^2 + x$
47. $y = x^3 + 2$
48. $y = x^3 - 4x$
49. $y = x\sqrt{x + 2}$
50. $y = \sqrt{9 - x^2}$
51. $x = y^3$
52. $x = y^2 - 4$
53. $y = \dfrac{1}{x}$
54. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$
55. $y = 6 - |x|$
56. $y = |6 - x|$

En los ejercicios 57 a 60, utilizar una calculadora para dibujar la gráfica de la ecuación. Identificar toda intersección con los ejes y determinar si existe simetría.

57. $y^2 - x = 9$
58. $x^2 + 4y^2 = 4$
59. $x + 3y^2 = 6$
60. $3x - 4y^2 = 8$

En los ejercicios 61 a 68, encontrar los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones.

61. $x + y = 2$, $2x - y = 1$
62. $2x - 3y = 13$, $5x + 3y = 1$
63. $x^2 + y = 6$, $x + y = 4$
64. $x = 3 - y^2$, $y = x - 1$
65. $x^2 + y^2 = 5$, $x - y = 1$
66. $x^2 + y^2 = 25$, $2x + y = 10$

El símbolo señala los ejercicios donde se pide utilizar tecnología gráfica o un sistema de álgebra computacional. La resolución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología adecuada.

67. $y = x^3$
$y = x$

68. $y = x^3 - 4x$
$y = -(x + 2)$

En los ejercicios 69 a 72, utilizar una calculadora para encontrar los puntos de intersección de las gráficas. Verificar los resultados de manera analítica.

69. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$
$y = -x^2 + 3x - 1$

70. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
$y = 1 - x^2$

71. $y = \sqrt{x + 6}$
$y = \sqrt{-x^2 - 4x}$

72. $y = -|2x - 3| + 6$
$y = 6 - x$

73. ***Modelado matemático*** En la tabla se muestra el Índice de Precios al Consumidor (IPC) para una selección de varios años. (*Fuente: Bureau of Labor Statistics.*)

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
IPC	38.8	53.8	82.4	107.6	130.7	152.4	172.2

a) Utilizar una calculadora programable para el cálculo de regresión con el fin de encontrar un modelo matemático de la forma $y = at^2 + bt + c$ para los datos. En este modelo, y representa el IPC y t representa el año, donde $t = 0$ corresponde a 1970.

b) Representar el modelo en la calculadora y comparar los datos.

c) Utilizar el modelo para predecir el IPC del año 2010.

74. ***Modelo matemático*** En la siguiente tabla se muestra el número medio de acres por granja en Estados Unidos, en una selección de varios años. (*Fuente: U.S. Department of Agriculture.*)

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Acres	213	297	374	426	460	434

a) Utilizar una calculadora programable para el cálculo de regresión y encontrar así un modelo matemático de la forma $y = at^2 + bt + c$ para los datos. En este modelo, y representa la superficie promedio, en acres, y t el año, donde $t = 0$ corresponde a 1950.

b) Utilizar una calculadora para colocar los puntos y hacer la representación del modelo.

c) Utilizar el modelo para predecir la superficie promedio, en acres, de una granja estadounidense en el año 2010.

75. ***Punto de equilibrio*** Calcular las ventas necesarias para alcanzar el punto de equilibrio ($R = C$), si el costo* C de producir x unidades es:

$C = 5.5\sqrt{x} + 10\,000$ Ecuación de costo.

y los ingresos R por vender x unidades son:

$R = 3.29x.$ Ecuación de ingresos.

76. ***Alambre de cobre*** La resistencia y en ohms** de 1 000 pies de alambre de cobre a 77° F admite el modelo matemático

$$y = \frac{10\,770}{x^2} - 0.37, \qquad 5 \le x \le 100$$

donde x es el diámetro en milésimas de pulgada. Representar gráficamente el modelo en la calculadora. Si se duplica el diámetro del hilo, ¿en qué factor aproximado varía la resistencia?

* En España se le denomina coste.

** En España las siguientes unidades de medición se denominan: volts = voltios; amperes = amperios; ohms = ohmios; henrys = henrios; decibeles = decibelios; watts = watios.

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 77 y 78, escribir una ecuación cuya gráfica tenga la propiedad que se indica (puede existir más de una respuesta correcta).

77. La gráfica tiene intersecciones en $x = -2$, $x = 4$, y $x = 6$.

78. La gráfica tiene intersecciones en $x = -\frac{5}{2}$, $x = 2$, y $x = \frac{3}{2}$.

79. Cada una de las siguientes tablas muestra los puntos de solución de una de las siguientes ecuaciones:

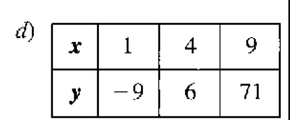
i) $y = kx + 5$ *ii)* $y = x^2 + k$
iii) $y = kx^{3/2}$ *iv)* $xy = k$

Relacionar cada ecuación con la tabla correcta y encontrar el valor de k. Explicar su razonamiento.

a)

x	1	4	9
y	3	24	81

b)



x	1	4	9
y	7	13	23

c)

x	1	4	9
y	36	9	4

d)

x	1	4	9
y	−9	6	71

80. *a)* Comprobar que si una gráfica es simétrica con respecto al eje x y al eje y, entonces es simétrica con respecto al origen. Dar un ejemplo que muestre que lo contrario no es cierto.

b) Comprobar que si una gráfica es simétrica con respecto a cualquiera de los ejes y al origen, entonces es simétrica con respecto al otro eje.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 81 a 84, determinar cuándo la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

81. Si $(1, -2)$ es el punto de una gráfica simétrica con respecto al eje x, entonces $(-1, -2)$ también es un punto de dicha gráfica.

82. Si $(1, -2)$ es el punto de una gráfica simétrica con respecto al eje y, entonces $(-1, -2)$ también es un punto de dicha gráfica.

83. Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ tiene dos intersecciones con x.

84. Si $b^2 - 4ac = 0$ y $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ sólo tiene una intersección con x.

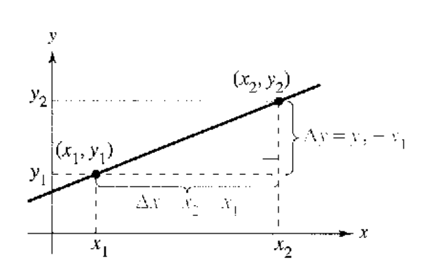
En los ejercicios 85 y 86, encontrar una ecuación de la gráfica que se compone de todos los puntos (x, y) que tienen la distancia dada respecto al origen (repasar la fórmula de la distancia en el apéndice D).

85. La distancia respecto al origen es el doble de la distancia que hay desde $(0, 3)$.

86. La distancia respecto al origen se obtiene al multiplicar la distancia que hay desde el punto $(2, 0)$ por K $(K \neq 1)$.

Sección P.2 Modelos lineales y ritmos o velocidades de cambio

- **Pendiente de una recta que pasa por dos puntos.**
- **Ecuaciones de las rectas dados un punto y su pendiente.**
- **La pendiente como razón o ritmo en aplicaciones cotidianas.**
- **Representación gráfica de modelos lineales.**
- **Rectas paralelas y perpendiculares.**



$\Delta y = y_2 - y_1$ = cambio en y
$\Delta x = x_2 - x_1$ = cambio en x
Figura P.12

La pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta no vertical es una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha. Considerar los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la recta de la figura P.12. Al desplazarse de izquierda a derecha por la recta, se produce una variación vertical de

$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \text{Cambio en } y.$$

unidades por cada variación horizontal de

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{Cambio en } x.$$

unidades. (Δ es la letra griega *delta* mayúscula y los símbolos Δy y Δx se leen "delta de y" y "delta de x".)

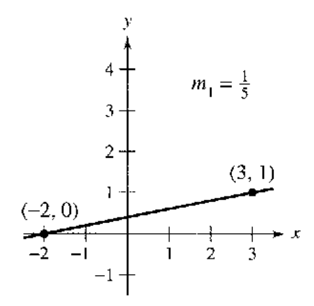
> **Definición de la pendiente de una recta**
>
> La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es
>
> $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2.$$
>
> La pendiente no está definida por rectas verticales.

NOTA Al aplicar la fórmula de la pendiente, observar que

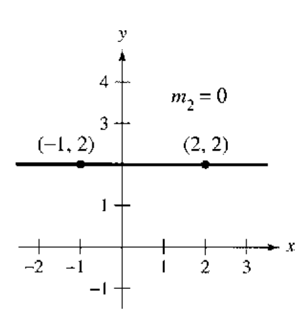
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Por lo tanto, no importa el orden en que se reste, *siempre* que sea coherente y las dos "coordenadas restadas" provengan del mismo punto.

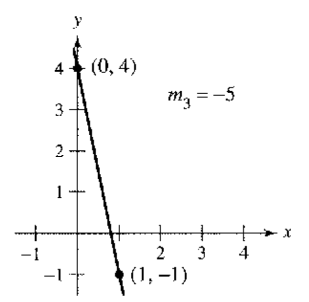
En la figura P.13 se muestran cuatro rectas con pendiente: una positiva, otra cero, otra negativa y otra "indefinida". En general, cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente de una recta, mayor es su inclinación. Por ejemplo, en la figura P.13, la recta con pendiente -5 está más inclinada que la de pendiente $\frac{1}{5}$.



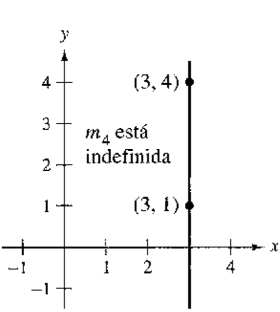
Si m es positiva, la recta sube de izquierda a derecha



Si m es cero, la recta es horizontal



Si m es negativa, la recta baja de izquierda a derecha



Si m es indefinida, la recta es vertical

Figura P.13

Ecuaciones de las rectas

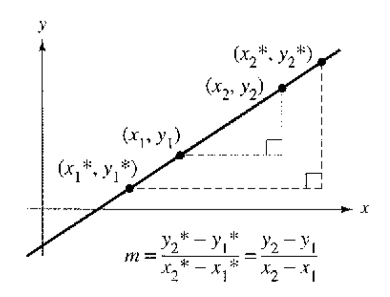
EXPLORACIÓN

Estudio de ecuaciones de rectas Utilizar una calculadora para dibujar cada una de las siguientes ecuaciones lineales. ¿Qué punto es común a las siete rectas? ¿Qué número determina la pendiente de la recta en cada ecuación?

a) $y - 4 = -2(x + 1)$
b) $y - 4 = -1(x + 1)$
c) $y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 1)$
d) $y - 4 = 0(x + 1)$
e) $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1)$
f) $y - 4 = 1(x + 1)$
g) $y - 4 = 2(x + 1)$

Utilizar los resultados para construir la ecuación de una recta que pase por $(-1, 4)$ con una pendiente de m.

Para calcular la pendiente de una recta pueden utilizarse dos de sus puntos *cualesquiera*. Esto puede verificarse con ayuda de los triángulos semejantes de la figura P.14. (Recordar que los cocientes de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son todos iguales.)



Cualquier par de puntos de una recta determina su pendiente
Figura P.14

Se puede escribir la ecuación de una recta si se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. Dada la pendiente m y un punto (x_1, y_1). Si (x, y) denota cualquier otro punto de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación, que involucra las dos variables x y y, se puede escribir de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$, la cual es conocida como ecuación **punto-pendiente de una recta.**

> **Ecuación punto-pendiente de una recta**
>
> La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) está dada por
>
> $$y - y_1 = m(x - x_1).$$

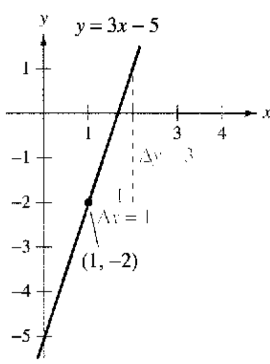
EJEMPLO 1 Determinación de la ecuación de una recta

Encontrar la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (x_0, y_1).

Solución

$y - y_1 = m(x - x_1)$	Forma punto-pendiente.
$y - (-2) = 3(x - 1)$	Sustituir y_1 por -2, x_1 por 1 y m por 3.
$y + 2 = 3x - 3$	Simplificar.
$y = 3x - 5$	Despejar y.

(Ver la figura P.15.)



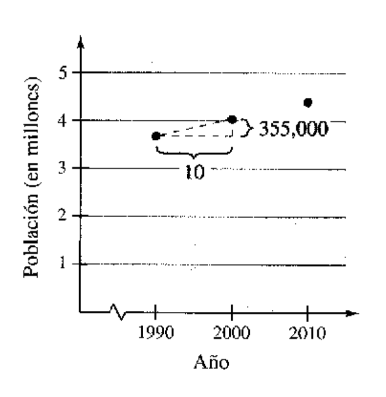
La recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(1, -2)$
Figura P.15

NOTA Recordar que la pendiente puede usarse sólo para describir una recta no vertical. De tal manera, las rectas verticales no pueden expresarse mediante ecuaciones punto-pendiente. Por ejemplo, la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(1, -2)$ es $x = 1$.

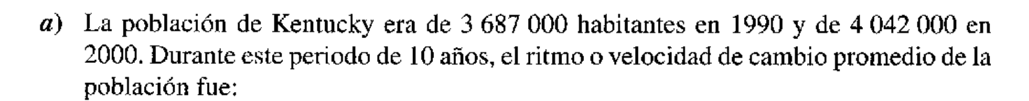
Razones y ritmos o velocidades de cambio

La pendiente de una recta puede interpretarse ya sea como una *razón* o como una *proporción*, o bien como una *tasa, ritmo* o *velocidad* de cambio. Si los ejes x y y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es una **razón** o **proporción**. Si los ejes x y y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una **tasa**, **ritmo** o **velocidad de cambio**. Al estudiar cálculo, se encontrarán aplicaciones relativas a ambas interpretaciones de la pendiente.

EJEMPLO 2 Crecimiento de poblaciones y diseño técnico



Población de Kentucky en el censo
Figura P.16



a) La población de Kentucky era de 3 687 000 habitantes en 1990 y de 4 042 000 en 2000. Durante este periodo de 10 años, el ritmo o velocidad de cambio promedio de la población fue:

$$\text{Ritmo o velocidad de cambio} = \frac{\text{cambio en población}}{\text{cambio en años}}$$
$$= \frac{4\,042\,000 - 3\,687\,000}{2000 - 1990}$$
$$= 35\,500 \text{ personas por año.}$$

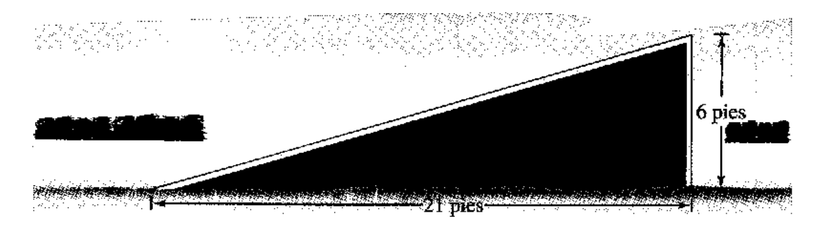
Si la población de Kentucky continúa creciendo a este ritmo durante los próximos 10 años, en 2010 alcanzará 4 397 000 habitantes (ver la figura P.16). (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

b) En un torneo de saltos de esquí acuático, la rampa se eleva hasta una altura de 6 pies sobre una balsa de 21 pies de largo, como se ilustra en la figura P.17. La pendiente de la rampa de esquí es el cociente entre su altura (ascenso) y la longitud de su base (avance).

$$\text{Pendiente de la rampa} = \frac{\text{ascenso}}{\text{avance}}$$
$$= \frac{6 \text{ pies}}{21 \text{ pies}}$$
$$= \frac{2}{7}$$

Ascenso es el cambio vertical, avance es el cambio horizontal.

Observar que, en este caso, la pendiente es una proporción y se expresa sin unidades.



Dimensiones de una rampa de esquí acuático
Figura P.17

El ritmo o velocidad de cambio calculado en el ejemplo 2*a* es un **ritmo** o **velocidad de cambio medio**. Un ritmo o velocidad de cambio medio siempre se calcula con respecto a un intervalo que en este caso es [1990, 2000]. En el capítulo 2 se estudiará otro tipo de ritmo o velocidad de cambio, denominado *ritmo* o *velocidad de cambio instantánea*.

Representación gráfica de modelos lineales

Muchos de los problemas de geometría analítica pueden clasificarse en dos categorías básicas: 1) Dada una gráfica, ¿cuál es su ecuación?, y 2) Dada una ecuación, ¿cuál es su gráfica? La ecuación punto-pendiente de una recta puede emplearse para resolver ciertos problemas de la primera categoría. No obstante, esta forma no resulta útil para resolver problemas de la segunda categoría. La forma que mejor se adapta al trazado de la gráfica de una recta es la forma **pendiente-intersección** de la ecuación de una recta.

Ecuación pendiente-intersección de una recta

La gráfica de la ecuación lineal

$$y = mx + b$$

es una recta que tiene *pendiente m* y una *intersección* con el eje y en $(0, b)$.

EJEMPLO 3 Trazado de rectas en el plano

Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $y = 2x + 1$ ***b***) $y = 2$ ***c***) $3y + x - 6 = 0$

Solución

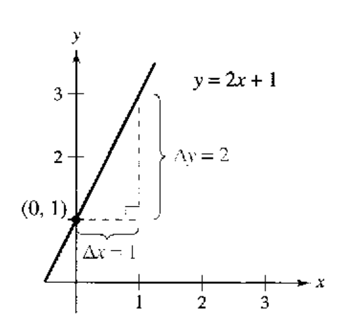
a) Puesto que $b = 1$, la intersección en y es $(0, 1)$. Como la pendiente es $m = 2$, se sabe que la recta asciende dos unidades por cada unidad que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18*a*.

b) Dado que $b = 2$, la intersección en y es $(0, 2)$. Como la pendiente es $m = 0$, se sabe que es horizontal, como se ilustra en la figura P.18*b*.

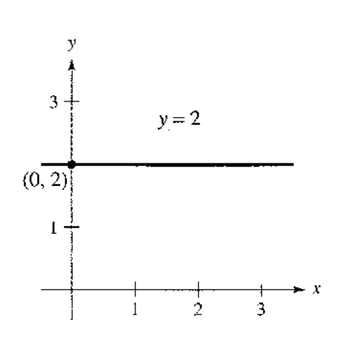
c) Comenzar por escribir la ecuación en forma pendiente-intersección.

$$3y + x - 6 = 0 \quad \text{Ecuación original.}$$
$$3y = -x + 6 \quad \text{Despejar el término en } y.$$
$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad \text{Forma pendiente-intersección.}$$

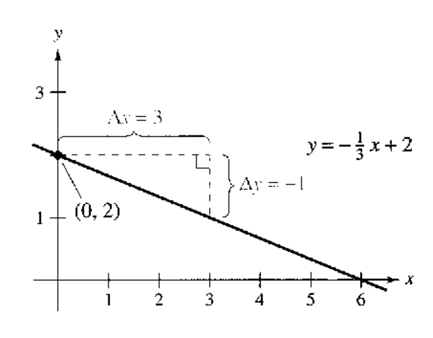
De esta forma, puede verse que la intersección en y es $(0, 2)$ y la pendiente $m = -\frac{1}{3}$. Esto quiere decir que la recta desciende una unidad por cada tres unidades que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18*c*.



a) $m = 2$; la recta sube



b) $m = 0$; la recta es horizontal



c) $m = = -\frac{1}{3}$; la recta baja

Figura P.18

Dado que la pendiente de una recta vertical no está definida, su ecuación no puede escribirse con la forma pendiente-intersección. Sin embargo, la ecuación de cualquier recta puede escribirse en la **forma general**:

$$Ax + By + C = 0$$ Forma general de la ecuación de una recta.

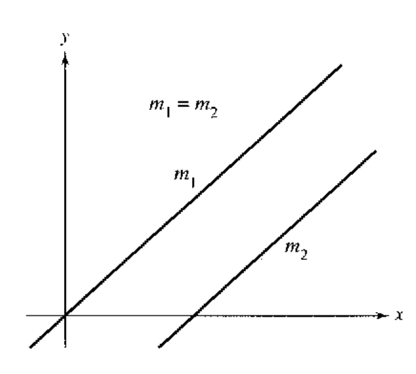
donde A y B no son *ambos* cero. Por ejemplo, la recta vertical dada por $x = a$ puede representarse por la ecuación general $x - a = 0$.

Resumen de ecuaciones de las rectas

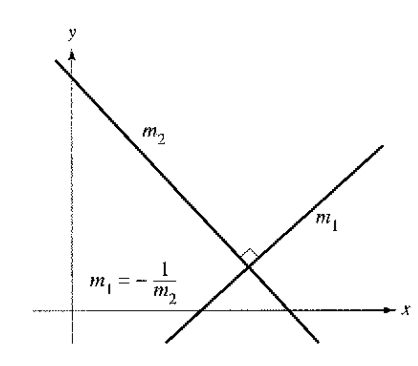
1. Forma general: $Ax + By + C = 0, \quad (A, B \neq 0)$
2. Recta vertical: $x = a$
3. Recta horizontal: $y = b$
4. Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
5. Forma pendiente-intersección: $y = mx + b$

Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente de una recta es útil para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares, como se muestra en la figura P.19. En específico, dos rectas no verticales con la misma pendiente son paralelas, y dos rectas no verticales cuyas pendientes son una opuesta o el negativo inverso de la otra son perpendiculares.



Rectas paralelas



Rectas perpendiculares

Figura P.19

AYUDA DE ESTUDIO En matemáticas, la expresión "si y sólo si" es una manera de establecer dos implicaciones en una misma afirmación. Por ejemplo, la primera afirmación de la derecha equivale a las dos implicaciones siguientes:

a) Si dos rectas no verticales distintas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.
b) Si dos rectas no verticales distintas tienen pendientes iguales, entonces son paralelas.

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

1. Dos rectas no verticales distintas son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir, si y sólo si $m_1 = m_2$.
2. Dos rectas no verticales son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son una opuesta o el negativo de la inversa de la otra, es decir, si y sólo si

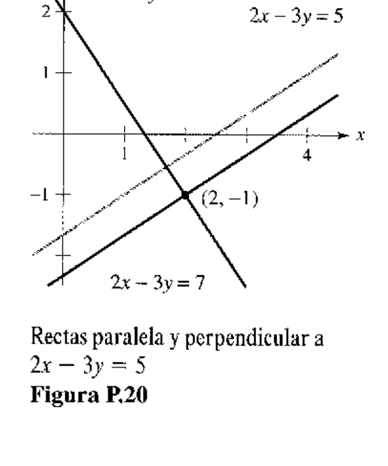
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

EJEMPLO 4 Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Hallar la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son

a) paralela a la recta $2x - 3y = 5$ ***b)*** perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$.

(Ver la figura P.20.)



Rectas paralela y perpendicular a $2x - 3y = 5$
Figura P.20

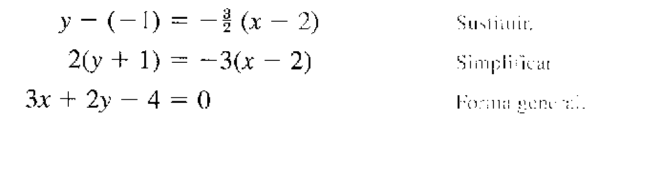
Solución Al escribir la ecuación lineal $2x - 3y = 5$ en forma punto-pendiente, $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, se ve que la recta dada tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$.

a) La recta que pasa por $(2, -1)$ y es paralela a la recta dada tiene también pendiente de $\frac{2}{3}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - (-1) = \tfrac{2}{3}(x - 2) \qquad \text{Sustituir.}$$
$$3(y + 1) = 2(x - 2) \qquad \text{Simplificar.}$$
$$2x - 3y - 7 = 0 \qquad \text{Forma general.}$$

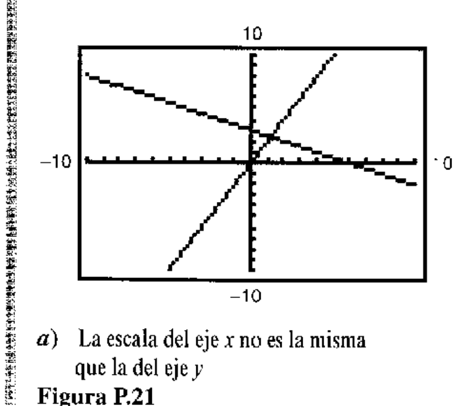
Observar la similitud con la ecuación original.

b) Calculando el opuesto o el negativo del inverso de la pendiente de la recta dada, se determina que la pendiente de toda recta perpendicular a la inicial es $-\frac{3}{2}$. Por tanto, la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es perpendicular a la recta dada tiene la siguiente ecuación.

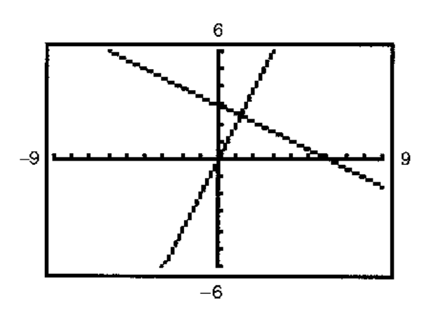


$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - (-1) = -\tfrac{3}{2}(x - 2) \qquad \text{Sustituir.}$$
$$2(y + 1) = -3(x - 2) \qquad \text{Simplificar.}$$
$$3x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{Forma general.}$$

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA La pendiente de una recta aparece distorsionada si se utilizan diferentes escalas en los ejes x y y. Por ejemplo, las dos pantallas de calculadora gráfica de las figuras P.21*a* y P.21*b* muestran las rectas dadas por $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Puesto que las pendientes de estas rectas son una el negativo del inverso de la otra, las rectas son perpendiculares. Sin embargo, en la figura P.21*a* no lo parecen, debido a que la escala del eje x no es la misma que la escala del eje y. En la figura P.21*b* aparecen perpendiculares debido a que la escala utilizada del eje x es igual a la empleada para el eje y. Este tipo de ventanas se denominan "ventanas cuadradas".



a) La escala del eje x no es la misma que la del eje y



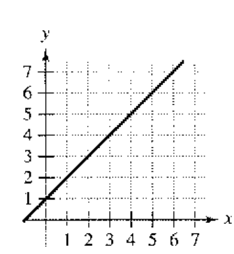
b) La escala del eje x es la misma que la del eje y

Figura P.21

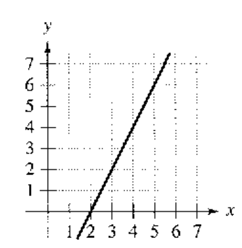
Ejercicios de la sección P.2

En los ejercicios 1 a 6, calcular la pendiente de la recta a partir de su gráfica.

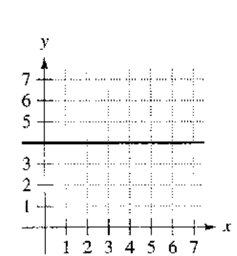
1.



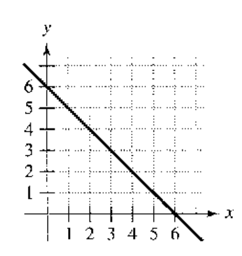
2.



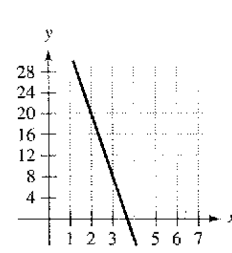
3.



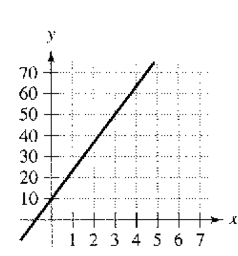
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 y 8, trazar las rectas que pasan por el punto dado con la pendiente indicada. Dibujar en un mismo sistema de coordenadas.

	Punto	*Pendientes*			
7.	$(2, 3)$	*a*) 1	*b*) -2	*c*) $-\frac{3}{2}$	*d*) indefinida
8.	$(-4, 1)$	*a*) 3	*b*) -3	*c*) $\frac{1}{3}$	*d*) 0

En los ejercicios 9 a 14, dibujar el par de puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.

9. $(3, -4), (5, 2)$ **10.** $(1, 2), (-2, 4)$

11. $(2, 1), (2, 5)$ **12.** $(3, -2), (4, -2)$

13. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$ **14.** $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

En los ejercicios 15 a 18, utilizar el punto de la recta y su pendiente para determinar otros tres puntos por los que pase la recta (hay más de una respuesta correcta).

	Punto	*Pendiente*		*Punto*	*Pendiente*
15.	$(2, 1)$	$m = 0$	**16.**	$(-3, 4)$	m indefinida
17.	$(1, 7)$	$m = -3$	**18.**	$(-2, -2)$	$m = 2$

19. ***Diseño de una cinta*** Se está construyendo una cinta transportadora de manera que se eleve 1 metro por cada 3 metros de avance horizontal.

a) Calcular la pendiente de la cinta.
b) Suponer que la cinta corre entre dos pisos de una fábrica. Calcular la longitud de la cinta si la distancia vertical entre ambos pisos es de 10 pies.

20. ***Ritmo de cambio*** Cada uno de los siguientes datos es la pendiente de una recta que representa los ingresos diarios y en términos del tiempo x en días. Utilizar la pendiente para interpretar la variación en los ingresos correspondiente a un incremento de un día.

a) $m = 400$ *b*) $m = 100$ *c*) $m = 0$

21. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra las poblaciones y (en millones) de Estados Unidos durante 1996-2001. La variable t representa el tiempo en años, $t = 6$ corresponde a 1996. (*Fuente: U.S. Bureau of the Census.*)

t	6	7	8	9	10	11
y	269.7	272.9	276.1	279.3	282.3	285.0

a) Dibujar los datos a mano y unir los puntos adyacentes con un segmento de línea.
b) Utilizar la pendiente de cada segmento de línea con objeto de determinar en qué año se incrementó la población con menor rapidez.

22. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el ritmo o velocidad r (en millas por hora) al que se está moviendo un vehículo transcurridos t segundos.

t	5	10	15	20	25	30
r	57	74	85	84	61	43

a) Dibujar la gráfica a mano y unir los puntos adyacentes con un segmento de línea.
b) Utilizar la pendiente de cada segmento de línea con objeto de determinar en qué intervalo cambió más rápidamente el ritmo o velocidad del vehículo. ¿Cómo cambió el ritmo o velocidad?

En los ejercicios 23 a 26, calcular la pendiente y la intersección en y (si es posible) de la recta.

23. $x + 5y = 20$ **24.** $6x - 5y = 15$

25. $x = 4$ **26.** $y = -1$

En los ejercicios 27 a 32, encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente indicada. Trazar la recta.

	Punto	*Pendiente*		*Punto*	*Pendiente*
27.	$(0, 3)$	$m = \frac{3}{4}$	**28.**	$(-1, 2)$	m indefinida
29.	$(0, 0)$	$m = \frac{2}{3}$	**30.**	$(0, 4)$	$m = 0$
31.	$(3, -2)$	$m = 3$	**32.**	$(-2, 4)$	$m = -\frac{3}{5}$

En los ejercicios 33 a 42, encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos y trazar la recta.

33. $(0, 0), (2, 6)$
34. $(0, 0), (-1, 3)$
35. $(2, 1), (0, -3)$
36. $(-3, -4), (1, 4)$
37. $(2, 8), (5, 0)$
38. $(-3, 6), (1, 2)$
39. $(5, 1), (5, 8)$
40. $(1, -2), (3, -2)$
41. $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right)$
42. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

43. Determinar la ecuación de la recta vertical con intersección en x en 3.
44. Demostrar que la recta con intersecciones con los ejes en $(a, 0)$ y $(0, b)$ tiene la siguiente ecuación.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

En los ejercicios 45 a 48, utilizar el resultado del ejercicio 44 para escribir la ecuación de la recta.

45. intersección en x: $(2, 0)$
intersección en y: $(0, 3)$
46. intersección en x: $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
intersección en y: $(0, -2)$
47. Punto de la recta: $(1, 2)$
intersección en x: $(a, 0)$
intersección en y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$
48. Punto de la recta: $(-3, 4)$
intersección en x: $(a, 0)$
intersección en y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

En los ejercicios 49 a 56, trazar la gráfica de la ecuación.

49. $y = -3$
50. $x = 4$
51. $y = -2x + 1$
52. $y = \frac{1}{3}x - 1$
53. $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$
54. $y - 1 = 3(x + 4)$
55. $2x - y - 3 = 0$
56. $x + 2y + 6 = 0$

Configuración cuadrada **En los ejercicios 57 y 58, utilizar una calculadora para dibujar ambas rectas en cada ventana de visor. Comparar las gráficas. ¿Las rectas aparecen perpendiculares? ¿Lo son? Explicar la respuesta.**

57. $y = x + 6, y = -x + 2$

a)
Xmín = −10
Xmáx = 10
Xscl = 1
Ymín = −10
Ymáx = 10
Yscl = 1

b)
Xmín = −15
Xmáx = 15
Xscl = 1
Ymín = −10
Ymáx = 10
Yscl = 1

58. $y = 2x - 3, y = -\frac{1}{2}x + 1$

a)
Xmín = −5
Xmáx = 5
Xscl = 1
Ymín = −5
Ymáx = 5
Yscl = 1

b)
Xmín = −6
Xmáx = 6
Xscl = 1
Ymín = −4
Ymáx = 4
Yscl = 1

En los ejercicios 59 a 64, escribir la ecuación de la recta que pase por el punto y que sea: *a)* paralela a la recta dada, y *b)* perpendicular a la recta dada.

	Punto	*Línea*		*Punto*	*Línea*
59.	$(2, 1)$	$4x - 2y = 3$	60.	$(-3, 2)$	$x + y = 7$
61.	$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$	$5x - 3y = 0$	62.	$(-6, 4)$	$3x + 4y = 7$
63.	$(2, 5)$	$x = 4$	64.	$(-1, 0)$	$y = -3$

Ritmo o velocidad de cambio **En los ejercicios 65 a 68, se da el valor de un producto, en dólares, durante 2004 y el ritmo o velocidad al que se espera que varíe su valor durante los próximos 5 años. Utilizar esta información para escribir una ecuación lineal que proporcione el valor en dólares V del producto en términos del año t. (Sea $t = 0$ representativo del año 2000.)**

	Valor en 2004	*Ritmo o velocidad*
65.	\$2 540	\$125 aumento anual
66.	\$156	\$4.50 aumento anual
67.	\$20 400	\$2 000 reducción anual
68.	\$245 000	\$5 600 reducción anual

En los ejercicios 69 y 70, utilizar la calculadora con graficador para representar las parábolas y encontrar sus puntos de intersección. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección y dibujar su gráfica en la misma ventana de representación.

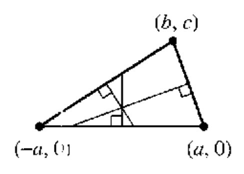
69. $y = x^2$
$y = 4x - x^2$
70. $y = x^2 - 4x + 3$
$y = -x^2 + 2x + 3$

En los ejercicios 71 y 72, determinar si los puntos son colineales. (Se dice que tres puntos son *colineales* si pertenecen a una misma recta.)

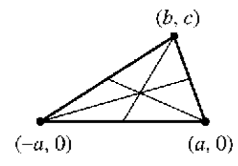
71. $(-2, 1), (-1, 0), (2, -2)$
72. $(0, 4), (7, -6), (-5, 11)$

Desarrollo de conceptos

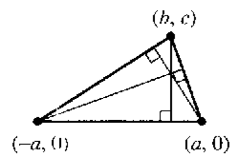
En los ejercicios 73 a 75, encontrar las coordenadas del punto de intersección de los segmentos dados. Explicar el razonamiento.

73.


Bisectrices perpendiculares

74.


Medianas

75.


Alturas

76. Demostrar que los puntos de intersección en los ejercicios 73, 74 y 75 son colineales.

77. ***Conversión de temperaturas*** Encontrar la ecuación lineal que exprese la relación que existe entre la temperatura en grados

Celsius C y la temperatura en grados Fahrenheit F. Utilizar el hecho de que el agua se congela a 0° C (32° F) y hierve a 100° C (212° F) para convertir 72° F a grados Celsius.

78. ***Reembolso de gastos*** Una compañía reembolsa a sus representantes de ventas $150 diarios por alojamiento y comidas más 34¢ por milla recorrida. Escribir una ecuación lineal que exprese el costo diario C para la compañía en términos de x, el número de millas recorridas. ¿Cuánto le costará a la empresa que uno de sus representantes de ventas recorra 137 millas?

79. ***Elección profesional*** Un empleado tiene dos opciones a puestos en una gran corporación. En un puesto le pagan $12.50 por hora *más* un bono de $0.75 por unidad producida. En el otro, $9.20 por hora *más* un bono de $1.30.

a) Representar gráficamente las ecuaciones lineales correspondientes a los salarios por hora W en términos de x, el número de unidades producidas por hora, para cada una de las opciones.

b) Representar con una calculadora gráfica las ecuaciones lineales y encontrar el punto de intersección.

c) Interpretar el significado del punto de intersección de las gráficas del apartado *b*). ¿Cómo usaría esta información para seleccionar la opción correcta si su objetivo fuera obtener el mayor sueldo por hora?

80. ***Depreciación lineal*** Un pequeño negocio adquiere un equipo de $875. Transcurridos 5 años el equipo será obsoleto, carente de valor.

a) Escribir una ecuación lineal que proporcione el valor y del equipo en términos del tiempo x, $0 \leq x \leq 5$.

b) Encontrar el valor del equipo cuando $x = 2$.

c) Calcular el momento en que el valor del equipo es $200 (con una precisión de dos cifras decimales).

81. ***Alquiler de apartamentos*** Una agencia inmobiliaria maneja un complejo de 50 apartamentos. Cuando el alquiler es de $580 mensuales, los 50 apartamentos están ocupados. Sin embargo, cuando el alquiler es de $625, el número promedio de apartamentos ocupados desciende a 47. Suponga que la relación entre el alquiler mensual p y la demanda x es lineal. (*Nota*: Aquí se usa el término *demanda* para referirse al número de apartamentos ocupados.)

a) Escribir una ecuación lineal que proporcione la demanda x en términos del alquiler p.

b) *Extrapolación lineal* Utilizar una calculadora para representar la ecuación de la demanda y emplear la función *trace* para pronosticar el número de apartamentos ocupados si el alquiler aumenta a $655.

c) *Interpolación lineal* Pronosticar el número de apartamentos ocupados si el alquiler baja a $595. Verificar el resultado gráficamente.

82. ***Modelo matemático*** Un profesor pone cuestionarios de 20 puntos y exámenes de 100 puntos a lo largo de un curso de matemáticas. Las calificaciones promedio de seis estudiantes, dadas como pares ordenados (x, y), donde x es la calificación media en los cuestionarios y y la calificación media en los exámenes, son (18, 87), (10, 55), (19, 96), (16, 79), (13, 76) y (15, 82).

a) Empleando una calculadora con programa para el cálculo de regresiones, encontrar la recta de regresión, por mínimos cuadrados, para los datos.

b) Utilizar una calculadora gráfica para trazar los puntos y graficar la recta de regresión en una misma ventana.

c) Utilizar la recta de regresión para pronosticar la calificación promedio en los exámenes de un estudiante cuya calificación promedio en los cuestionarios es 17.

d) Interpretar el significado de la pendiente de la recta de regresión.

e) Si el profesor añade 4 puntos a la calificación promedio en los exámenes de cada alumno, describir el cambio de posición de los puntos trazados y la modificación de la ecuación de la recta.

83. ***Recta tangente*** Encontrar la ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 169$ en el punto (5, 12).

84. ***Recta tangente*** Encontrar la ecuación de la recta tangente al círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ en el punto $(4, -3)$.

Distancia **En los ejercicios 85 a 90, calcular la distancia que existe entre el punto y la recta o entre las rectas, utilizando la fórmula para la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$.**

$$\textbf{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

85. Punto: (0, 0)
Recta: $4x + 3y = 10$

86. Punto: (2, 3)
Recta: $4x + 3y = 10$

87. Punto: $(-2, 1)$
Recta: $x - y - 2 = 0$

88. Punto: (6, 2)
Recta: $x = -1$

89. Recta: $x + y = 1$
Recta: $x + y = 5$

90. Recta: $3x - 4y = 1$
Recta: $3x - 4y = 10$

91. Demostrar que la distancia que existe entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

92. Escribir la distancia d entre el punto (3, 1) y la recta $y = mx + 4$ en términos de m. Emplear una calculadora gráfica para representar la ecuación. ¿Cuándo es 0 la distancia? Explicar el resultado de manera geométrica.

93. Demostrar que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente. (Un rombo es un cuadrilátero con lados de igual longitud.)

94. Demostrar que la figura que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados consecutivos de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo.

95. Demostrar que si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta que (x_1^*, y_1^*) y (x_2^*, y_2^*), entonces:

$$\frac{y_2^* - y_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Suponer que $x_1 \neq x_2$ y $x_1^* \neq x_2^*$.

96. Demostrar que si las pendientes de dos rectas son una opuesta o el negativo del inverso de la otra, entonces las rectas son perpendiculares.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 97 y 98, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si no lo es, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que muestre su falsedad.**

97. Las rectas de ecuaciones $ax + by = c_1$ y $bx - ay = c_2$ son perpendiculares. Suponer que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

98. Dos rectas con pendientes positivas pueden ser perpendiculares entre sí.

Sección P.3 Funciones y sus gráficas

- **Uso de la notación de función para representar y evaluar funciones.**
- **Dominio y recorrido o rango de una función.**
- **Gráfica de una función.**
- **Tipos de transformaciones de las funciones.**
- **Clasificaciones y combinaciones de funciones.**

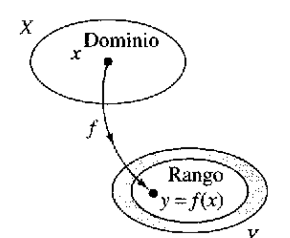
Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos X y Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y), donde x es un elemento de X y y un elemento de Y. Una **función** de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina **variable independiente**, mientras que la variable y se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área A de un círculo es una función de su radio r.

$A = \pi r^2$ A es una función de r.

En este caso, r es la variable independiente y A, la variable dependiente.



Una función real de una variable real
Figura P.22

Definición de función real de una variable real

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el **valor de f en x**. El **recorrido o rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X (ver la figura P.22).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, este texto se concentra en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$x^2 + 2y = 1$ Ecuación en forma implícita.

define y, la variable dependiente, como función de x, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de y correspondiente a un valor de x dado) resulta conveniente despejar y.

$y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ Ecuación en forma explícita.

Utilizando f como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2).$ Notación de funciones.

La ecuación original $x^2 + 2y = 1$ define **implícitamente** a y como función de x. Cuando se despeja y, se obtiene la ecuación en forma **explícita**.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar la variable dependiente como $f(x)$, informando al mismo tiempo que la variable independiente es x y que la función se denota por "f". El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿cuál es el valor de y que corresponde a $x = 3$?" se puede preguntar "¿cuánto vale $f(3)$?"

NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.

En una ecuación que define a una función, el papel de la variable x es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 - 4(\quad) + 1$$

donde se usan paréntesis en lugar de x. Para evaluar $f(-2)$, basta con colocar -2 dentro de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituir } x \text{ por } -2. \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 17 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

NOTA Aunque es frecuente usar f como un símbolo adecuado para denotar una función y x para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo, todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 && \text{El nombre de la función es } f \text{, el de la variable independiente es } x. \\ f(t) &= t^2 - 4 \;\; + 7 && \text{El nombre de la función es } f \text{, el de la variable independiente es } t. \\ g(s) &= s^2 - 4s + 7 && \text{El nombre de la función es } g \text{, el de la variable independiente es } s. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluación de una función

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, calcular:

a) $f(3a)$ ***b)*** $f(b-1)$ ***c)*** $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$

Solución

a)
$$\begin{aligned} f(3a) &= (3a)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } 3a. \\ &= 9a^2 + 7 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(b-1) &= (b-1)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } b-1. \\ &= b^2 - 2b + 1 + 7 && \text{Desarrollar el binomio.} \\ &= b^2 - 2b + 8 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[(x+\Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 2x + \Delta x, \qquad \Delta x \neq 0 \end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO En el cálculo, es importante comunicar con claridad el dominio de una función o expresión. Por ejemplo, en el ejemplo 1c, las expresiones

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x, \qquad \Delta x \neq 0$$

son equivalentes, ya que $\Delta x \neq 0$ se excluye del dominio de la función o expresión. Si no se estableciera esa restricción del dominio, las dos expresiones no serían equivalentes.

NOTA La expresión del ejemplo 1c se llama *cociente incremental* o de *diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se verá más acerca de esto en el capítulo 2.

Dominio y recorrido o rango de una función

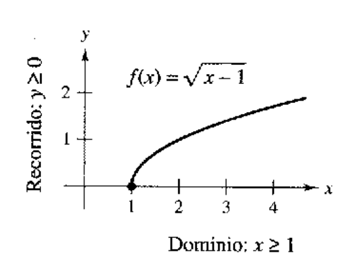
El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera *implícita* mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4},\quad 4\leq x\leq 5$$

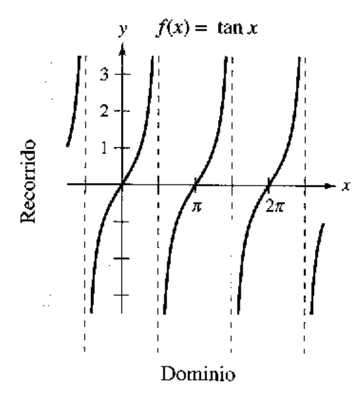
tiene un dominio definido de manera explícita dado por $\{x: 4 \leq x \leq 5\}$. Por otra parte, la función dada por

$$g(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

tiene un dominio implícito: es el conjunto $\{x: x \neq \pm 2\}$.



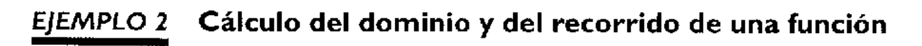
a) El dominio de f es $[1, \infty)$ y el recorrido o rango $[0, \infty)$



b) El dominio de f lo constituyen todos los valores reales de x tales que $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$

Figura P.23

EJEMPLO 2 Cálculo del dominio y del recorrido de una función



a) El dominio de la función

$$f(x)=\sqrt{x-1}$$

es el conjunto de los valores de x tales que $x - 1 \geq 0$; es decir, el intervalo $[1, \infty)$. Para encontrar el recorrido o rango, se observa que $f(x)=\sqrt{x-1}$ nunca es negativo. Por ende, el recorrido o rango es el intervalo $[0, \infty)$, como se señala en la figura P.23*a*.

b) Como se muestra en la figura P.23*b*, el dominio de la función tangente

$$f(x) = \tan x$$

es el conjunto de los valores de x tales que

$$x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \text{con } n \text{ entero.}$$ Dominio de la función tangente.

El recorrido o rango de esta función es el conjunto de todos los números reales. Para repasar las características de esta y otras funciones trigonométricas, ver el apéndice D.

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determinar el dominio y el recorrido o rango de la función

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x<1\\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

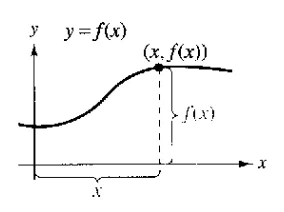
Solución Puesto que f está definida para $x < 1$ y $x \geq 1$, su dominio es todo el conjunto de los números reales. En la parte del dominio donde $x \geq 1$, la función se comporta como en el ejemplo 2*a*. Para $x < 1$, todos los valores de $1 - x$ son positivos. Por consiguiente, el recorrido de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Ver la figura P.24.)

y
$f(x) = \begin{cases}1-x, & x<1\\ \sqrt{x-1}, & x\geq 1\end{cases}$
Recorrido: $y \geq 0$
2
1
1 2 3 4
x
Dominio: todos los x reales

El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$

Figura P.24

Se dice que una función de X a Y es **inyectiva** si a cada valor de y perteneciente al recorrido o rango le corresponde exactamente un valor x del dominio. Por ejemplo, la función del ejemplo 2*a* es inyectiva, mientras que las de los ejemplos 2*b* y 3 no lo son. Se dice que una función de X a Y es **suprayectiva** si su recorrido es todo Y.



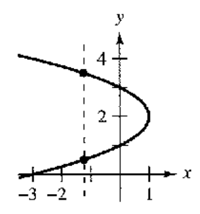
Gráfica de una función
Figura P.25

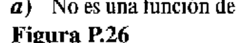
Gráfica de una función

La gráfica de una función $y = f(x)$ está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. En la figura P.25, puede observarse que

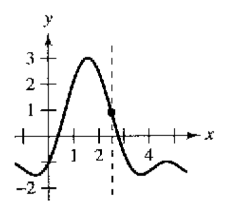
$$x = \text{distancia dirigida desde el eje } y$$
$$f(x) = \text{distancia dirigida desde el eje } x.$$

Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x a lo sumo *una vez*. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado, llamado **criterio de la recta vertical**, para funciones de x. Es decir, una gráfica en el plano de coordenadas es la (gráfica) de una función f si y sólo si ninguna recta vertical hace intersección con ella en más de un punto. Por ejemplo, en la figura P.26a puede verse que la gráfica no define a y como función de x, ya que hay una recta vertical que corta a la gráfica dos veces, mientras que en las figuras P.26b y c las gráficas sí definen a y como función de x.

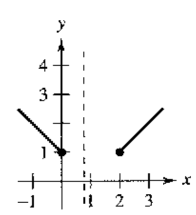




a) No es una función de x.



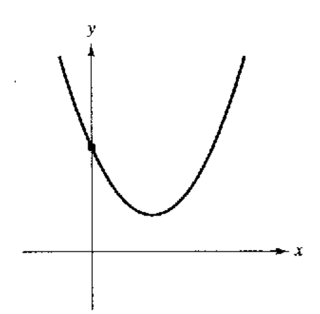
b) Una función de x.



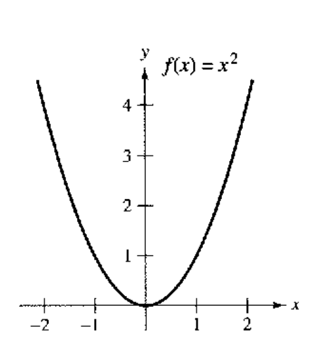
c) Una función de x.

Figura P.26

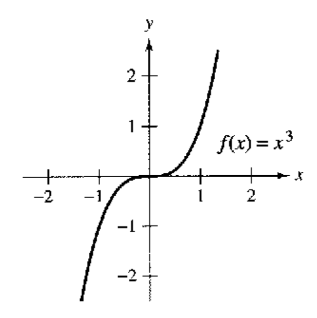
En la figura P.27 se muestran las gráficas de ocho funciones básicas, las cuales hay que conocer bien.



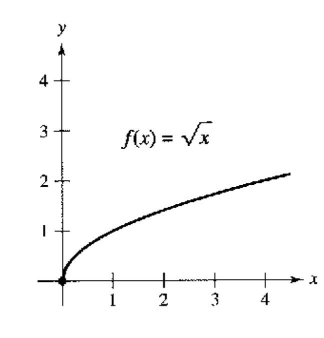
Función identidad



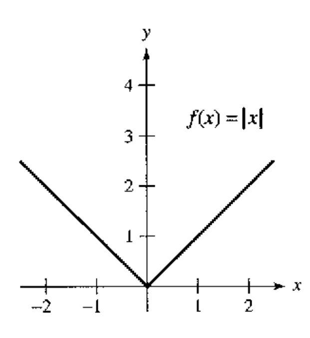
Función cuadrática



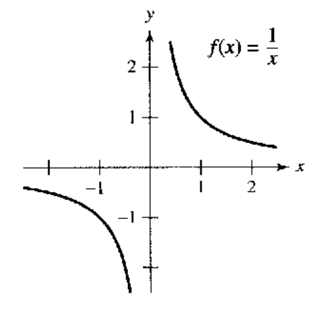
Función cúbica



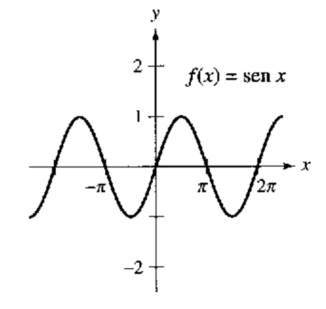
Función raíz cuadrada



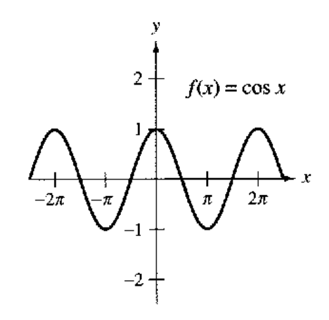
Función valor absoluto



Función racional



Función seno



Función coseno

Gráficas de ocho funciones básicas
Figura P.27

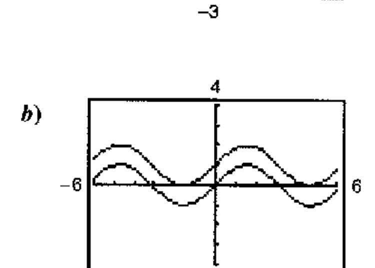
EXPLORACIÓN

Escritura de ecuaciones de funciones Cada una de las pantallas de calculadora gráfica mostradas abajo exhibe la gráfica de una de las ocho funciones básicas de la página anterior. Cada pantalla muestra también una transformación de la gráfica. Describir esta transformación y usar su descripción para escribir la ecuación de la transformación.

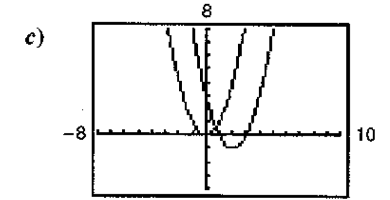
a)

9, −9, 9, −3

b)



c)

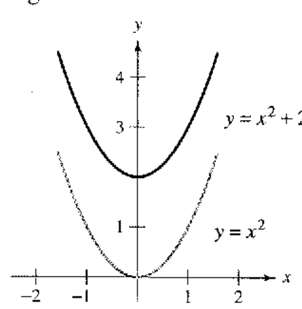


d)

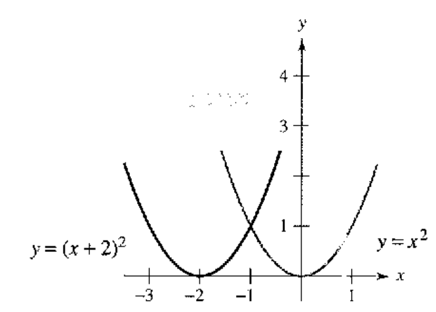
5, −6, 6, −3

Transformaciones de funciones

Algunas familias de gráficas tienen esencialmente la misma forma. Por ejemplo, vamos a comparar la gráfica de $y = x^2$ con las gráficas de las otras cuatro funciones cuadráticas de la figura P.28.

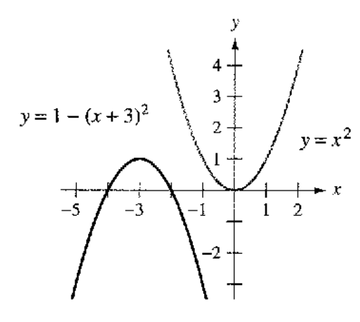


a) Traslación vertical (hacia arriba)



b) Traslación horizontal (a la izquierda)

c) Reflexión



d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Figura P.28

Cada una de las gráficas de la figura P.28 es una **transformación** de la gráfica de $y = x^2$. Los tres tipos básicos de transformaciones ilustrados por estas gráficas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. La notación de funciones es adecuada para describir transformaciones de gráficas en el plano. Por ejemplo si se considera que $f(x) = x^2$ es la función original en la figura P.28, las transformaciones mostradas pueden representarse por medio de las siguientes ecuaciones.

$y = f(x) + 2$	Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.
$y = f(x + 2)$	Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda.
$y = -f(x)$	Reflexión respecto al eje x.
$y = -f(x + 3) + 1$	Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje x y traslación de 1 unidad hacia arriba.

Tipos básicos de transformaciones ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la **derecha**:	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda**:	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades **hacia abajo**:	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades **hacia arriba**:	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$

Clasificaciones y combinaciones de funciones

LEONHARD EULER (1707-1783)
Además de sus contribuciones esenciales a casi todas las ramas de las matemáticas, Euler fue uno de los primeros en aplicar el cálculo a problemas reales de la física. Sus numerosas publicaciones incluyen temas como construcción de barcos, acústica, óptica, astronomía, mecánica y magnetismo.

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quien debemos la notación $y = f(x)$. Hacia finales del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**. Estas funciones se dividen en tres categorías.

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

En el apéndice D se encuentra un repaso de las funciones trigonométricas. El resto de las funciones no algebraicas, como las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponenciales y logarítmicas, se presentan en el capítulo 5.

El tipo más común de función algebraica es una **función polinómica**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

donde el entero positivo n es el **grado** de la función polinómica. Las constantes a_i se denominan **coeficientes**, siendo a_n el **coeficiente dominante** y a_0 el **término constante**. Aunque se suele utilizar subíndices para los coeficientes de las funciones polinómicas en general, para las de grados más bajos se utilizan con frecuencia las siguientes formas más sencillas.

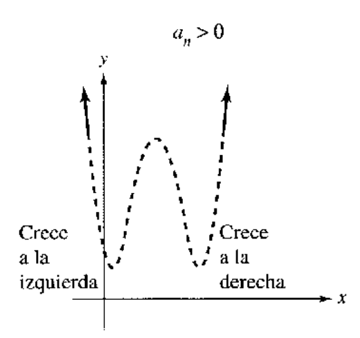
Grado cero:	$f(x) = a$	Función constante.
Grado uno:	$f(x) = ax + b$	Función lineal.
Grado dos:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Función cuadrática.
Grado tres:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Función cúbica.

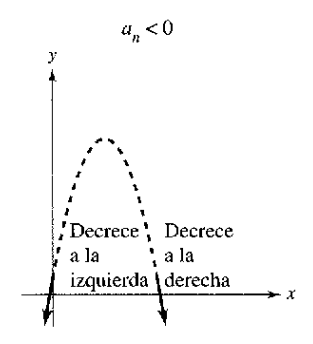
PARA MAYOR INFORMACIÓN
Puede encontrarse más información sobre la historia del concepto de función en el artículo "Evolution of the Function Concept: A Brief Survey", de Israel Kleiner, en *The College Mathematics Journal*.

Aunque la gráfica de una función polinómica no constante puede presentar varias inflexiones en algún momento ascenderá o descenderá sin límite al moverse x hacia la izquierda o hacia la derecha. Se puede determinar qué ocurre en la gráfica de

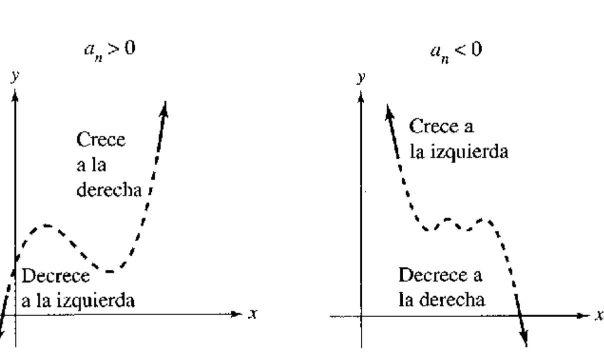
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

a partir del grado de la función (par o impar) y del coeficiente dominante a_n, como se indica en la figura P.29. Observar que las regiones punteadas muestran que la **prueba o el criterio del coeficiente dominante** *sólo* determina el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica.





Gráficas de funciones polinómicas de grado par



Gráficas de funciones polinómicas de grado impar

Prueba del coeficiente dominante para funciones polinómicas
Figura P.29

Del mismo modo que un número racional puede escribirse como el cociente de dos enteros, una **función racional** puede expresarse como el cociente de dos polinomios. De manera específica, una función f es racional si tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

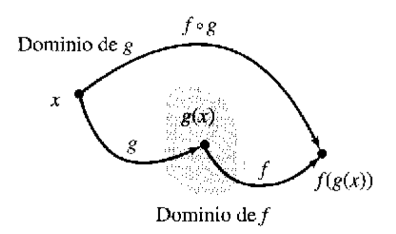
donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Las funciones polinómicas y las racionales son ejemplos de **funciones algebraicas.** Se llama función algebraica de x a aquella que puede expresarse mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces que contengan x^n. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x+1}$ es algebraica. Las funciones no algebraicas se denominan **trascendentes.** Por ejemplo, las funciones trigonométricas son trascendentes.

Es posible combinar dos funciones de varias formas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, se pueden construir las siguientes funciones.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) \qquad \text{Suma.}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) \qquad \text{Diferencia.}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1) \qquad \text{Producto.}$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1} \qquad \text{Cociente.}$$

Aún hay otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición**. La función resultante recibe el nombre de **función compuesta.**



El dominio de la función compuesta $f \circ g$
Figura P.30

> **Definición de función compuesta**
>
> Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función **compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f (ver la figura P.30).

La función compuesta de f con g puede no ser igual a la función compuesta de g con f.

EJEMPLO 4 Composición de funciones

Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \cos x$, encontrar cada una de las funciones compuestas:

a) $f \circ g$ ***b)*** $g \circ f$

Solución

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ — Definición de $f \circ g$.

$= f(\cos x)$ — Sustituir $g(x)$ = $\cos x$.

$= 2(\cos x) - 3$ — Definición de $f(x)$.

$= 2\cos x - 3$ — Simplificar.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ — Definición de $g \circ f$.

$= g(2x - 3)$ — Sustituir $f(x)$ = $2x - 3$.

$= \cos(2x - 3)$ — Definición de $g(x)$.

Observar que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Utilice una calculadora para representar gráficamente cada función. Determinar si la función es *par*, *impar*, o *ninguna* de las dos.

$f(x) = x^2 - x^4$

$g(x) = 2x^3 + 1$

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$j(x) = 2 - x^6 - x^8$

$k(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$

$p(x) = x^9 + 3x^5 - x^3 + x$

Describir una manera de identificar una función como par o impar mediante un análisis visual de la ecuación.

En la sección P.1 se definió la intersección en x de una gráfica como todo punto $(a, 0)$ en el que la gráfica corta al eje x. Si la gráfica representa una función f, el número a es un **cero** de f. En otras palabras, los *ceros de una función f son las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$. Por ejemplo, la función $f(x) = x - 4$ tiene un cero en $x = 4$ porque $f(4) = 0$.

En la sección P.1 también se estudiaron diferentes tipos de simetrías. En la terminología de funciones, se dice que una función es **par** si su gráfica es simétrica respecto al eje y, y se dice que es **impar** si su gráfica es simétrica con respecto al origen. Los criterios de simetría de la sección P.l conducen a la siguiente prueba para las funciones pares e impares.

Prueba para las funciones pares e impares

La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$.
La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

NOTA Con excepción de la función constante por ejemplo $f(x) = 0$, la gráfica de una función de x no puede ser simétrica con respecto al eje x, puesto que entonces violaría la prueba de la recta vertical para la gráfica de una función.

EJEMPLO 5 Funciones pares o impares y ceros de funciones

Determinar si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas. Después, calcular los ceros de la función.

a) $f(x) = x^3 - x$ ***b***) $g(x) = 1 + \cos x$

Solución

a) La función es impar, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Los ceros de f se calculan como sigue.

$$x^3 - x = 0 \qquad \text{Hacer } f(x) = 0.$$
$$x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x = 0, 1, -1 \qquad \text{Ceros de } f.$$

Ver la figura P.31*a*.

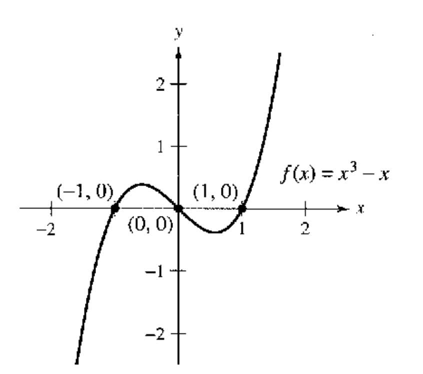
b) La función es par, pues

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x). \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

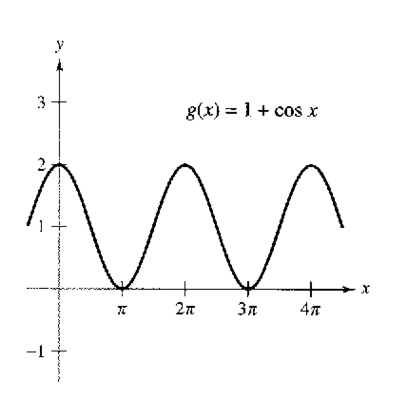
Los ceros de g se calculan como sigue.

$$1 + \cos x = 0 \qquad \text{Hacer } g(x) = 0.$$
$$\cos x = -1 \qquad \text{Restar 1 en ambos miembros.}$$
$$x = (2n + 1)\pi, \text{ con } n \text{ entero} \qquad \text{Ceros de } g.$$

Ver la figura P.31*b*.



a) Función impar



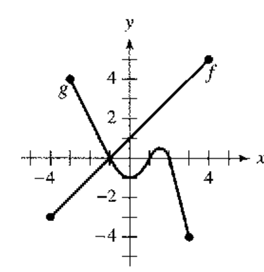
b) Función par
Figura P.31

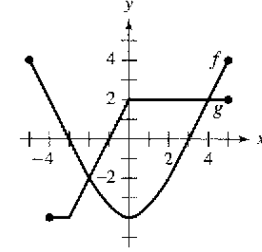
NOTA Cada una de las funciones del ejemplo 5 es par o impar. Sin embargo, muchas funciones, como $f(x) = x^2 + x + 1$ no son pares ni impares.

Ejercicios de la sección P.3

En los ejercicios 1 y 2, utilizar las gráficas de *f* y *g* para realizar lo siguiente:

a) **Identificar los dominios y los recorridos o rangos de *f* y *g*.**
b) **Identificar $f(-2)$ y $g(3)$.**
c) **¿Para qué valor(es) de x es $f(x) = g(x)$?**
d) **Calcular la(s) solución(es) de $f(x) = 2$.**
e) **Calcular las soluciones de $g(x) = 0$.**

1. 

2. 

En los ejercicios 3 a 12, evaluar (si es posible) la función en los valores dados de la variable independiente. Simplificar los resultados.

3. $f(x) = 2x - 3$
a) $f(0)$
b) $f(-3)$
c) $f(b)$
d) $f(x-1)$

4. $f(x) = \sqrt{x+3}$
a) $f(-2)$
b) $f(6)$
c) $f(-5)$
d) $f(x + \Delta x)$

5. $g(x) = 3 - x^2$
a) $g(0)$
b) $g(\sqrt{3})$
c) $g(-2)$
d) $g(t-1)$

6. $g(x) = x^2(x-4)$
a) $g(4)$
b) $g(\frac{3}{2})$
c) $g(c)$
d) $g(t+4)$

7. $f(x) = \cos 2x$
a) $f(0)$
b) $f(-\pi/4)$
c) $f(\pi/3)$

8. $f(x) = \operatorname{sen} x$
a) $f(\pi)$
b) $f(5\pi/4)$
c) $f(2\pi/3)$

9. $f(x) = x^3$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

10. $f(x) = 3x - 1$
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

12. $f(x) = x^3 - x$
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

En los ejercicios 13 a 18, encontrar el dominio y el recorrido o rango de la función.

13. $h(x) = -\sqrt{x+3}$

14. $g(x) = x^2 - 5$

15. $f(t) = \sec \dfrac{\pi t}{4}$

16. $h(t) = \cot t$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

18. $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

En los ejercicios 19 a 24, encontrar el dominio de la función.

19. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

21. $g(x) = \dfrac{2}{1 - \cos x}$

22. $h(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{|x+3|}$

24. $g(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 4|}$

En los ejercicios 25 a 28, evaluar la función como se indica. Determinar su dominio y su recorrido o rango.

25. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(-1)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(2)$ *d)* $f(t^2 + 1)$

26. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$

a) $f(-2)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(1)$ *d)* $f(s^2 + 2)$

27. $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 1 \\ -x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

a) $f(-3)$ *b)* $f(1)$ *c)* $f(3)$ *d)* $f(b^2 + 1)$

28. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x \leq 5 \\ (x-5)^2, & x > 5 \end{cases}$

a) $f(-3)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(5)$ *d)* $f(10)$

En los ejercicios 29 a 36, trazar la gráfica de la función y encontrar su dominio y su recorrido o rango. Utilizar una calculadora gráfica para comprobar las gráficas.

29. $f(x) = 4 - x$

30. $g(x) = \dfrac{4}{x}$

31. $h(x) = \sqrt{x-1}$

32. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$

33. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

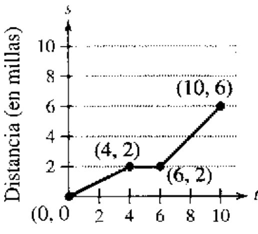
34. $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

35. $g(t) = 2 \operatorname{sen} \pi t$

36. $h(\theta) = -5 \cos \dfrac{\theta}{2}$

Desarrollo de conceptos

37. En la figura se muestra la gráfica de la distancia que recorre un estudiante en su camino de 10 minutos a la escuela. Dar una descripción verbal de las características del recorrido del estudiante hacia la escuela.

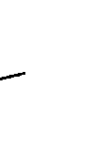


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

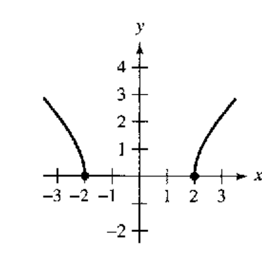
38. Tras unos minutos de recorrido, un estudiante que conduce 27 millas para ir a la universidad recuerda que olvidó en casa el trabajo que tiene que entregar ese día. Conducido a mayor velocidad de la que acostumbra, regresa a casa, recoge su trabajo y reemprende su camino a la universidad. Construir la posible gráfica de la distancia de la casa del estudiante como función del tiempo.

En los ejercicios 39 a 42, aplicar la prueba de la recta vertical para determinar si *y* es una función de *x*.

39. $x - y^2 = 0$

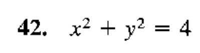


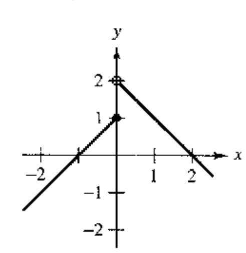
40. $\sqrt{x^2 - 4} - y = 0$

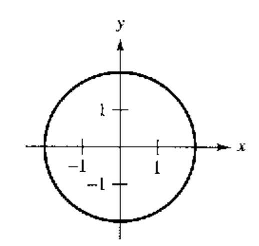


41. $y = \begin{cases} x + 1, & x \le 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$

42. $x^2 + y^2 = 4$







En los ejercicios 43 a 46, determinar si *y* es una función de *x*.

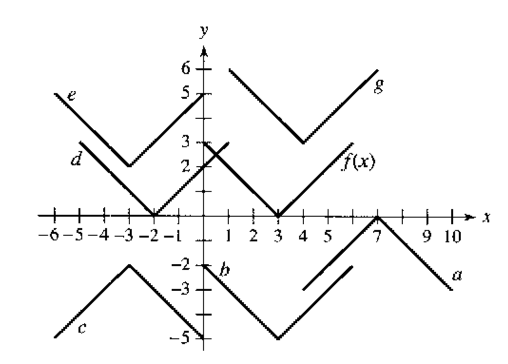
43. $x^2 + y^2 = 4$

44. $x^2 + y = 4$

45. $y^2 = x^2 - 1$

46. $x^2y - x^2 + 4y = 0$

En los ejercicios 47 a 52, utilizar la gráfica de $y = f(x)$ para relacionar la función con su gráfica.



47. $y = f(x + 5)$

48. $y = f(x) - 5$

49. $y = -f(-x) - 2$

50. $y = -f(x - 4)$

51. $y = f(x + 6) + 2$

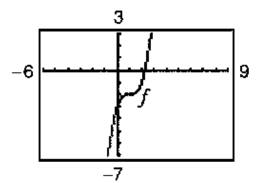
52. $y = f(x - 1) + 3$

53. Utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura para dibujar la gráfica de cada función.

a) $f(x + 3)$ *b*) $f(x - 1)$

c) $f(x) + 2$ *d*) $f(x) - 4$

e) $3f(x)$ *f*) $\frac{1}{4}f(x)$

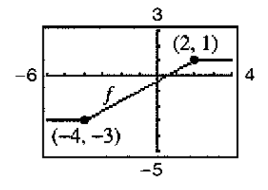


54. Utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura para dibujar la gráfica de cada función.

a) $f(x - 4)$ *b*) $f(x + 2)$

c) $f(x) + 4$ *d*) $f(x) - 1$

e) $2f(x)$ *f*) $\frac{1}{2}f(x)$



55. Utilizar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para dibujar la gráfica de cada ecuación. En todos los casos, describa la transformación.

a) $y = \sqrt{x} + 2$ *d*) $y = -\sqrt{x}$ *c*) $y = \sqrt{x - 2}$

56. Especificar una secuencia de transformaciones que tenga como resultado cada gráfica de h a partir de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) $h(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ *b*) $h(x) = -\operatorname{sen}(x - 1)$

57. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, evaluar cada expresión.

a) $f(g(1))$ *b*) $g(f(1))$ *c*) $g(f(0))$

d) $f(g(-4))$ *e*) $f(g(x))$ *f*) $g(f(x))$

58. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \pi x$, evaluar cada expresión.

a) $f(g(2))$ *b*) $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *c*) $g(f(0))$

d) $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *e*) $f(g(x))$ *f*) $g(f(x))$

En los ejercicios 59 a 62, encontrar las funciones compuestas $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$. ¿Cuál es el dominio de cada función compuesta? ¿Son iguales ambas funciones compuestas?

59. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

60. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \cos x$

61. $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = x^2 - 1$

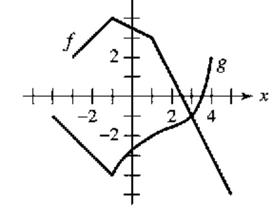
62. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$

63. Utilizar las gráficas de f y de g para evaluar cada expresión. Si el resultado es indefinido, explicar por qué.

a) $(f \circ g)(3)$ *b*) $g(f(2))$

c) $g(f(5))$ *d*) $(f \circ g)(-3)$

e) $(g \circ f)(-1)$ *f*) $f(g(-1))$



64. *Ondas* Se deja caer un guijarro en un estanque tranquilo, provocando ondas en forma de círculos concéntricos. El radio (en pies) de la onda exterior está dado por $r(t) = 0.6t$, donde t es el tiempo, en segundos, transcurrido desde que el guijarro golpea el agua. El área del círculo está dada por la función $A(r) = \pi r^2$. Calcular e interpretar $(A \circ r)(t)$.

Para pensar **En los ejercicios 65 y 66, $F(x) = f \circ g \circ h$. Identificar las funciones para f, g y h. (Existen muchas respuestas correctas).**

65. $F(x) = \sqrt{2x - x^2}$ **66.** $F(x) = -4 \operatorname{sen}(1 - x)$

En los ejercicios 67 a 70, determinar si la función es par, impar o ninguna de las dos. Utilizar una calculadora gráfica para verificar su resultado.

67. $f(x) = x^2(4 - x^2)$ **68.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

69. $f(x) = x \cos x$ **70.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Para pensar **En los ejercicios 71 y 72, encontrar las coordenadas de un segundo punto de la gráfica de una función f, si el punto dado forma parte de la gráfica y la función es: *a*) par, y *b*) impar.**

71. $(-\frac{3}{2}, 4)$ **72.** $(4, 9)$

73. En la figura se muestran las gráficas de f, g y h. Determinar si cada función es par, impar o ninguna de las dos.

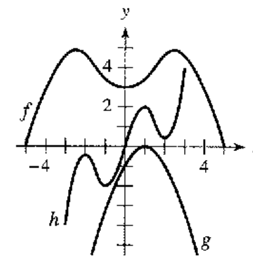


Figura para 73

Figura para 74

74. El dominio de la función f que se muestra en la figura es $-6 \leq x \leq 6$.

a) Completar la gráfica de f dado que f es par.

b) Completar la gráfica de f dado que f es impar.

Escritura de funciones **En los ejercicios 75 a 78, escribir la ecuación para una función que tiene la gráfica dada.**

75. Segmento de recta que une $(-4, 3)$ y $(0, -5)$

76. Segmento de recta que une $(1, 2)$ y $(5, 5)$

77. La mitad inferior de la parábola $x + y^2 = 0$

78. La mitad inferior del círculo $x^2 + y^2 = 4$

Modelo matemático **En los ejercicios 79 a 82, relacionar los datos con una de las siguientes funciones:**

i) $f(x) = cx$ *ii*) $g(x) = cx^2$

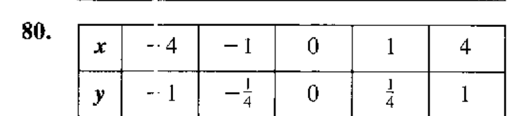
iii) $h(x) = c\sqrt{|x|}$ *iv*) $r(x) = c/x$

Determinar el valor de la constante c en cada función, de manera que la función se ajuste a los datos que se muestran en cada tabla.

79.

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

80.



x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

81.

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	Indef.	32	8

82.

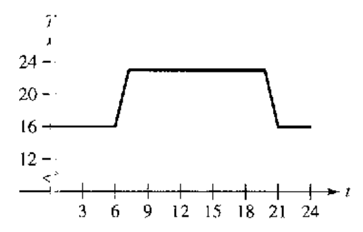
x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

83. *Razonamiento gráfico* Un termostato controlado de manera electrónica está programado para reducir la temperatura automáticamente durante la noche (ver la figura). La temperatura T, en grados Celsius, está dada en términos de t, el tiempo en horas de un reloj de 24 horas.

a) Calcular $T(4)$ y $T(15)$

b) Si el termostato se reprograma para producir una temperatura $H(t) = T(t - 1)$, ¿qué cambios habrá en la temperatura? Explicar.

c) Si el termostato se reprograma para producir una temperatura $H(t) = T(t) - 1$, ¿qué cambios habrá en la temperatura? Explicar.

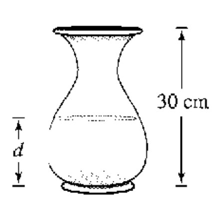


84. El agua fluye a una vasija de 30 centímetros de altura a velocidad constante, llenándola en 5 segundos. Utilizar esta información y la forma de la vasija que se muestra en la figura para responder a las siguientes preguntas, si d es la profundidad del agua en centímetros y t es el tiempo en segundos.

a) Explicar por qué d es una función de t.

b) Determinar el dominio y el recorrido o rango de dicha función.

c) Trace una posible gráfica de la función.



85. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestra el número promedio de acres por granja en Estados Unidos para selección de años. (*Fuente: U.S. Department of Agriculture.*)

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Superficie en acres	213	297	374	426	460	434

a) Representar gráficamente los datos, donde A es la superficie en acres y t es el tiempo en años, donde $t = 0$ corresponde a 1950. Trazar a mano una curva que aproxime los datos.

b) Utilizar la curva del inciso *a*) para calcular $A(15)$

86. ***Aerodinámica automotriz*** La potencia H, en caballos de fuerza, que requiere cierto automóvil para vencer la resistencia del viento viene dada aproximadamente por

$H(x) = 0.002x^2 + 0.005x - 0.029,\ 10 \le x \le 100$

donde x es la velocidad del automóvil en millas por hora.

a) Representar gráficamente H con una calculadora gráfica.

b) Reescribir la función de potencia de tal modo que x represente la velocidad en kilómetros por hora. [Encontrar $H(x/1.6)$.]

87. ***Para pensar*** Escribir la función

$f(x) = |x| + |x - 2|$

sin utilizar los signos de valor absoluto (ver un repaso del valor absoluto en el apéndice D).

88. ***Desarrollo*** Utilizar una calculadora para representar gráficamente las funciones polinómicas $p_1(x) = x^3 - x + 1$ y $p_2(x) = x^3 - x$. ¿Cuántos ceros tiene cada una de estas funciones? ¿Existe algún polinomio cúbico que no tenga ceros? Explicar su respuesta.

89. Demostrar que la siguiente función es impar.

$f(x) = a_{2n-1}x^{2n+1} + \cdots + a_3x^3 + a_1x$

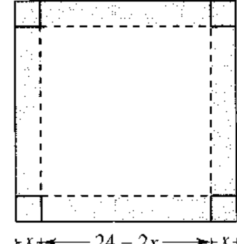
90. Demostrar que la siguiente función es par.

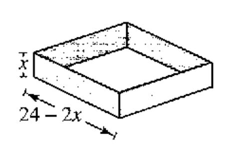
$f(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$

91. Demostrar que el producto de dos funciones pares (o impares) es una función par.

92. Demostrar que el producto de una función impar y una par es una función impar.

93. ***Volumen*** Se va a construir una caja de material abierta (sin tapa) de volumen máximo con una pieza cuadrada de 24 centímetros de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados hacia arriba (ver la figura).





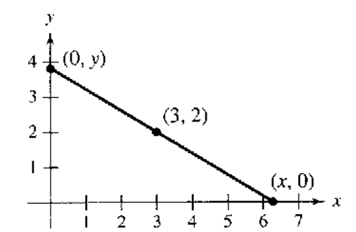
a) Expresar el volumen V como función de x, que es la longitud de las esquinas cuadradas. ¿Cuál es el dominio de la función?

b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función volumen y aproximar las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo.

c) Utilizar la función *tabla* de la calculadora para verificar su respuesta del apartado *b*). (Se muestran los dos primeros renglones de la tabla.)

Altura, x	**Longitud y anchura**	**Volumen, V**
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

94. ***Longitud*** Una recta que pasa por el punto (3, 2) forma con los ejes x y y un triángulo rectángulo en el primer cuadrante (ver la figura). Expresar la longitud L de la hipotenusa como función de x.



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 98, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

95. Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

96. Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función una vez como máximo.

97. Si $f(x) = f(-x)$ para todo x perteneciente al dominio de f, entonces la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y.

98. Si f es una función, entonces $f(ax) = af(x)$.

Preparación del examen Putnam*

99. Sea R la región constituida por los puntos (x, y) del plano cartesiano que satisfacen tanto $|x| - |y| \le 1$ como $|y| \le 1$. Trazar la región R y calcular su área.

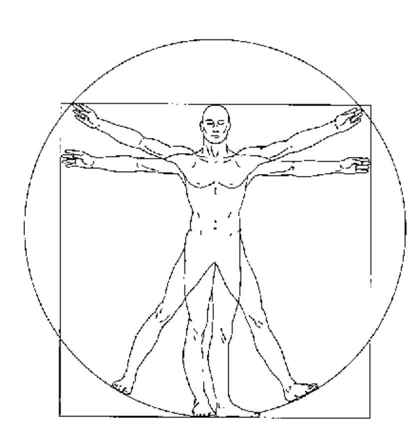
100. Considerar un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales que tienen la propiedad $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo polinomio $g(x)$ con coeficientes reales. Determinar y demostrar la naturaleza de $f(x)$.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition.

* La William Lowell Putnam Mathematical Competition (Concurso de Matemáticas William Lowell Putnam) es un concurso anual para estudiantes universitarios de Estados Unidos y Canadá, establecido en 1938.

Sección P.4 Ajuste de modelos a colecciones de datos

- **Ajuste de un modelo lineal.**
- **Ajuste de un modelo cuadrático.**
- **Ajuste de un modelo trigonométrico.**



Dibujo realizado con computadora, basado en la ilustración a tinta del famoso estudio de Leonardo da Vinci sobre las proporciones humanas, titulado *El hombre de Vitruvio*.

Ajuste de un modelo lineal a los datos

Una de las premisas básicas de la ciencia es que gran parte de la realidad física puede describirse matemáticamente y que muchos de los fenómenos físicos son predecibles. Esta perspectiva constituyó parte de la revolución científica que tuvo lugar en Europa a finales del siglo XV. Dos de las primeras publicaciones ligadas a esta revolución fueron *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*, del astrónomo polaco Nicolaus Copernicus, y *On the Structure of the Human Body*, del anatomista belga Andreas Vesalius. Publicados ambos en 1543, rompían con la tradición al sugerir el uso de un método científico en lugar de la confianza ciega en la autoridad.

Una técnica fundamental de las ciencias modernas consiste en recopilar datos y luego describirlos por medio de un modelo matemático. Por ejemplo, los datos del ejemplo 1 están inspirados en el famoso dibujo de Leonardo da Vinci que indica que la altura de una persona y su envergadura son iguales.

EJEMPLO 1 Ajuste de un modelo lineal a los datos

Un grupo de 28 alumnos recopiló los siguientes datos, que representan sus estaturas x y sus alcances con los brazos extendidos y (redondeadas a la pulgada más cercana):

(60, 61), (65, 65), (68, 67), (72, 73), (61, 62), (63, 63), (70, 71),
(75, 74), (71, 72), (62, 60), (65, 65), (66, 68), (62, 62), (72, 73),
(70, 70), (69, 68), (69, 70), (60, 61), (63, 63), (64, 64), (71, 71),
(68, 67), (69, 70), (70, 72), (65, 65), (64, 63), (71, 70), (67, 67).

Encontrar un modelo lineal que represente estos datos.

Solución Existen varias maneras de representar estos datos mediante una ecuación. La más sencilla sería observar que x y y son casi iguales y tomar como modelo $y = x$. Un análisis más cuidadoso consistiría en recurrir a un procedimiento de la estadística denominado regresión lineal. (Procedimiento que se estudiará en la sección 13.9.) La recta de regresión de mínimos cuadrados para estos datos es

$$y = 1.006x - 0.23.$$ Recta de regresión de mínimos cuadrados.

Datos y su modelo lineal
Figura P.32

En la figura P.32 se muestra la gráfica del modelo y los datos. A partir de este modelo, se puede observar que la envergadura de una persona tiende a ser aproximadamente igual a su estatura.

TECNOLOGÍA Muchas calculadoras tienen incorporados programas de regresión de mínimos cuadrados. Por lo general, se introducen los datos y después se ejecuta el programa. El programa suele mostrar como resultado la pendiente y la intersección en y de la recta que mejor se ajusta a los datos y el *coeficiente de correlación* r. El coeficiente de correlación mide cuan bien se ajusta el modelo a los datos. Cuanto más próximo a 1 es $|r|$, mejor es el ajuste. Por ejemplo, el coeficiente de correlación para el modelo descrito en el ejemplo 1 es $r \approx 0.97$, lo que indica que el modelo se ajusta bien a los datos. Si el valor de r es positivo, las variables tienen una correlación positiva, como ocurre en el ejemplo 1. Si el valor de r es negativo, las variables tienen una correlación negativa.

Ajuste de un modelo cuadrático a los datos

Una función que define la altura s de un objeto al caer en términos del tiempo t se llama función de posición. Si no se considera la fricción del aire, la posición de un objeto que cae admite el modelo

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

donde g denota la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y s_0 la altura inicial. El valor de g depende de dónde se deja caer el objeto. En la Tierra, g vale -32 pies/s^2, o -9.8 m/s^2.

Para descubrir el valor de g experimental, se pueden registrar en varios instantes las alturas de un objeto cayendo, como se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Ajuste de un modelo cuadrático a los datos

Se deja caer un balón de basquetbol desde una altura de $5\frac{1}{4}$ pies. Se mide la altura del balón 23 veces, a intervalos de aproximadamente 0.02 s.* Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tiempo	0.0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.099996
Altura	5.23594	5.20353	5.16031	5.0991	5.02707	4.95146

Tiempo	0.119996	0.139992	0.159988	0.179988	0.199984	0.219984
Altura	4.85062	4.74979	4.63096	4.50132	4.35728	4.19523

Tiempo	0.23998	0.25993	0.27998	0.299976	0.319972	0.339961
Altura	4.02958	3.84593	3.65507	3.44981	3.23375	3.01048

Tiempo	0.359961	0.379951	0.399941	0.419941	0.439941
Altura	2.76921	2.52074	2.25786	1.98058	1.63488

Encontrar un modelo que se ajuste a estos datos y utilizarlo para pronosticar el instante en el que el balón golpeará el suelo.

Solución Comenzar dibujando la nube de puntos o diagrama de dispersión que representa los datos, como se muestra en la figura P.33. En la nube de puntos o diagrama de dispersión se observa que los datos no parecen seguir un modelo lineal. Por el contrario, parece que pueden obedecer a un modelo cuadrático. Para comprobarlo, introducir los datos en una calculadora con un programa para regresiones cuadráticas. Se debe obtener el modelo

$$s = -15.45t^2 - 1.30t + 5.234. \qquad \text{Parábola de regresión de mínimos cuadrados.}$$

Representación gráfica de los datos
Figura P.33

Con ayuda de este modelo, se puede pronosticar en qué instante el balón golpea el suelo, sustituyendo s por 0 y despejando t de la ecuación resultante.

$$0 = -15.45t^2 - 1.30t + 5.234 \qquad \text{Hacer } s = 0.$$

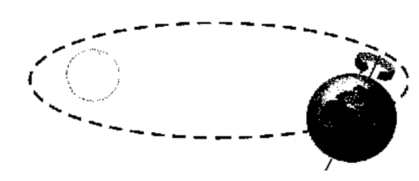
$$t = \frac{1.30 \pm \sqrt{(-1.30)^2 - 4(-15.45)(5.234)}}{2(-15.45)} \qquad \text{Fórmula cuadrática.}$$

$$t \approx 0.54 \qquad \text{Escoger la solución positiva.}$$

La solución aproximada es 0.54 s. En otras palabras, el balón continuará cayendo durante 0.1 s más antes de tocar el suelo.

* *Datos recabados con un Texas Instruments CBL (Calculator-Based Laboratory) System.*

Ajuste de un modelo trigonométrico a los datos



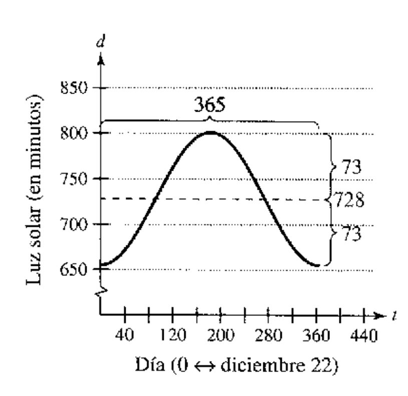
El plano de la órbita terrestre alrededor del Sol y el eje de rotación de la Tierra no son perpendiculares. Por el contrario, este último está inclinado con respecto a su órbita. En consecuencia, la cantidad de luz diurna que reciben los distintos lugares de la Tierra varía de acuerdo con la época del año; en otras palabras, varía con la posición de la Tierra en su órbita.

¿Qué es elaborar modelos matemáticos? Ésta es una de las preguntas que se plantean en la obra *Guide to Mathematical Modelling*. A continuación se transcribe parte de la respuesta.*

1. Elaborar modelos matemáticos consiste en aplicar las habilidades matemáticas para obtener respuestas útiles a problemas reales.
2. Aprender a aplicar las capacidades matemáticas es muy distinto del aprendizaje de las propias matemáticas.
3. Se utilizan modelos en una gran variedad de aplicaciones, algunas de las cuales parecen, en principio, carecer de naturaleza matemática.
4. Con frecuencia, los modelos permiten una evaluación rápida y económica de las alternativas, lo que conduce hacia soluciones óptimas que de otra manera no resultarían obvias.
5. En la elaboración de modelos matemáticos, no existen reglas precisas ni respuestas "correctas".
6. La elaboración de modelos matemáticos sólo se puede aprender *haciéndola.*

EJEMPLO 3 Ajuste de un modelo trigonométrico a los datos

En la Tierra, el número de horas de luz solar depende de la latitud y la época del año. Los minutos de luz solar diarios en una latitud de 20 grados norte durante los días más largo y más corto del año fueron: 801 minutos el 21 de junio y 655 minutos el 22 de diciembre. Utilizar estos datos para elaborar un modelo correspondiente a la cantidad de luz solar d (en minutos) para cada día del año en un lugar ubicado a 20 grados de latitud norte. ¿Cómo podríamos verificar la exactitud del modelo?



Gráfica del modelo
Figura P.34

Solución Ésta es una manera de elegir cómo elaborar un modelo. Se puede establecer la hipótesis de que el modelo es una función seno con un periodo de 365 días. Utilizando los datos, se puede concluir que la amplitud de la gráfica es $(801 - 655)/2$, o sea, 73. De tal modo, un posible modelo es

$$d = 728 - 73 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365} + \frac{\pi}{2}\right).$$

En este modelo, t representa el número del día del año, donde $t = 0$ corresponde al 22 de diciembre. En la figura P.34 se muestra una gráfica de este modelo. Para verificar la exactitud del modelo, se consulta en un almanaque el número de minutos de luz diurna en diferentes días del año en una latitud de 20° norte.

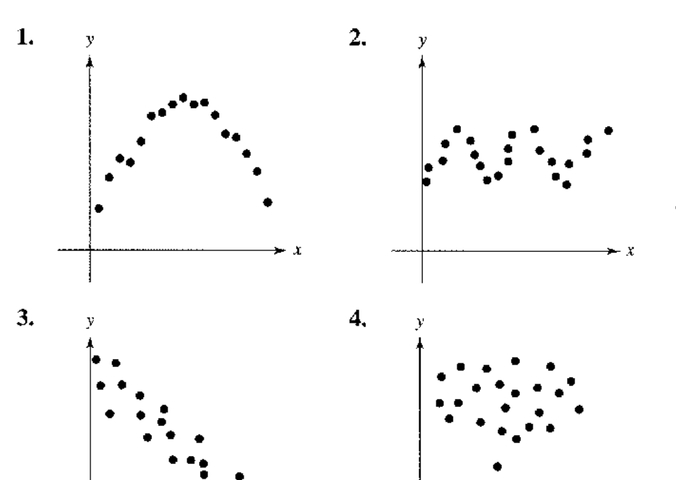
Fecha	*Valor de t*	*Horas de luz reales*	*Horas de luz que pronostica el modelo*
Dic 22	0	655 min.	655 min.
Ene 1	10	657 min.	656 min.
Feb 1	41	676 min.	672 min.
Mar 1	69	705 min.	701 min.
Abr 1	100	740 min.	739 min.
May 1	130	772 min.	773 min.
Jun 1	161	796 min.	796 min.
Jun 21	181	801 min.	801 min.
Jul 1	191	799 min.	800 min.
Ago 1	222	782 min.	785 min.
Sep 1	253	752 min.	754 min.
Oct 1	283	718 min.	716 min.
Nov 1	314	685 min.	681 min.
Dic 1	344	661 min.	660 min.

Como se puede observar, el modelo es bastante preciso.

* *Texto tomado de* Guide to Mathematical Modelling, *de Dilwyn Edwards y Mike Hamson (Boca Raton: CRC Press, 1990). Utilizado con autorización de los autores.*

Ejercicios de la sección P.4

En los ejercicios 1 a 4 se proporciona una gráfica de puntos. Determinar si los datos pueden modelarse por medio de una función lineal, cuadrática o trigonométrica, o si no parece existir relación entre x y y.



5. ***Cancerígenos*** Los siguientes pares ordenados representan el índice de exposición a una sustancia cancerígena x y la mortalidad por cáncer y por cada 100 000 personas de una población.

   (3.50, 150.1), (3.58, 133.1), (4.42, 132.9),
   (2.26, 116.7), (2.63, 140.7), (4.85, 165.5),
   (12.65, 210.7), (7.42, 181.0), (9.35, 213.4)

   a) Hacer la gráfica de los datos. A la vista de esta representación, ¿parece que los datos siguen un modelo aproximadamente lineal?
   b) Descubrir de manera visual un modelo lineal para los datos y representarlo gráficamente.
   c) Utilizar el modelo para calcular el valor aproximado de y si $x = 3$.

6. ***Calificaciones en cuestionarios*** Los siguientes pares ordenados son las calificaciones de dos cuestionarios consecutivos de 15 puntos aplicados a una clase de 18 alumnos.

   (7, 13), (9, 7), (14, 14), (15, 15), (10, 15), (9, 7),
   (14, 11), (14, 15), (8, 10), (15, 9), (10, 11), (9, 10),
   (11, 14), (7, 14), (11, 10), (14, 11), (10, 15), (9, 6)

   a) Representar gráficamente los datos. A la vista de esta gráfica, ¿parece que la relación entre calificaciones consecutivas sea aproximadamente lineal?
   b) Si los datos parecen aproximadamente lineales, construir un modelo lineal para ellos. Si no, encontrar alguna posible explicación.

7. ***Ley de Hooke*** La ley de Hooke establece que la fuerza F necesaria para comprimir o estirar un resorte (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la variación de longitud d que experimenta. Esto es, $F = kd$, donde k es una medida de la resistencia del resorte a la deformación y se denomina *constante elástica*. La siguiente tabla muestra el alargamiento d, en centímetros, de un resorte cuando se le aplica una fuerza de F newtons.

F	20	40	60	80	100
d	1.4	2.5	4.0	5.3	6.6

   a) Encontrar la función de regresión en la calculadora, usando un modelo lineal para los datos.
   b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo. ¿Qué tanto se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.
   c) Utilizar el modelo para estimar el alargamiento del resorte cuando se le aplica una fuerza de 55 newtons.

8. ***Objeto en caída*** En un experimento, unos estudiantes midieron la velocidad s (en metros por segundo) de un objeto en caída, t segundos después de dejarlo caer. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
s	0	11.0	19.4	29.2	39.4

   a) Usando la función de regresión en la calculadora, encontrar un modelo lineal para los datos.
   b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo. ¿De qué manera se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.
   c) Utilice el modelo para estimar la velocidad del objeto transcurridos 2.5 segundos.

9. ***Consumo de energía y producto interno bruto**** Los siguientes datos muestran el consumo de electricidad *per capita* (en millones de Btu) y el producto interno bruto *per capita* (en miles de dólares) durante el año 2000, correspondientes a varios países. (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

Argentina	(73, 12.05)	Bangladesh	(4, 1.59)
Chile	(68, 9.1)	Egipto	(32, 3.67)
Grecia	(126, 16.86)	Hong Kong	(118, 25.59)
Hungría	(105, 11.99)	India	(13, 2.34)
México	(63, 8.79)	Polonia	(95, 9)
Portugal	(108, 16.99)	Corea del Sur	(167, 17.3)
España	(137, 19.26)	Turquía	(47, 7.03)
Reino Unido	(166, 23.55)	Venezuela	(113, 5.74)

   a) Usando la función de regresión en la calculadora, encontrar un modelo lineal para los datos. ¿Cuál es el coeficiente de correlación?
   b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.
   c) Interpretar la gráfica del apartado *b*). Utilizar la gráfica para identificar los tres países que más se separan del modelo lineal.
   d) Borrar los datos correspondientes a los tres países identificados en el apartado *c*). Ajustar un modelo lineal para el resto de los datos y encontrar su coeficiente de correlación.

*En España se le denomina producto interior bruto.

10. ***Dureza de Brinell*** Los datos de la tabla muestran la dureza de Brinell H del acero al carbón del 0.35 cuando se endurece y templa a temperatura t (en grados Fahrenheit). (*Fuente: Standard Handbook for Mechanical Engineers.*)

t	200	400	600	800	1 000	1 200
H	534	495	415	352	269	217

a) Utilizar las funciones de regresión lineal de su calculadora para encontrar un modelo lineal para los datos.
b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo. ¿Qué tanto se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.
c) Utilizar el modelo para estimar la dureza cuando $t = 500°$ F.

11. ***Costos de automóviles*** Los datos de la tabla muestran los gastos variables de operación de un automóvil en Estados Unidos durante varios años. Las funciones y_1, y_2 y y_3 representan los gastos, en centavos por milla, de gasolina y aceite, mantenimiento y neumáticos, respectivamente. (*Fuente: American Automobile Manufacturers Association.*)

Año	y_1	y_2	y_3
0	5.40	2.10	0.90
1	6.70	2.20	0.90
2	6.00	2.20	0.90
3	6.00	2.40	0.90
4	5.60	2.50	1.10
5	6.00	2.60	1.40
6	5.90	2.80	1.40
7	6.60	2.80	1.40

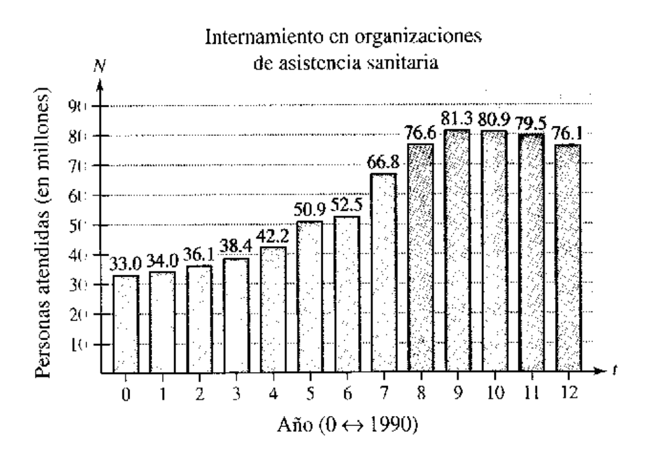
a) Utilizar las funciones de regresión de la calculadora para encontrar un modelo cuadrático para y_1, y modelos lineales para y_2 y y_3.
b) Utilizar la calculadora para hacer la gráfica y_1, y_2, y_3 y $y_1 + y_2 + y_3$ en la misma ventana. Utilizar el modelo para estimar el costo total variable por milla durante el año 12.

12. ***Resistencia de una viga*** Los estudiantes de un laboratorio midieron la fuerza de ruptura S (en libras) de una pieza de madera de 2 pulgadas de espesor, con x de altura y 12 de longitud. Los resultados quedan registrados en la siguiente tabla.

x	4	6	8	10	12
S	2 370	5 460	10 310	16 250	23 860

a) Utilizar una calculadora para ajustar un modelo cuadrático a los datos.
b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.
c) Utilizar el modelo para estimar la fuerza de ruptura cuando $x = 2$.

13. ***Organizaciones de asistencia sanitaria*** La siguiente gráfica de barras muestra el número de personas N (en millones) que recibieron atención en organizaciones de asistencia sanitaria de 1990 a 2002. (*Fuente: Centers for Disease Control.*)



a) Sea t el tiempo en años, $t = 0$ corresponde a 1990. Utilizar las funciones de regresión de una calculadora para encontrar los modelos lineal y cúbico para los datos.
b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente los datos y los modelos lineal y cúbico.
c) Utilizar la gráfica anterior para determinar qué modelo es mejor.
d) Utilizar una calculadora para encontrar la gráfica del modelo cuadrático de los datos.
e) Utilizar los modelos lineal y cúbico para estimar el número de personas que recibieron atención en las organizaciones de asistencia sanitaria durante 2004.
f) Utilizar una calculadora para encontrar otros modelos para los datos. ¿Qué modelos se considera que representan mejor los datos? Explicar la respuesta.

14. ***Desempeño de un automóvil*** La siguiente tabla muestra el tiempo t (en segundos) que necesita un automóvil deportivo de lujo para alcanzar una velocidad de s millas por hora partiendo del reposo. (*Fuente: Road & Track.*)

s	30	40	50	60	70	80	90
t	3.4	5.0	7.0	9.3	12.0	15.8	20.0

a) Utilizar las funciones de regresión de la calculadora para encontrar un modelo cuadrático para los datos.
b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.
c) Utilizar la gráfica del apartado *b*) para establecer por qué el modelo no es apropiado para determinar el tiempo necesario para alcanzar velocidades inferiores a 20 millas por hora.
d) Puesto que en las pruebas se partía del reposo, agregar el punto (0, 0) a los datos. Ajustar y representar gráficamente un modelo cuadrático a los nuevos datos.
e) El modelo cuadrático, ¿modela con mayor precisión el comportamiento del automóvil a bajas velocidades? Explicar la respuesta.

15. ***Desempeño de un automóvil*** Se acopla un dinamómetro a un motor de automóvil V8 y se mide su potencia en caballos y a diferentes velocidades (en miles de revoluciones por minuto). En la siguiente tabla se muestran los resultados.

x	1	2	3	4	5	6
y	40	85	140	200	225	245

a) Utilizar las funciones de cálculo de regresión de una calculadora para encontrar el modelo cúbico para los datos.
b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.
c) Utilizar el modelo para estimar la potencia cuando el motor gira a 4 500 revoluciones por minuto.

16. ***Temperatura de ebullición*** La siguiente tabla muestra la temperatura de ebullición del agua T (°F) a diferentes presiones p (en libras/pulg²). (*Fuente: Standard Handbook for Mechanical Engineers.*)

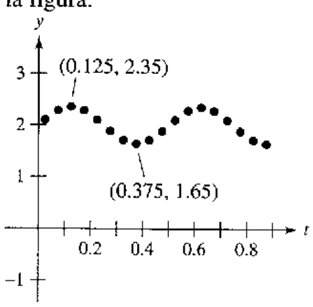
p	5	10	14.696 (1 atmósfera)	20
T	162.24°	193.21°	212.00°	227.96°

p	30	40	60	80	100
T	250.33°	267.25°	292.71°	312.03°	327.81°

a) Utilizar las funciones de regresión de una calculadora para encontrar un modelo cúbico para los datos.
b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.
c) Utilizar la gráfica para calcular la presión necesaria para que el punto de ebullición del agua exceda los 300° F.
d) Explicar por qué el modelo no sería adecuado para presiones superiores a 100 libras por pulgada al cuadrado.

17. ***Movimiento armónico*** Un detector de movimiento mide el desplazamiento oscilatorio de un peso suspendido de un resorte. En la figura se muestran los datos recabados y los desplazamientos máximos (positivo y negativo) aproximados a partir del punto de equilibrio. El desplazamiento y se mide en centímetros y el tiempo t en segundos.

a) ¿Es y función de t? Explicar la respuesta.
b) Calcular la amplitud y el periodo de las oscilaciones.
c) Encontrar un modelo para los datos.
d) Representar gráficamente el modelo del apartado *c)* en una calculadora y comparar el resultado con los datos de la figura.



18. ***Temperatura*** La siguiente tabla muestra las temperaturas máximas diarias en Honolulu H y Chicago C (en grados Fahrenheit), donde $t = 1$ corresponde a enero. (*Fuente: NOAA.*)

t	1	2	3	4	5	6
H	80.1	80.5	81.6	82.8	84.7	86.5
C	29.0	33.5	45.8	58.6	70.1	79.6

t	7	8	9	10	11	12
H	87.5	88.7	88.5	86.9	84.1	81.2
C	83.7	81.8	74.8	63.3	48.4	34.0

a) Si un modelo para Honolulu es

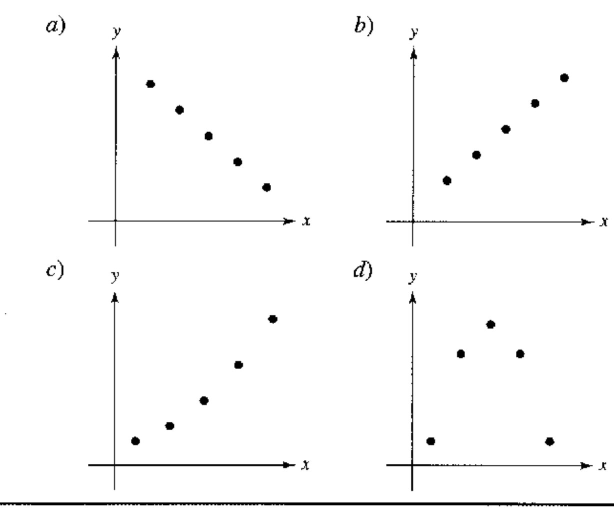
$$H(t) = 84.40 + 4.28 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3.86\right).$$

Encontrar un modelo para Chicago.
b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo correspondientes a las temperaturas en Honolulu. ¿Es bueno el ajuste?
c) Utilizar una calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo correspondientes a las temperaturas en Chicago. ¿Es bueno el ajuste?
d) Utilizar los modelos para estimar la temperatura promedio anual en cada ciudad. ¿Qué término del modelo se utilizó? Explicar la respuesta.
e) ¿Cuál es el periodo en cada modelo? ¿Es el que se esperaba? Explicar las respuestas.
f) ¿Qué ciudad presenta una mayor variación de temperaturas a lo largo del año? ¿Qué factor de los modelos lo determina? Explicar las respuestas.

Desarrollo de conceptos

19. Buscar una colección de datos de la vida real en un periódico o revista y ajustar un modelo a ellos. ¿Qué implica el modelo sobre los datos?

20. Describir una situación factible de la vida real para cada conjunto de datos. Luego, describir cómo puede emplearse en el entorno de la realidad.



Ejercicios de repaso del capítulo P

En los ejercicios 1 a 4, encontrar las intersecciones con los ejes (si existe alguna).

1. $y = 2x - 3$
2. $y = (x - 1)(x - 3)$
3. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$
4. $xy = 4$

En los ejercicios 5 y 6, verificar si existe simetría con respecto a cada eje y al origen.

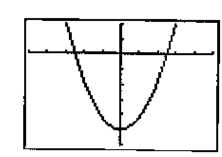
5. $x^2y - x^2 + 4y = 0$
6. $y = x^4 - x^2 + 3$

En los ejercicios 7 a 14, dibujar la gráfica de la ecuación.

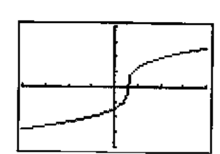
7. $y = \frac{1}{2}(-x + 3)$
8. $4x - 2y = 6$
9. $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 1$
10. $0.02x + 0.15y = 0.25$
11. $y = 7 - 6x - x^2$
12. $y = 6x - x^2$
13. $y = \sqrt{5-x}$
14. $y = |x - 4| - 4$

En los ejercicios 15 y 16, describir la ventana de calculadora que produce la figura.

15. $y = 4x^2 - 25$



16. $y = 8\sqrt[3]{x-6}$



En los ejercicios 17 y 18, utilizar la calculadora para encontrar el o los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

17. $3x - 4y = 8$
    $x + y = 5$
18. $x - y + 1 = 0$
    $y - x^2 = 7$

19. ***Para pensar*** Escribir una ecuación cuya gráfica corte en $x = -2$ y $x = 2$ y sea simétrica con respecto al origen.

20. ***Para pensar*** ¿Para qué valor de k la gráfica de $y = kx^3$ pasa por el punto indicado?

    a) $(1, 4)$ *b)* $(-2, 1)$ *c)* $(0, 0)$ *d)* $(-1, -1)$

En los ejercicios 21 y 22, dibujar los puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.

21. $(\frac{3}{2}, 1), (5, \frac{5}{2})$
22. $(7, -1), (7, 12)$

En los ejercicios 23 y 24, utilizar el concepto de pendiente para determinar el valor de t para el que los tres puntos son colineales.

23. $(-2, 5), (0, t), (1, 1)$
24. $(-3, 3), (t, -1), (8, 6)$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente señalada. Dibujar la recta.

25. $(0, -5), m = \frac{3}{2}$
26. $(-2, 6), m = 0$
27. $(-3, 0), m = -\frac{2}{3}$
28. $(5, 4)$, m es indefinida.

29. Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(-2, 4)$ y tienen las siguientes características.

    a) Pendiente $\frac{7}{16}$
    b) Es paralela a la recta $5x - 3y = 3$
    c) Pasa por el origen
    d) Es paralela al eje y

30. Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(1, 3)$ y poseen las siguientes características.

    a) Pendiente $-\frac{2}{3}$.
    b) Es perpendicular a la recta $x + y = 0$.
    c) Pasa por el punto $(2, 4)$.
    d) Es paralela al eje x.

31. ***Ritmo o velocidad de cambio*** El precio de adquisición de una máquina nueva es \$12 500, y su valor decrecerá \$850 por año. Utilizar esta información para escribir una ecuación lineal que determine el valor V de la máquina t años después de su adquisición. Calcular su valor transcurridos 3 años.

32. ***Punto de equilibrio*** Un contratista adquiere un equipo en \$36 500 cuyo costo de combustible y mantenimiento es de \$9.25 por hora. Al operario que lo maneja se le pagan \$13.50 por hora y a los clientes se les cargan \$30 por hora.

    a) Escribir una ecuación para el costo C que supone hacer funcionar el equipo durante t horas.
    b) Escribir una ecuación para los ingresos R derivados de t horas de uso del equipo.
    c) Determinar el punto de equilibrio, calculando el instante en el que $R = C$.

En los ejercicios 33 a 36, construir la gráfica de la ecuación y utilizar el criterio de la recta vertical para determinar si la ecuación expresa a y como una función de x.

33. $x - y^2 = 0$
34. $x^2 - y = 0$
35. $y = x^2 - 2x$
36. $x = 9 - y^2$

37. Evaluar (si es posible) la función $f(x) = 1/x$ en los valores especificados de la variable independiente y simplificar los resultados.

    a) $f(0)$ *b)* $\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

38. Evaluar (si es posible) la función para cada valor de la variable independiente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ |x - 2|, & x \geq 0 \end{cases}$$

    a) $f(-4)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(1)$

39. Determinar el dominio y el recorrido o rango de cada función.

    a) $y = \sqrt{36 - x^2}$ *b)* $y = \dfrac{7}{2x - 10}$ *c)* $y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

40. Dadas $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, evaluar las expresiones.

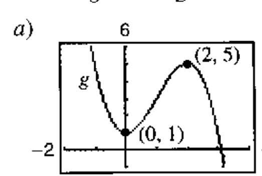
a) $f(x)-g(x)$ *b)* $f(x)g(x)$ *c)* $g(f(x))$

41. Construir (en un mismo sistema de coordenadas) las gráficas de f para $c = -2, 0$ y 2.

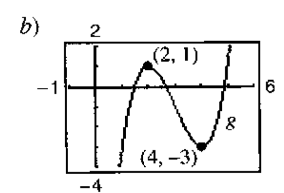
a) $f(x) = x^3 + c$ *b)* $f(x) = (x - c)^3$
c) $f(x) = (x - 2)^3 + c$ *d)* $f(x) = cx^3$

42. Utilizar una calculadora para representar gráficamente $f(x) = x^3 - 3x^2$. Empleando la gráfica, escribir una fórmula para la función g de la figura.

a)



b)



43. ***Conjetura***

a) Utilizar una calculadora para representar gráficamente las funciones f, g y h en una misma ventana. Hacer una descripción por escrito de las similitudes y diferencias observadas entre las gráficas.

Potencias impares: $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^5$

Potencias pares: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$

b) Utilizar el resultado del apartado *a)* para hacer una conjetura con respecto a las gráficas de las funciones $y = x^7$ y $y = x^8$. Comprobar la conjetura con ayuda de la calculadora.

44. ***Para pensar*** Utilizando el resultado del ejercicio 43, tratar de vaticinar las formas de las gráficas de f, g y h. Después, representar las funciones con una calculadora gráfica y comparar el resultado con su estimación.

a) $f(x) = x^2(x - 6)^2$ *b)* $g(x) = x^3(x - 6)^2$
c) $h(x) = x^3(x - 6)^3$

45. ***Área*** Se va a cortar un alambre de 24 pulgadas de longitud en cuatro trozos para formar un rectángulo cuyo lado más corto mida x.

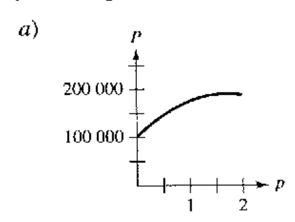
a) Expresar el área A del rectángulo en función de x.

b) Determinar el dominio de la función y representar gráficamente la función de ese dominio en una calculadora.

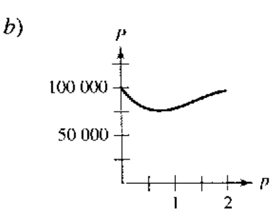
c) Utilizar la gráfica de la función para estimar el área máxima del rectángulo. Hacer una suposición con respecto a las dimensiones que producen el área máxima.

46. ***Redacción*** Las siguientes gráficas exhiben los beneficios P de dos pequeñas empresas durante un periodo p de dos años. Inventar una historia que explique el comportamiento de cada función de beneficios para un hipotético producto elaborado por la empresa.

a)

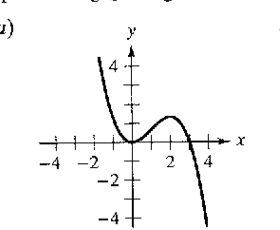


b)

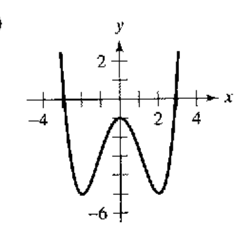


47. ***Para pensar*** ¿Cuál es el menor grado posible de la función polinómica cuya gráfica se aproxima a la que se muestra en cada apartado? ¿Qué signo debe tener el coeficiente dominante?

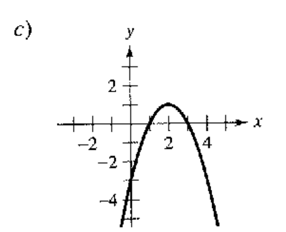
a)



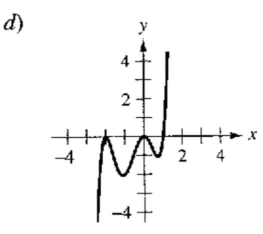
b)



c)



d)



48. ***Prueba de esfuerzo*** Se somete a prueba una pieza de maquinaria combándola x centímetros, 10 veces por minuto, hasta el instante y (en horas) en el que falla. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

x	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
y	61	56	53	55	48	35	36	33	44	23

a) Utilizar las funciones de regresión de una calculadora para encontrar un modelo lineal para los datos.

b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.

c) Utilizar la gráfica para determinar si se cometió un error al realizar una de las pruebas o al registrar los resultados. Si es así, suprimir el punto erróneo y encontrar el modelo lineal para los datos revisados.

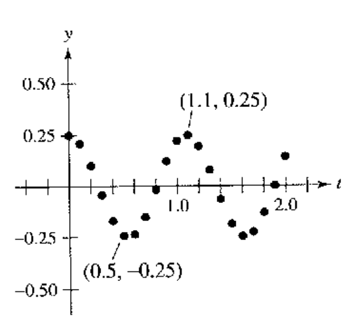
49. ***Movimiento armónico*** Un detector de movimiento mide el desplazamiento oscilatorio de un peso suspendido de un resorte. En la figura se muestran los datos recabados y los desplazamientos máximos (positivo y negativo) aproximados a partir del punto de equilibrio. El desplazamiento y se mide en centímetros y el tiempo t en segundos.

a) ¿Es y función de t? Explicar la respuesta.

b) Calcular la amplitud y el periodo de las oscilaciones.

c) Encontrar un modelo para los datos.

d) Representar gráficamente el modelo del apartado *c)* en una calculadora y comparar el resultado con los datos de la figura.



SP Solución de problemas

1. Considerando el círculo $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ que se muestra en la figura.
   a) Encontrar el centro y el radio del círculo.
   b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto (0, 0).
   c) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto (6, 0).
   d) ¿En qué punto se cortan dichas tangentes?

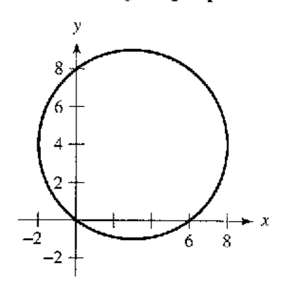


Figura para 1

Figura para 2

2. Sean dos rectas tangentes que van del punto (0, 1) al círculo $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ (ver la figura). Encontrar las ecuaciones de ambas rectas, valiéndose del hecho de que cada tangente hace intersección con el círculo *exactamente* en un solo punto.

3. La función de Heaviside $H(x)$ se utiliza mucho en aplicaciones ingenieriles.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Trazar a mano la gráfica de la función de Heaviside y las gráficas de las siguientes funciones.

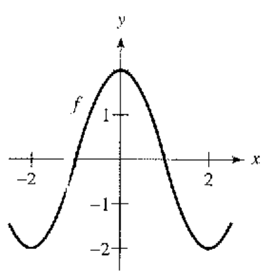
a) $H(x) - 2$ *b*) $H(x - 2)$ *c*) $-H(x)$
d) $H(-x)$ *e*) $\frac{1}{2}H(x)$ *f*) $-H(x - 2) + 2$

Institute of Electrical Engineers, London

Oliver Heaviside (1850-1925)

Heaviside fue un físico-matemático británico que contribuyó al campo de las matemáticas aplicadas, sobre todo en la ingeniería eléctrica. La *función de Heaviside* es un tipo clásico de función "encendido-apagado" con aplicaciones en las ciencias eléctricas y de la computación.

4. Tomando en cuenta la gráfica de la función que se muestra bajo estas líneas, construir las gráficas de las siguientes funciones.
   a) $f(x + 1)$ *b*) $f(x) + 1$ *c*) $2f(x)$ *d*) $f(-x)$
   e) $-f(x)$ *f*) $|f(x)|$ *g*) $f(|x|)$



5. El propietario de un rancho planea cercar un potrero rectangular que se encuentra junto a un río. Ya tiene 100 metros de cerca y no es necesario cercar el lado que se encuentra a lo largo del río (ver la figura).
   a) Escribir el área A del potrero en función de x, que es la longitud del lado paralelo al río. ¿Cuál es el dominio de A?
   b) Representar gráficamente la función área $A(x)$ y estimar las dimensiones que producen la mayor cantidad de área para el potrero.
   c) Encontrar las dimensiones que producen la mayor cantidad de área del potrero completando el cuadrilátero.

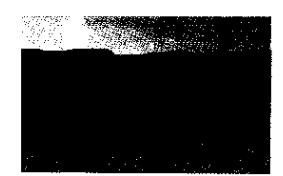
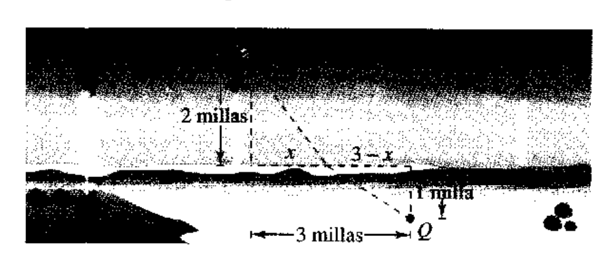


Figura para 5

Figura para 6

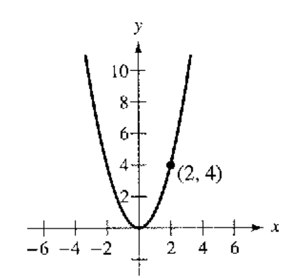
6. El propietario de un rancho cuenta con 300 metros de cerca para enrejar dos potreros contiguos.
   a) Escribir el área total A de ambos potreros como una función de x (ver la figura). ¿Cuál es el dominio de A?
   b) Representar gráficamente la función área y estimar las dimensiones que producen la mayor área de los potreros.
   c) Encontrar las dimensiones que producen la mayor cantidad de área del potrero completando el cuadrilátero.

7. Usted se encuentra en una lancha a 2 millas del punto más cercano a la costa y se dirige a un punto Q, ubicado sobre la costa a 3 millas de dicho punto y 1 milla tierra adentro (ver la figura). Puede navegar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. Escribir el tiempo total T del recorrido en función de x.



8. Conduzca por la playa a 120 kilómetros por hora. En el recorrido de regreso, conduzca a 60 kilómetros por hora. ¿Cuál es la velocidad promedio en todo el viaje? Explicar el razonamiento.

9. Uno de los temas fundamentales del cálculo consiste en encontrar la pendiente de una recta tangente en un punto a una curva. Para ver cómo puede hacerse esto, considerar el punto (2, 4) de la gráfica de $f(x) = x^2$.



a) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y (3, 9). La pendiente de la recta tangente en (2, 4) ¿es mayor o menor que este número?

b) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y (1, 1). La pendiente de la recta tangente en (2, 4) ¿es mayor o menor que este número?

c) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y (2.1, 4.41). La pendiente de la recta tangente en (2, 4) ¿es mayor o menor que este número?

d) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y $(2 + h, f(2 + h))$, para $h \neq 0$. Verificar que $h = 1, -1$ y 0.1 generen las soluciones de los apartados *a*) a *c*).

e) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en (2, 4)? Explicar de qué manera obtuvo la respuesta.

10. Representar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x}$ y anotar el punto (4, 2) sobre ella.

a) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y (9, 3). La pendiente de la recta tangente en (4, 2) ¿es mayor o menor que este número?

b) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y (1, 1). La pendiente de la recta tangente en (4, 2) ¿es mayor o menor que este número?

c) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y (4.41, 2.1). La pendiente de la recta tangente en (4, 2) ¿es mayor o menor que este número?

d) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y $(4 + h, f(4 + h))$, para $h \neq 0$.

e) ¿Cuál es la pendiente de la línea tangente en (4, 2)? Explicar de qué manera obtuvo su respuesta.

11. En una enorme habitación se encuentran dos bocinas, con 3 metros de separación entre sí. La intensidad del sonido I de una bocina es del doble de la otra, como se muestra en la figura. Suponer que el escucha se encuentra en libertad de moverse por la habitación hasta encontrar la posición en la que recibe igual cantidad de sonido de ambas bocinas. Dicho lugar satisface dos condiciones: 1) la intensidad del sonido en la posición del escucha es directamente proporcional al nivel de sonido de la fuente, y 2) la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente.

a) Encontrar los puntos sobre el eje x que reciben la misma cantidad de sonido de ambas bocinas.

b) Encontrar y representar gráficamente la ecuación de todas las posiciones (x, y) donde se reciben cantidades de sonido iguales de ambas bocinas.

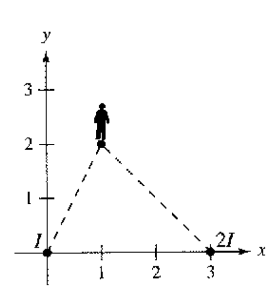


Figura para 11

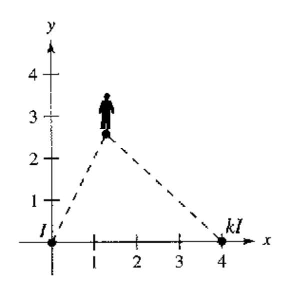


Figura para 12

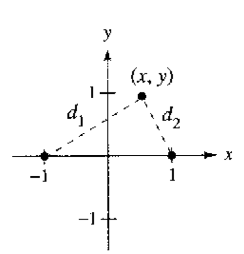
12. Suponer que las bocinas del problema anterior se encuentran separadas por 4 metros y la intensidad del sonido de una de ellas es de k veces la de la otra, como se muestra en la figura.

a) Encontrar la ecuación para todas las posiciones (x, y) donde se reciben cantidades de sonido iguales de ambas bocinas.

b) Representar gráficamente la ecuación para el caso donde $k = 3$.

c) Describir el conjunto de posiciones con igual cantidad de sonido a medida que k se vuelve muy grande.

13. Sean d_1 y d_2 las distancias entre el punto (x, y) y los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente, como se muestra en la figura. Demostrar que la ecuación de la gráfica de todos los puntos (x, y) que satisfacen $d_1d_2 = 1$ es $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$. Esta curva se conoce como **lemniscata**. Trazar la lemniscata e identificar tres puntos sobre la gráfica.



14. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

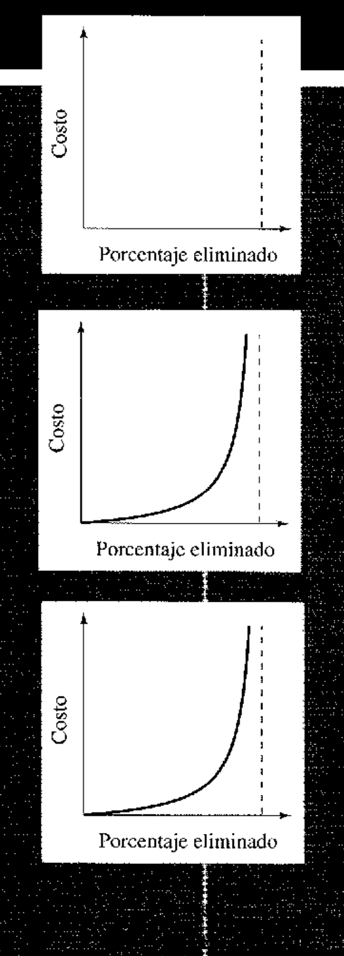
a) ¿Cuáles son el dominio y el recorrido o rango de f?

b) Encontrar la composición de $f(f(x))$; ¿cuál es el domino de esta función?

c) Encontrar $f(f(f(x)))$; ¿cuál es el domino de esta función?

d) Representar gráficamente $f(f(f(x)))$. La gráfica ¿es una recta? ¿Por qué?

Límites y sus propiedades



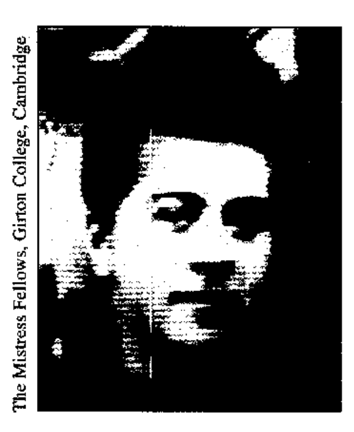
Las compañías de servicios públicos utilizan un convertidor catalítico de platino para eliminar los contaminantes de sus emisiones de humo. ¿Qué cree que resulta más costoso para la empresa: eliminar primero 90 por ciento de los contaminantes o el restante 10 por ciento? ¿Por qué?

Sección 1.1 Una mirada previa al cálculo

- **Comprender qué es el cálculo.**
- **Comprender el problema de la recta tangente.**
- **Comprender el problema del área.**

AYUDA DE ESTUDIO A medida que vayamos progresando en este curso, conviene recordar que el aprendizaje del cálculo es sólo uno de sus fines. Su objetivo más importante es aprender a utilizar el cálculo para modelar y resolver problemas reales. En seguida se presentan algunas estrategias de resolución de problemas que pueden ayudar.

- Cerciorarse de entender la pregunta. ¿Cuáles son los datos? ¿Qué se le pide encontrar?
- Concebir un plan. Existen muchos métodos que se pueden utilizar: hacer un esquema, resolver un problema sencillo, trabajar hacia atrás, dibujar un diagrama, usar recursos tecnológicos y muchos otros.
- Ejecutar el plan. Asegurarse de que responde la pregunta. Enunciar la respuesta en palabras. Por ejemplo, en vez de escribir la respuesta como $x = 4.6$, sería mejor escribir "El área de la zona es 4.6 metros cuadrados".
- Revisar el trabajo. ¿Tiene sentido la respuesta? ¿Existe alguna forma de contrastarla?


The Mistress Fellows, Girton College, Cambridge

GRACE CHISHOLM YOUNG (1868-1944)

Grace Chisholm Young obtuvo su título en matemáticas en el Girton College de Cambridge, Inglaterra. Sus primeros trabajos se publicaron bajo el nombre de William Young, su marido. Entre los años 1914 y 1916, Grace Young publicó trabajos relativos a los fundamentos del cálculo que la hicieron merecedora del Premio Gamble del Girton College.

¿Qué es el cálculo?

El cálculo es la matemática de los cambios (velocidades y aceleraciones). También son objeto del cálculo las rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, centroides, curvaturas y una gran variedad de conceptos que han permitido a científicos, ingenieros y economistas elaborar modelos para situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas previas al cálculo también tratan con velocidades, aceleraciones, rectas tangentes, pendientes y demás, existe una diferencia fundamental entre ellas y el cálculo. Mientras que las primeras son más estáticas, el cálculo es más dinámico. He aquí algunos ejemplos.

- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar la pendiente de una recta, pero para analizar la pendiente de una curva es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar una recta tangente a un círculo, pero para analizar una recta tangente a una gráfica en general es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar el área de un rectángulo, pero para analizar el área bajo una curva general es necesario el cálculo.

Cada una de estas situaciones implica la misma estrategia general: la reformulación de las matemáticas previas al cálculo a través de un proceso de límite. De tal modo, una manera de responder a la pregunta "¿qué es el cálculo?" consiste en decir que el cálculo es una "máquina de límites" que funciona en tres etapas. La primera la constituyen las matemáticas previas al cálculo, con nociones como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. La segunda es el proceso de límite, y la tercera es la nueva formulación propia del cálculo, en términos de derivadas e integrales.

Matemáticas previas al cálculo ⇒ Proceso del límite ⇒ Cálculo

Por desgracia, algunos estudiantes tratan de aprender cálculo como si se tratara de una simple recopilación de fórmulas nuevas. Si se reduce el estudio del cálculo a la memorización de las fórmulas de derivación y de integración, su comprensión será deficiente, el estudiante perderá confianza en sí mismo y no obtendrá satisfacción.

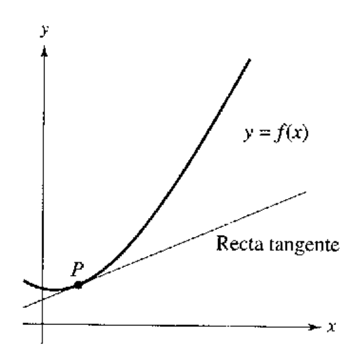
En las dos páginas siguientes se presentan algunos conceptos familiares del precálculo, listados junto con sus contrapartes del cálculo. A lo largo del texto, se debe recordar que el objetivo es aprender a utilizar las fórmulas y técnicas del precálculo como fundamento para producir las fórmulas y técnicas más generales del cálculo. Quizá algunas de las "viejas fórmulas" de las páginas siguientes no les resulten familiares a algunos estudiantes; repasaremos todas ellas.

A medida que se avance en el texto, se sugiere volver a leer estos comentarios repetidas veces. Trate de mantener constancia de en cuál de las tres etapas del estudio del cálculo se encuentra. Por ejemplo, los tres primeros capítulos se desglosan como sigue.

Capítulo P: Preparación para el cálculo	Matemáticas previas al cálculo o precálculo
Capítulo 1: Límites y sus propiedades	Proceso de límite
Capítulo 2: La derivada	Cálculo

Sin cálculo	**Con cálculo diferencial**
Valor de $f(x)$ cuando $x = c$	Límite de $f(x)$ cuando x tiende a c
Pendiente de una recta	Pendiente de una curva
Recta secante a una curva	Recta tangente a una curva
Ritmo o velocidad de cambio promedio entre $t = a$ y $t = b$	Ritmo o velocidad de cambio instantáneo en $t = c$
Curvatura del círculo	Curvatura de una curva
Altura de una curva en $x = c$	Altura máxima de una curva dentro de un intervalo
Plano tangente a una esfera	Plano tangente a una superficie
Dirección del movimiento a lo largo de una recta	Dirección del movimiento a lo largo de una curva

Sin cálculo	Con cálculo integral
Área de un rectángulo	Área bajo una curva
Trabajo realizado por una fuerza constante	Trabajo realizado por una fuerza variable
Centro de un rectángulo	Centroide de una región
Longitud de un segmento de recta	Longitud de un arco
Área superficial de un cilindro	Área superficial de un sólido de revolución
Masa de un sólido con densidad constante	Masa de un sólido con densidad variable
Volumen de un sólido rectangular	Volumen de la región bajo una superficie
Suma de un número finito de términos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	Suma de un número infinito de términos $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$



Recta tangente de la gráfica de f en P
Figura 1.1

El problema de la recta tangente

La noción de límite es fundamental en el estudio del cálculo. A continuación se dan breves descripciones de dos problemas clásicos del cálculo —*el problema de la recta tangente* y *el problema del área*— que muestran la forma en que intervienen los límites en el cálculo.

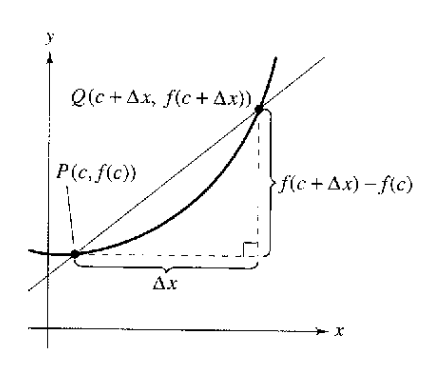
En el problema de la recta tangente, se tiene una función f y un punto P de su gráfica y se trata de encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto P, como se muestra en la figura 1.1.

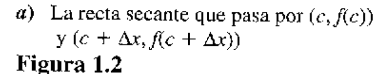
Exceptuando los casos en que la recta tangente es vertical, el problema de encontrar la **recta tangente** en el punto P equivale al de determinar la *pendiente* de la recta tangente en P. Se puede calcular aproximadamente esta pendiente trazando una recta por el punto de tangencia y por otro punto sobre la curva, como se muestra en la figura 1.2*a*. Tal recta se llama **recta secante**. Si $P(c, f(c))$ es el punto de tangencia y

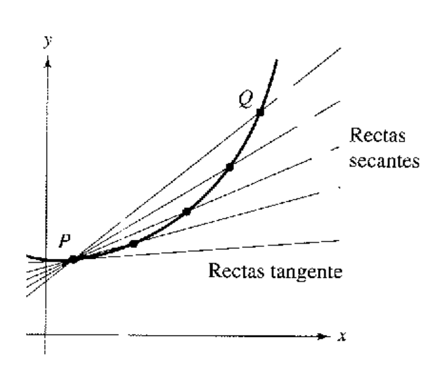
$$Q(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$$

es un segundo punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos está dada por

$$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$




a) La recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$



b) Cuando Q tiende a P, las rectas secantes se van aproximando a la recta tangente

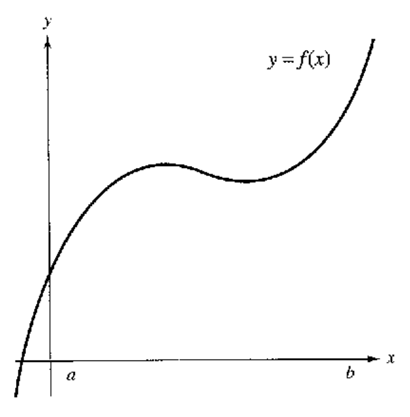
Figura 1.2

A medida que el punto Q se aproxima al punto P, la pendiente de la recta secante se aproxima a la de la recta tangente, como se muestra en la figura 1.2*b*. Cuando existe tal "posición límite", se dice que la pendiente de la recta tangente es el **límite** de la pendiente de la recta secante (este importante problema será estudiado con más detalle en el capítulo 2).

Los siguientes puntos se encuentran en la gráfica de $f(x) = x^2$.

$$Q_1(1.5, f(1.5)), \quad Q_2(1.1, f(1.1)), \quad Q_3(1.01, f(1.01)),$$
$$Q_4(1.001, f(1.001)), \quad Q_5(1.0001, f(1.0001))$$

Cada punto sucesivo se acerca más al punto P (1, 1). Calcular la tangente de la recta secante que pasa por Q_1 y P, Q_2 y P, y así sucesivamente. Utilizar una computadora para representar gráficamente estas rectas secantes. Luego utilizar los resultados para estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.



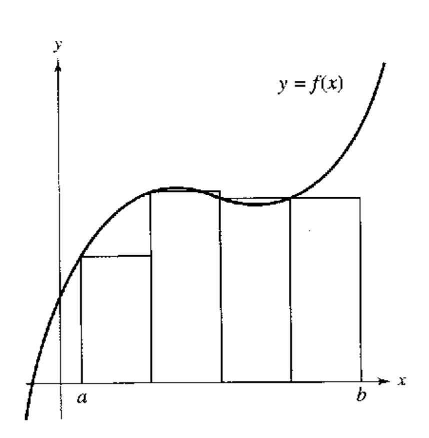
Área bajo una curva
Figura 1.3

El problema del área

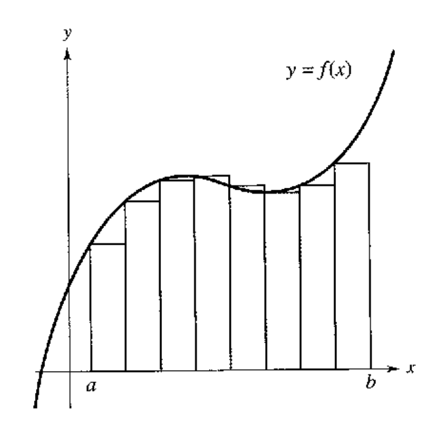
En el problema de la recta tangente, se vio cómo aplicar el límite de la pendiente de una recta para determinar la pendiente de una curva general. Otro problema clásico del cálculo, que también se puede resolver con un proceso de límite, consiste en determinar el área de una zona plana delimitada por gráficas de funciones. En este caso, el proceso de límite se aplica al área de un rectángulo con el fin de encontrar el área de una región en general.

A modo de ejemplo sencillo, considerar la zona acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la figura 1.3. Se puede estimar su área usando varios rectángulos, como se muestra en la figura 1.4. Al aumentar el número de rectángulos, la aproximación va mejorando cada vez más, ya que se reduce el área que se pierde mediante los rectángulos. El objetivo radica en determinar el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando su número crece sin fin.

NOTA HISTÓRICA
En uno de los eventos más asombrosos ocurrido en las matemáticas, se descubrió que el problema de recta tangente y el problema del área están estrechamente relacionados. Este descubrimiento condujo al nacimiento del cálculo. Se abordará la relación que existe entre estos dos problemas cuando se estudie el teorema fundamental del cálculo en el capítulo 4.

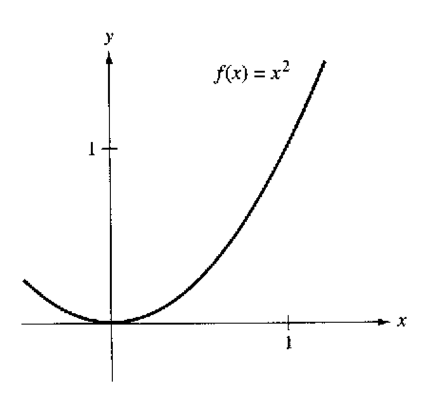


Aproximación usando cuatro rectángulos
Figura 1.4

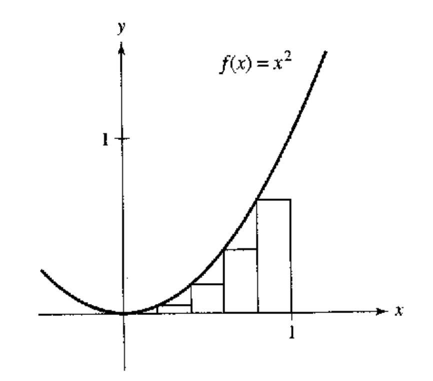


Aproximación usando ocho rectángulos

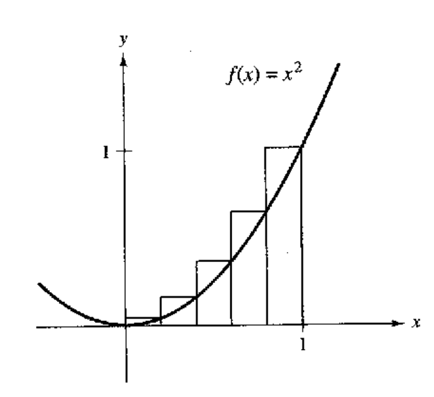
Considerar la región acotada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$, que se muestra en el apartado *a*) de la figura. Se puede estimar el área de esta región empleando dos conjuntos de rectángulos, unos inscritos en ella y otros circunscritos, como se muestra en los apartados *b*) y *c*). Calcular la suma de las áreas de cada conjunto de rectángulos y luego utilizar sus resultados para calcular aproximadamente el área de la región.



a) Región acotada



b) Rectángulos inscritos



c) Rectángulos circunscritos

Ejercicios de la sección 1.1

En los ejercicios 1 a 6, decidir si el problema puede resolverse mediante el uso de las matemáticas previas al cálculo o si requiere del cálculo o no. En caso afirmativo, resolverlo. En caso contrario explicar el razonamiento y aproximar la solución por procedimientos gráficos o numéricos.

1. Calcular la distancia que recorre en 15 segundos un objeto que viaja a una velocidad constante de 20 pies por segundo.
2. Calcular la distancia que recorre en 15 segundos un objeto que se mueve a una velocidad $v(t) = 20 + 7 \cos t$ pies por segundo.
3. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación $f(x) = 0.04(8x - x^2)$ donde x y $f(x)$ se miden en millas. Calcular el ritmo o velocidad de cambio en la elevación cuando $x = 2$.

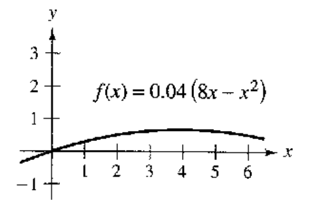


Figura para 3

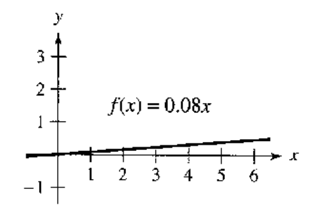


Figura para 4

4. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación $f(x) = 0.08x$, donde x y $f(x)$ se miden en millas. Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de la elevación cuando $x = 2$.
5. Encontrar el área de la región sombreada.

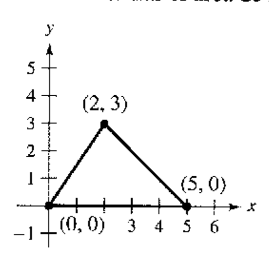


Figura para 5

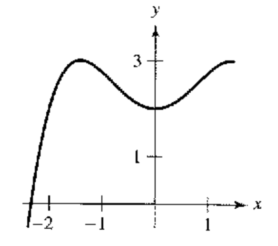
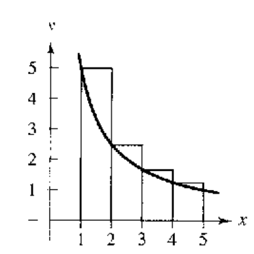
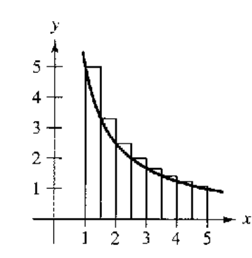


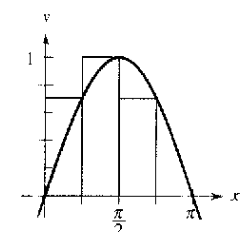
Figura para 6

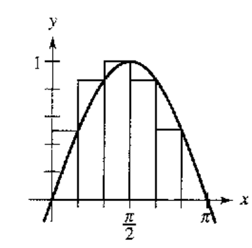
6. Encontrar el área de la región sombreada.
7. ***Rectas secantes*** Considerar la función $f(x) = 4x - x^2$ y el punto P (1, 3) de la gráfica de f:
   a) Dibujar la gráfica de f y las rectas secantes que pasan por $P(1, 3)$, y $Q(x, f(x))$ para los siguientes valores de x: 2, 1.5 y 0.5.
   b) Encontrar la pendiente de cada recta secante.
   c) Utilizar los resultados del apartado *b*) para estimar la pendiente de la recta tangente a f en $P(1, 3)$. Describir cómo puede mejorarse la aproximación de la pendiente.
8. ***Rectas secantes*** Considerar la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el punto $P(4, 2)$ en la gráfica de f:
   a) Dibujar la gráfica de f y las rectas secantes que pasan por $P(4, 2)$, y $Q(x, f(x))$ para los siguientes valores de x: 1, 3 y 5.
   b) Encontrar la pendiente de cada recta secante.
   c) Utilizar los resultados del apartado *b*) para estimar la pendiente de la recta tangente a f en $P(4, 2)$. Describir cómo puede mejorarse la aproximación de la pendiente.
9. *a*) Utilizar los rectángulos de cada una de las gráficas para aproximar el área de la región acotada por $y = 5/x$, $y = 0$, $x = 1$, y $x = 5$.





   b) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta del área.
10. *a*) Utilizar los rectángulos de cada una de las gráficas para aproximar el área de la región acotada por $y = \text{sen}\, x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

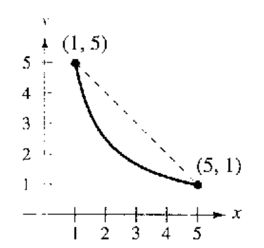


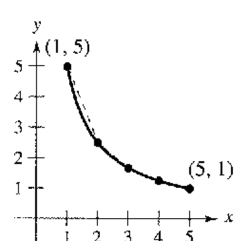


   b) Describir cómo podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta del área.

Desarrollo de conceptos

11. Considerar la longitud de la gráfica de $f(x) = 5/x$, desde (1, 5) hasta (5, 1):





   a) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de la distancia entre sus extremos, como se muestra en la primera figura.
   b) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de las longitudes de los cuatro segmentos de recta, como se muestra en la segunda figura.
   c) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta de la longitud de la curva.

Sección 1.2 Cálculo de límites por medio de los métodos gráfico y numérico

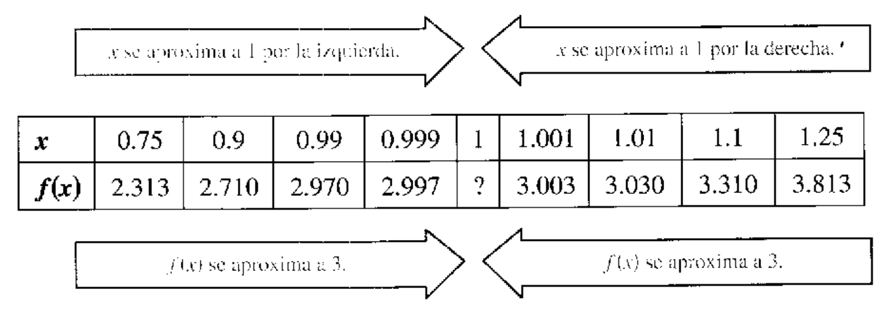
- **Estimar un cálculo de límites utilizando el método numérico o el gráfico.**
- **Aprender diferentes formas límites que no existen.**
- **Estudiar y usar la definición formal de límite.**

Introducción a los límites

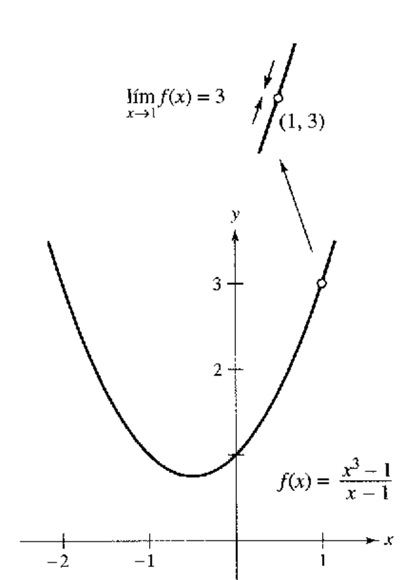
Suponer que se pide dibujar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Para todos los valores distintos de $x = 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en $x = 1$, no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x = 1$, se pueden usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como se ilustra en la tabla.



x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3
Figura 1.5

Como se muestra en la figura 1.5, la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1, 3). A pesar de que x no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y en consecuencia, $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Esto se lee "el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3".

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de $f(x)$, cuando x se aproxima a c, es L. Esto se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

EXPLORACIÓN

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo estimar un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, construyendo una representación. Calcular el siguiente límite de forma numérica completando la tabla.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Luego utilizar una computadora para estimar el límite de manera gráfica.

f no está definida en $x = 0$.

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

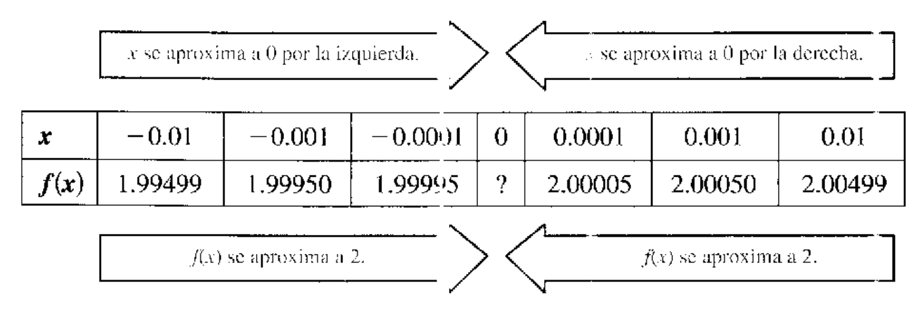
El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 2
Figura 1.6

EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función $f(x) = x/\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$ en varios puntos cercanos a $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

Solución En la siguiente tabla se registran los valores de $f(x)$ para diversos valores de x cercanos a 0.



x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

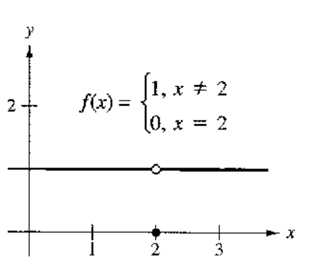
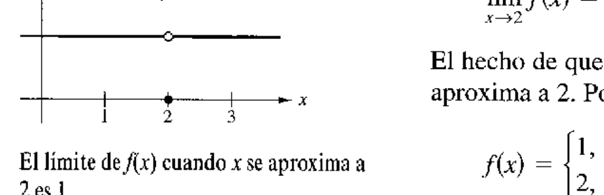
De los datos mostrados en la tabla, se puede estimar que el límite es 2, resultado que se ve confirmado por la gráfica de f (ver la figura 1.6).

Observar que en el ejemplo 1 la función no está definida en $x = 0$ y aún así $f(x)$ parece aproximarse a un límite a medida que x se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la *existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.*

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2, donde f se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 1
Figura 1.7

Solución Puesto que $f(x) = 1$ para todos los x distintos de $x = 2$, se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 1.7. Por tanto, se puede escribir

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1.$$

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando x se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo.

Hasta este punto de la sección, se han calculado los límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. En la sección 1.3 se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos. A lo largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

1. Método numérico — Construir una tabla de valores.
2. Método gráfico — Elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.
3. Método analítico — Utilizar álgebra o cálculo.

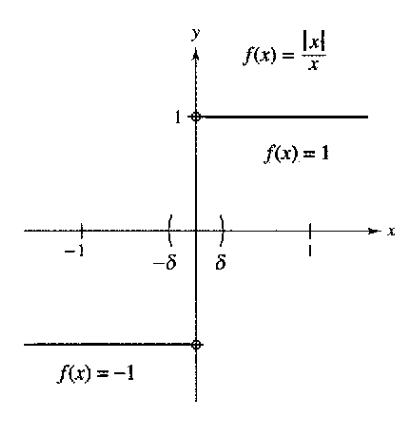
Límites que no existen

En los tres ejemplos siguientes se examinarán algunos límites que no existen.

EJEMPLO 3 Comportamiento diferente por la derecha y por la izquierda

Demostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$



El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe
Figura 1.8

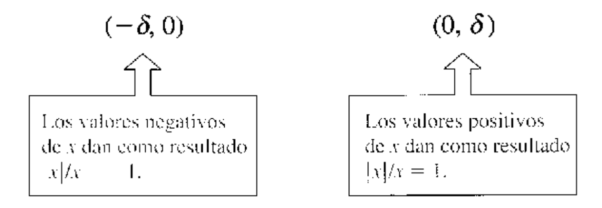
Solución Considerar la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. En la figura 1.8 se puede observar que para los valores positivos de x

$$\frac{|x|}{x} = 1, \qquad x > 0$$

y para los valores negativos de x

$$\frac{|x|}{x} = -1, \qquad x < 0.$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime x a 0, existirán tanto valores positivos como negativos de x que darán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$. De manera específica, si δ (letra griega *delta* minúscula) es un número positivo, entonces los valores de x que satisfacen la desigualdad $0 < |x| < \delta$ se pueden clasificar de la siguiente manera:



Esto implica que el límite no existe.

EJEMPLO 4 Comportamiento no acotado

Analizar la existencia del límite

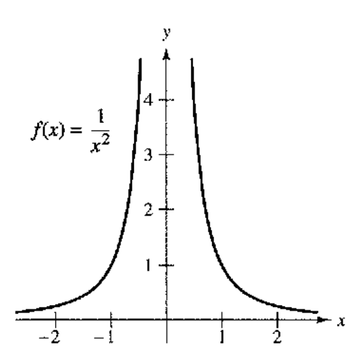
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Solución Sea $f(x) = 1/x^2$. En la figura 1.9 se puede observar que a medida que x se aproxima a 0 tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ crece sin límite. Esto quiere decir que, eligiendo un valor de x lo bastante cercano a 0, se puede lograr que $f(x)$ sea tan grande como se quiera. Por ejemplo, $f(x)$ será mayor que 100 si elegimos valores de x que estén entre 1/10 y 0. Es decir:

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100.$$

Del mismo modo, se puede obligar a que $f(x)$ sea mayor que 1 000 000 de la siguiente manera:

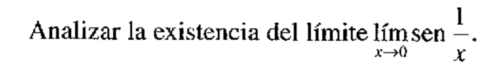
$$0 < |x| < \frac{1}{1\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 1\,000\,000$$



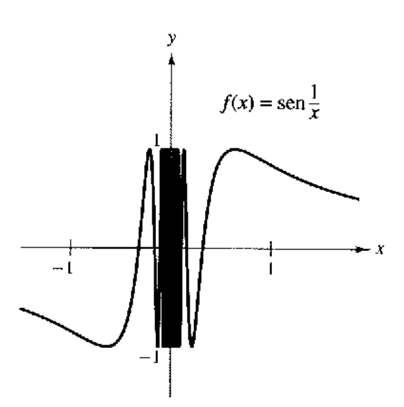
El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe
Figura 1.9

Puesto que $f(x)$ no se aproxima a ningún número real L cuando x se aproxima a 0, se puede concluir que el límite no existe.

EJEMPLO 5 Comportamiento oscilante



Analizar la existencia del límite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.



El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe
Figura 1.10

Solución Sea $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. En la figura 1.10 se puede observar que, cuando x se aproxima a 0, $f(x)$ oscila entre -1 y 1. Por consiguiente, el límite no existe puesto que, por pequeño que se elija δ, siempre es posible encontrar x_1 y x_2 que disten menos de δ unidades de 0 tales que $\operatorname{sen}(1/x_1) = 1$ y $\operatorname{sen}(1/x_2) = -1$, como se muestra en la tabla.

x	$2/\pi$	$2/3\pi$	$2/5\pi$	$2/7\pi$	$2/9\pi$	$2/11\pi$	$x \to 0$
sen (1/x)	1	−1	1	−1	1	−1	El límite no existe.

Comportamientos asociados a la no existencia de un límite

1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de c que por la izquierda.
2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a c.
3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a c.

Existen muchas otras funciones interesantes que presentan comportamientos inusuales. Una de las que se cita con mayor frecuencia es la *función de Dirichlet*:

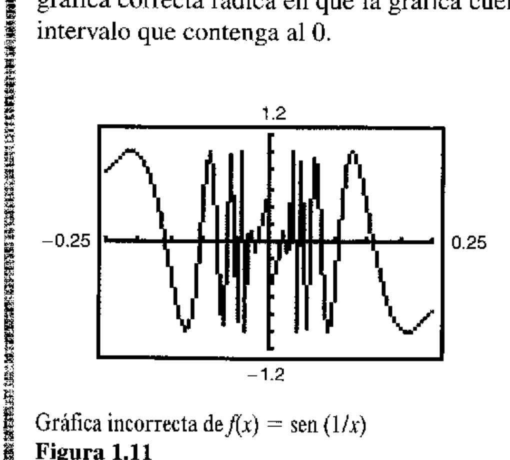
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional.} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Puesto que esta función *carece de límite* en cualquier número real c, *no es continua* en cualquier número real c. La continuidad se estudiará con más detalle en la sección 1.4.

PETER GUSTAV DIRICHLET (1805-1859)

En el desarrollo temprano del cálculo, la definición de una función era mucho más restrictiva que en la actualidad, y "funciones" como la de Dirichlet no hubiesen sido tomadas en consideración. La definición moderna de función se debe al matemático alemán Peter Gustav Dirichlet.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utilice una calculadora para investigar el comportamiento de una función cerca del valor de x en el que se intenta evaluar su límite, recordar que no siempre se puede confiar en las imágenes dibujadas. Al utilizar una calculadora para dibujar la gráfica de la función del ejemplo 5 en un intervalo que contenga al 0, es muy probable que obtenga una gráfica incorrecta, como la que se muestra en la figura 1.11. El motivo por el cual una calculadora no puede mostrar la gráfica correcta radica en que la gráfica cuenta con oscilaciones infinitas en cualquier intervalo que contenga al 0.



Gráfica incorrecta de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$
Figura 1.11

Definición formal de límite

Examinar nuevamente la descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca de manera arbitraria a un número L a medida que x se aproxima a c por cualquiera de sus lados, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L, y se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

A primera vista, esta descripción parece muy técnica. No obstante, se llama informal porque aún hay que conferir un significado preciso a las frases:

"$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L"

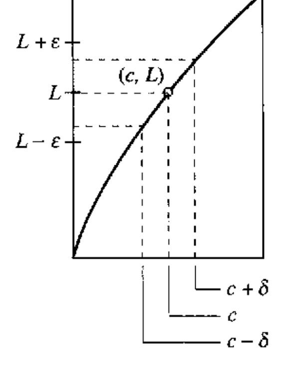
y

"x se aproxima a c".

La primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Augustin-Louis Cauchy. Su **definición ε-δ de límite** es la que se suele utilizar en la actualidad.

En la figura 1.12, sea ε (letra griega *épsilon* minúscula) un número positivo (pequeño). Entonces, la frase "$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L" significa que $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Usar la noción de valor absoluto, esto se puede escribir como

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$



Definición ε-δ del límite de $f(x)$ cuando x tiende a c
Figura 1.12

Del mismo modo, la frase "x se aproxima a c" significa que existe un número positivo δ tal que x pertenece al intervalo $(c - \delta, c)$, o bien al intervalo $(c, c + \delta)$. Esto puede expresarse de manera concisa mediante la doble desigualdad

$$0 < |x - c| < \delta.$$

La primera desigualdad

$$0 < |x - c| \qquad \text{La distancia entre } x \text{ y } c \text{ es mayor que } 0.$$

expresa que $x \neq c$. La segunda desigualdad

$$|x - c| < \delta \qquad x \text{ está a menos de } \delta \text{ unidades de } c.$$

indica que x está a una distancia de δ menor que c.

Definición de límite

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe uno $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

NOTA A lo largo de todo el texto, la expresión

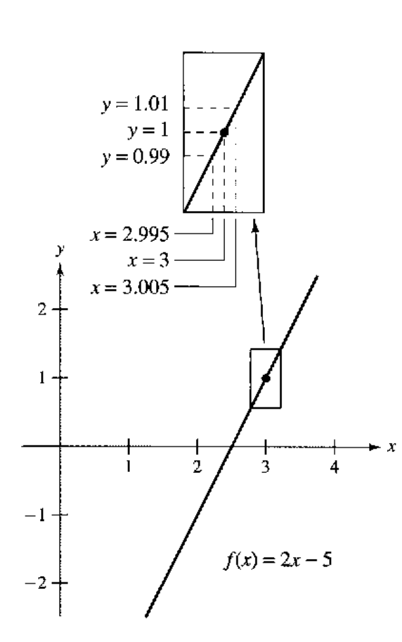
$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

lleva implícitas dos afirmaciones: el límite existe *y* es igual a L.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para conocer más sobre la introducción del rigor al cálculo, consulte "Who Gave You The Epsilon? Cauchy an the Origins of Rigorous Calculus" de Judith V. Grabiner, en *The American Mathematical Monthly*.

Algunas funciones carecen de límite cuando $x \to c$, pero aquellas que lo poseen no pueden tener dos límites diferentes cuando $x \to c$. Es decir, *si el límite de una función existe, entonces es único* (ver el ejercicio 69).

Los tres ejemplos siguientes ayudan a entender mejor la definición ε-δ de límite.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 es 1
Figura 1.13

EJEMPLO 6 Determinar δ para un ε dado

Dado el límite

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$$

encontrar δ tal que $|(2x-5)-1|<0\,01$, siempre que $0<|x-3|<\delta$.

Solución En este problema está trabajando con un valor dado de ε: $\varepsilon = 0.01$. Para encontrar un δ apropiado, se observa que

$$|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3|.$$

Como la desigualdad $|(2x-5)-1| < 0.01$ es equivalente a $2|x-3| < 0.01$, se puede escoger $\delta = 1/2\,(0.01) = 0.005$. Esta opción funciona porque

$$0<|x-3|<0.005$$

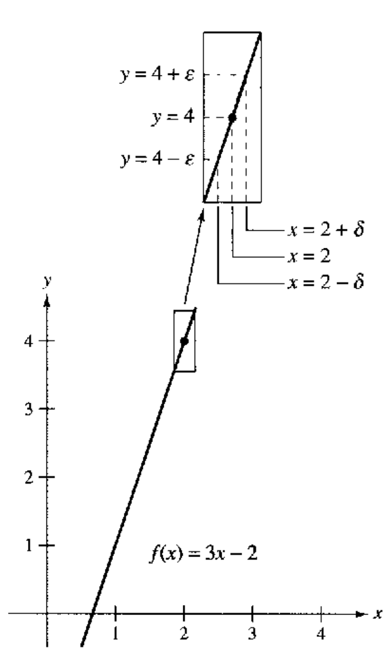
lo que implica que

$$|(2x-5)-1| = 2|x-3| < 2(0.005) = 0.01$$

tal como se muestra en la figura 1.13.

NOTA En el ejemplo 6, obsérvese que 0.005 es el *mayor* valor de δ que garantiza que $|(2x-5)-1| < 0.01$, siempre que $0<|x-3|<\delta$. Todo valor positivo de δ *menor* también debe satisfacer esta condición.

En el ejemplo 6, se encontró un valor de δ para un ε *dado*, lo que no necesariamente demuestra la existencia del límite. Para hacerlo, se debe probar que es posible encontrar un δ para todo ε, como se muestra en el siguiente ejemplo.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 4
Figura 1.14

EJEMPLO 7 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Utilizar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4.$$

Solución Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|(3x-2)-4| < \varepsilon$ siempre que $0<|x-2|<\delta$. Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x-2)-4|$ y $|x-2|$.

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2|$$

De tal manera, para cada $\varepsilon > 0$ dado, se puede tomar $\delta = \varepsilon/3$. Esta opción funciona porque

$$0 < |x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

implica que

$$|(3x-2)-4| = 3|x-2| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

como muestra la figura 1.14.

EJEMPLO 8 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Usar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Solución Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Para encontrar un δ adecuado, comenzamos por escribir $|x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2|$. Para todo x del intervalo (1, 3), se sabe que $|x + 2| < 5$. De tal manera, se toma δ igual al mínimo entre $\varepsilon/5$ y 1, resulta que, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)(5) = \varepsilon$$

como se muestra en la figura 1.15.

$f(x) = x^2$

$4 + \varepsilon$, $(2 + \delta)^2$, 4, $(2 - \delta)^2$, $4 - \varepsilon$, $2 + \delta$, 2, $2 - \delta$

El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 4
Figura 1.15

A lo largo de este capítulo, se utilizará la definición ε-δ de límite principalmente para demostrar teoremas relativos a los límites y para establecer la existencia o inexistencia de tipos de límites específicos. Para *calcular* límites, se describirán técnicas más fáciles de usar que la definición ε-δ.

Ejercicios de la sección 1.2

En los ejercicios 1 a 8, completar la tabla y utilizar el resultado para estimar el límite. Representar gráficamente la función utilizando una computadora, con el fin de confirmar su resultado.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - x - 2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x}$

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

4. $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 2}{x + 3}$

x	−3.1	−3.01	−3.001	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$						

5. $\lim_{x\to 3} \dfrac{[1/(x + 1)] - (1/4)}{x - 3}$

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x\to 4} \dfrac{[x/(x + 1)] - (4/5)}{x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

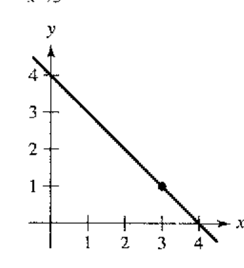
x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

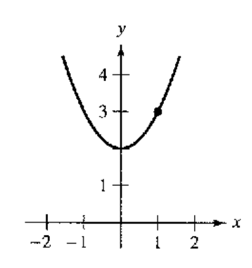
x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

En los ejercicios 9 a 18, utilizar la gráfica para encontrar el límite (si es que existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

9. $\lim_{x\to3}(4-x)$

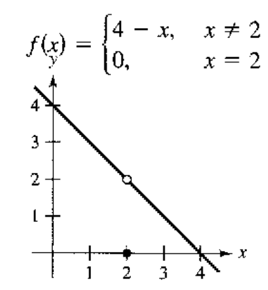


10. $\lim_{x\to1}(x^2+2)$



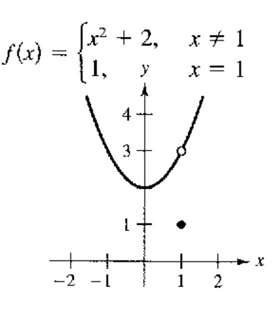
11. $\lim_{x\to2} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$$

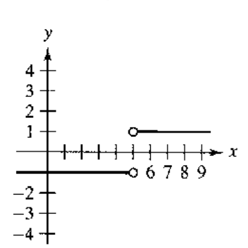


12. $\lim_{x\to1} f(x)$

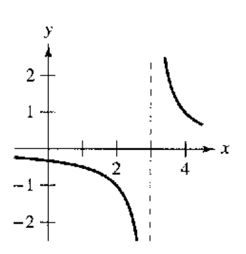
$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$



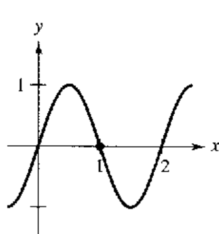
13. $\lim_{x\to5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$



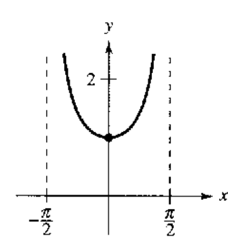
14. $\lim_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}$



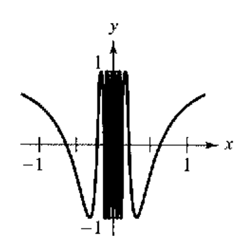
15. $\lim_{x\to1}\operatorname{sen}\pi x$



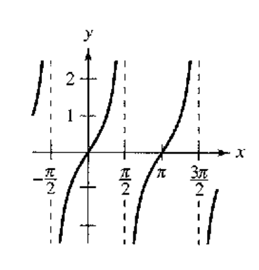
16. $\lim_{x\to0}\sec x$



17. $\lim_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$

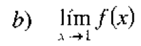


18. $\lim_{x\to\pi/2}\tan x$

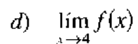


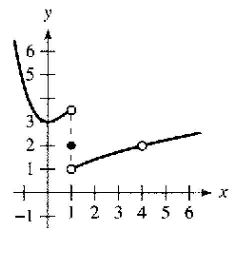
En los ejercicios 19 y 20, utilizar la gráfica de la función f para determinar si existe el valor de la cantidad dada. De ser así, ubicarla; si no existe, explicar por qué.

19. *a)* $f(1)$

b)  $\lim_{x\to1} f(x)$

c) $f(4)$

d)  $\lim_{x\to4} f(x)$



20. *a)* $f(-2)$

b) $\lim_{x\to-2} f(x)$

c) $f(0)$

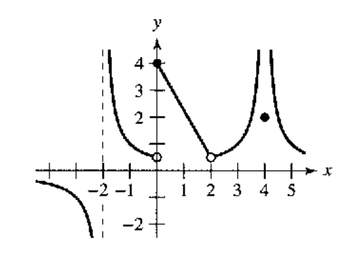
d) $\lim_{x\to0} f(x)$

e) $f(2)$

f) $\lim_{x\to2} f(x)$

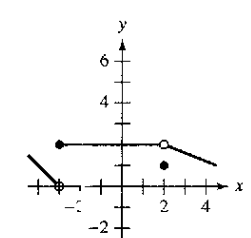
g) $f(4)$

h) $\lim_{x\to4} f(x)$

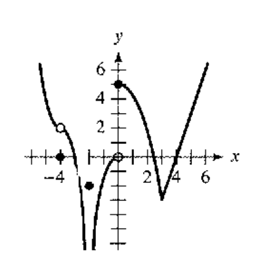


En los ejercicios 21 y 22, utilizar la gráfica de f con el fin de identificar los valores de c para los que existe el límite $\lim_{x\to c} f(x)$

21.



22.



En los ejercicios 23 y 24, dibujar la gráfica de f. Después identificar los valores de c para los que existe el límite $\lim_{x\to c} f(x)$

23. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2\\ 8-2x, & 2<x<4\\ 4, & x\ge 4\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x, & x<0\\ 1-\cos x, & 0\le x\le \pi\\ \cos x, & x>\pi\end{cases}$

En los ejercicios 25 y 26, construir una gráfica de una función f que satisfaga los valores indicados (existen muchas respuestas correctas).

25. $f(0)$ no está definido.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

26. $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

27. ***Modelo matemático*** El costo de una llamada telefónica entre dos ciudades es de \$0.75 por el primer minuto y \$0.50 por cada minuto o fracción adicional. Una fórmula para el costo está dada por

$$C(t) = 0.75 - 0.50[\![-(t-1)]\!]$$

donde t es el tiempo en minutos.

(*Nota*: $[\![x]\!]$ = mayor entero n tal que $n \le x$. Por ejemplo, $[\![3.2]\!] = 3$ y $[\![-1.6]\!] = -2$.)

a) Utilizar una computadora para representar la gráfica de la función de costo para $0 < t \le 5$.

b) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función a medida que t tiende a 3.5. Utilizar la gráfica y la tabla para encontrar

$$\lim_{t\to 3.5} C(t).$$

t	3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4
C				?			

c) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función a medida que t se aproxima a 3.

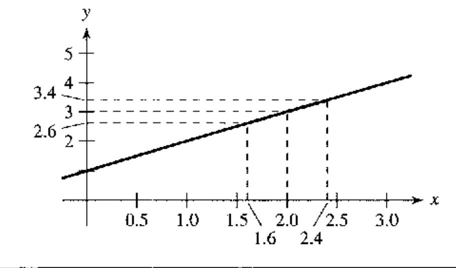
t	2	2.5	2.9	3	3.1	3.5	4
C				?			

¿Existe el límite de $C(t)$ cuando t se aproxima a 3? Explicar la respuesta.

28. Realizar de nuevo el ejercicio anterior, considerando ahora

$$C(t) = 0.35 - 0.12[\![-(t-1)]\!].$$

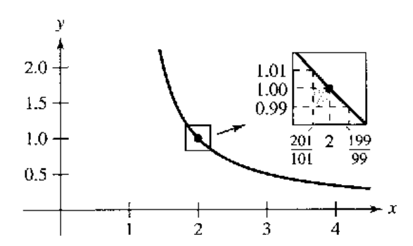
29. En la figura se muestra la gráfica de $f(x) = x + 1$. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < 0.4$.



30. La gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

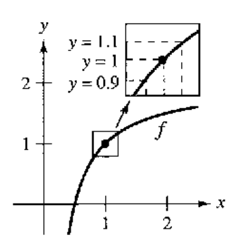
se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < 0.01$.



31. La gráfica de

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

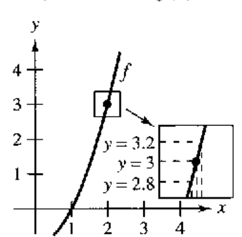
se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < 0.1$.



32. La gráfica de

$$f(x) = x^2 - 1$$

se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < 0.2$.



En los ejercicios 33 a 36, encontrar el límite L. Luego la $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 0.01$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

33. $\lim_{x\to 2} (3x + 2)$

34. $\lim_{x\to 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right)$

35. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3)$

36. $\lim_{x\to 5} (x^2 + 4)$

El símbolo ■ señala un ejercicio en el que se pide utilizar una computadora o un sistema simbólico de álgebra computarizado. La solución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología apropiada.

En los ejercicios 37 a 48, encontrar el límite L. Luego utilizar la definición ε-δ de límite para demostrar que el límite es L.

37. $\lim_{x\to 2} (x + 3)$

38. $\lim_{x\to -3} (2x + 5)$

39. $\lim_{x\to -4} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

40. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{3}x + 9\right)$

41. $\lim_{x\to 6} 3$

42. $\lim_{x\to 2} (-1)$

43. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$

44. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$

45. $\lim_{x\to -2} |x - 2|$

46. $\lim_{x\to 3} |x - 3|$

47. $\lim_{x\to 1} (x^2 + 1)$

48. $\lim_{x\to -3} (x^2 + 3x)$

Redacción **En los ejercicios 49 a 52, representar la función con una computadora y estimar el límite (si existe). ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Puede detectar un posible peligro en la determinación del dominio mediante un mero análisis de la gráfica que genera la computadora? Escribir unas líneas acerca de la importancia de examinar una función de manera analítica además de hacerlo gráficamente.**

49. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$

$\lim_{x\to 4} f(x)$

50. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

51. $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

$\lim_{x\to 9} f(x)$

52. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

Desarrollo de conceptos

53. Escribir una breve descripción de lo que significa la notación $\lim_{x\to 8} f(x) = 25$.

54. Si $f(2) = 4$, ¿se puede sacar alguna conclusión con respecto al límite de $f(x)$ a medida que x tiende a 2? Explicar el razonamiento.

55. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4, ¿se puede sacar alguna conclusión con respecto a $f(2)$? Explicar el razonamiento.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

56. Identificar tres tipos de comportamiento relacionados con la inexistencia de un límite. Ejemplificar cada tipo con una gráfica de una función.

57. ***Joyería*** Un joyero ajusta un anillo de tal manera que su circunferencia interna es de 6 cm.

a) ¿Cuál es el radio del anillo?

b) Si la circunferencia interna del anillo puede variar entre 5.5 y 6.5 centímetros, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición ε-δ de límite para describir esta situación. Identificar ε y δ.

58. ***Deportes*** Un fabricante de artículos deportivos diseña una pelota de golf que tiene un volumen de 2.48 pulgadas cúbicas.

a) ¿Cuál es el radio de la pelota de golf?

b) Si el volumen de la pelota puede variar entre 2.45 y 2.51 pulgadas cúbicas, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición ε-δ de límite para describir esta situación. Identificar ε y δ.

59. Considerar la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

mediante la evaluación de f con valores de x cercanos a 0. Construya la gráfica de f.

60. Considerar la función

$$f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}.$$

calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$$

mediante la evaluación de f con valores de x cercanos a 0. Construir la gráfica de f.

61. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0.001$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < 0.001.$$

Utilizar una computadora para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encontrar un intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del miembro de la derecha.

62. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 3$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0.001$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < 0.001.$$

Utilizar una computadora para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encontrar un intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del miembro de la derecha.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 66, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

63. Si f no está definida en $x = c$, no existe el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.

64. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es 0, debe de existir un número k tal que $f(k) < 0.001$.

65. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

66. Si $\lim_{x\to c} f(c) = L$, entonces $f(c) = L$.

67. Considerar la función $f(x) = \sqrt{x}$.

a) ¿Es $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = 0.5$ una afirmación verdadera? Explicar la respuesta.

b) ¿Es $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = 0$ una afirmación verdadera? Explicar la respuesta.

68. ***Redacción*** La definición de límite vista con anterioridad requiere que f sea una función definida en un intervalo abierto que incluya a c, excepto posiblemente en c. ¿Por qué es necesario este requisito?

69. Demostrar que si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, ese límite debe ser único. [*Sugerencia*: Sea

$$\lim_{x\to c} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} f(x) = L_2$$

y demostrar que $L_1 = L_2$.]

70. Considerar la recta $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$. Aplicando la definición ε-δ de límite, demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = mc + b$.

71. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ es equivalente a $\lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0$.

72. *a*) Dado que

$$\lim_{x\to 0} (3x+1)(3x-1)x^2 + 0.01 = 0.01$$

demostrar que existe un intervalo abierto (a, b) que contiene al 0, tal que $(3x + 1)(3x - 1)x^2 + 0.01 > 0$ para todas las $x \neq 0$ en (a, b).

b) Dado que $\lim_{x\to c} g(x) = L$, donde $L > 0$, demostrar que existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, tal que $g(x) > 0$ para todos los $x \neq c$ en (a, b).

73. ***Programación*** En una computadora programable, escribir un programa que estime $\lim_{x\to c} g(x)$.

Suponer que el programa sólo se aplicará a funciones cuyo límite existe cuando x se aproxima a c. Sea $y_1 = f(x)$ y generar dos listas cuyas entradas formen los pares ordenados

$$(c \pm [0.1]^n, f(c \pm [0.1]^n))$$

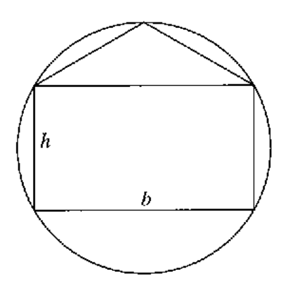
para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.

74. ***Programación*** Utilizar el programa elaborado en el ejercicio 73 para estimar el límite

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}.$$

Preparación del examen Putnam

75. Inscribir en un círculo con radio 1 un rectángulo con base b y altura h, y un triángulo isósceles con base b, como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de h tienen la misma área el rectángulo y el triángulo?



76. Un cono recto tiene una base con radio 1 y una altura de 3. Se inscribe un cubo dentro de él, de tal manera que una de las caras del cubo queda contenida en la base del cono. ¿Cuál es la longitud lateral del cubo?

Sección 1.3 Cálculo analítico de límites

- **Evaluar un límite usando las propiedades de los límites.**
- **Desarrollar y usar una estrategia para el cálculo de límites.**
- **Evaluar un límite usando técnicas de cancelación y de racionalización.**
- **Evaluar un límite usando el teorema del encaje o teorema del emparedado.**

Propiedades de los límites

En la sección 1.2, se vio que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c no depende del valor de f en $x = c$. Sin embargo, puede darse el caso de que este límite sea $f(c)$. En esta situación, se puede evaluar el límite por **sustitución directa**. Esto es:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c). \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } c.$$

Las funciones con este *buen comportamiento* son **continuas en c**. En la sección 1.4, se examinará con más detalle este concepto.

TEOREMA 1.1 Algunos límites básicos

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

1. $\lim_{x \to c} b = b$ **2.** $\lim_{x \to c} x = c$ **3.** $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

Figura 1.16

Demostración Para comprobar la propiedad 2 del teorema 1.1, es necesario demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta < 0$ tal que $|x - c| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para lograrlo, se hace $\delta = \varepsilon$. Entonces, la segunda desigualdad lleva implícita a la primera, como se muestra en la figura 1.16. Con esto se realiza la comprobación. (Las comprobaciones de las demás propiedades de los límites de esta sección se encuentran en el apéndice A o se analizan en los ejercicios.)

NOTA Cuando se tengan nuevas notaciones o símbolos en matemáticas, hay que cerciorarse de conocer cómo se leen. Por ejemplo, el límite del ejemplo 1c se lee "el límite de x^2 cuando x se aproxima a 2 es 4".

EJEMPLO 1 Evaluación de límites básicos

a) $\lim_{x \to 2} 3 = 3$ *b)* $\lim_{x \to -4} x = -4$ *c)* $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$

TEOREMA 1.2 Propiedades de los límites

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim_{x \to c} [b f(x)] = bL$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = LK$

4. Cociente: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencias: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

EJEMPLO 2 Límite de un polinomio

$$\lim_{x\to 2}(4x^2+3) = \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3 \qquad \text{Propiedad 2.}$$
$$= 4\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + \lim_{x\to 2} 3 \qquad \text{Propiedad 1.}$$
$$= 4(2^2) + 3 \qquad \text{Ejemplo 1.}$$
$$= 19 \qquad \text{Simplificando.}$$

En el ejemplo 2, se observa que el límite (cuando $x \to 2$) de la *función polinómica* $p(x) = 4x^2 + 3$ es simplemente el valor de p en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19.$$

Esta propiedad de *sustitución directa* es válida para todas las funciones polinómicas y racionales cuyos denominadores no se anulen en el punto considerado.

TEOREMA 1.3 Límites de las funciones polinómicas y racionales

Si p es una función polinómica y c un número real, entonces:

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c).$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

EJEMPLO 3 Límite de una función racional

Encontrar el límite: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1}$.

Solución Puesto que el denominador no es 0 cuando $x = 1$, se puede aplicar el teorema 1.3 para obtener

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Las funciones polinómicas y racionales son dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas. El siguiente teorema se refiere al límite del tercer tipo de función algebraica: las que contienen un radical. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

EL SÍMBOLO DE RAÍZ CUADRADA
El primer uso de un símbolo para denotar a la raíz cuadrada data del siglo XVI. Al principio, los matemáticos emplearon el símbolo ✓, que tiene sólo dos trazos. Éste se eligió por su parecido con una *r* minúscula, para representar la palabra latina *radix*, que significa raíz.

TEOREMA 1.4 Límite de una función radical

Si n es un entero positivo, el siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

El siguiente teorema aumentará notablemente su capacidad para calcular límites, ya que muestra cómo tratar el límite de una función compuesta. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.5 Límite de una función compuesta

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

EJEMPLO 4 Límite de una función compuesta

a) Puesto que

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2.$$

b) Puesto que

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por medio de la sustitución directa. Las seis funciones trigonométricas básicas también cuentan con esta deseable propiedad, como se muestra en el siguiente teorema (presentado sin demostración).

TEOREMA 1.6 Límites de funciones trigonométricas*

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.

1. $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$	**2.** $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$
3. $\lim_{x \to c} \tan x = \tan c$	**4.** $\lim_{x \to c} \cot x = \cot c$
5. $\lim_{x \to c} \sec x = \sec c$	**6.** $\lim_{x \to c} \csc x = \csc c$

EJEMPLO 5 Límites de funciones trigonométricas

a) $\lim_{x \to 0} \tan x = \tan(0) = 0$

b) $\lim_{x \to \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x \to \pi} x\right)\left(\lim_{x \to \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = 0^2 = 0$

* En España las funciones se abrevian así: seno = sen; coseno = cos; tangente = tg; cotangente = ctg; secante = sec; cosecante = cosec.

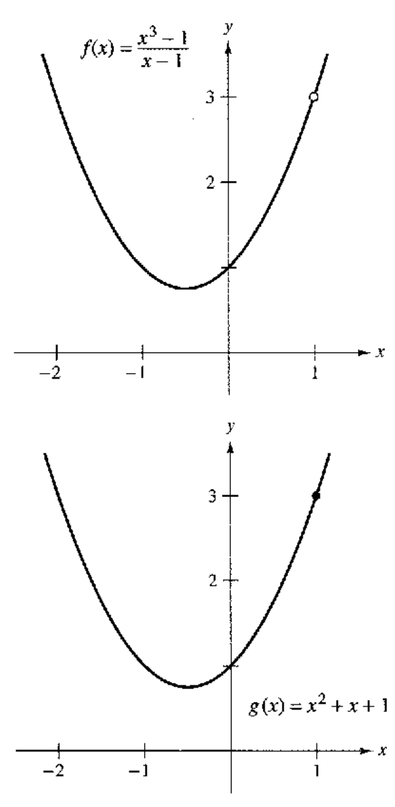
Una estrategia para el cálculo de límites

En las tres páginas previas, se han estudiado diversos tipos de funciones cuyos límites pueden calcularse mediante sustitución directa, lo que aunado al teorema siguiente, permiten desarrollar una estrategia para calcular límites. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.7 Funciones que coinciden en todo salvo en un punto

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x).$$



f y g coinciden salvo en un punto
Figura 1.17

EJEMPLO 6 Cálculo del límite de una función

Encontrar el límite: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Solución Sea $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$. Factorizando y cancelando factores, f se puede escribir como

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^2 + x + 1 = g(x), \qquad x \neq 1.$$

De tal modo, para todos los valores de x distintos de $x = 1$, las funciones f y g coinciden, como se muestra en la figura 1.17. Puesto que el $\lim_{x\to c} g(x)$ existe, se puede aplicar el teorema 1.7 y concluir que f y g tienen el mismo límite en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \quad \text{Factorizar.}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \quad \text{Cancelar factores idénticos o factores comunes.}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) \quad \text{Aplicar el teorema 1.7.}$$
$$= 1^2 + 1 + 1 \quad \text{Usar sustitución directa.}$$
$$= 3 \quad \text{Simplificar.}$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se aplique esta estrategia al cálculo de límites, recordar que algunas funciones no tienen límite (cuando x se aproxima a c). Por ejemplo, el siguiente límite no existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

Una estrategia para el cálculo de límites

1. Aprenda a reconocer cuáles límites pueden evaluarse por medio de la sustitución directa (estos límites se enumeran en los teoremas 1.1 a 1.6).
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c *no se puede evaluar* por sustitución directa, tratar de encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = c$. [Seleccionar una g tal que el límite de $g(x)$ *se pueda evaluar* por medio de la sustitución directa.]
3. Aplicar el teorema 1.7 para concluir *de manera analítica* que
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = g(c).$$
4. Utilizar una *gráfica* o una *tabla* para respaldar la conclusión.

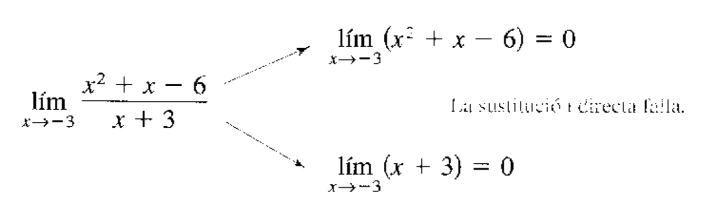
Técnicas de cancelación y de racionalización

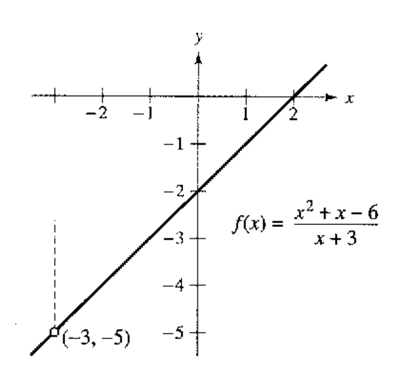
En los ejemplos 7 y 8 se muestran dos técnicas para calcular límites de manera analítica. La primera utiliza la cancelación de factores comunes y la segunda, la racionalización del numerador de una fracción.

EJEMPLO 7 Técnica de cancelación

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$.

Solución Aunque se trata del límite de una función racional, *no se puede* aplicar el teorema 1.3 debido a que el límite del denominador es 0.





f no está definida para $x \neq -3$
Figura 1.18

Puesto que el límite del numerador también es 0, numerador y denominador tienen un *factor común*: $(x + 3)$. Por tanto, para toda $x \neq -3$, se cancela este factor para obtener

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} = x - 2 = g(x), \qquad x \neq -3.$$

Empleando el teorema 1.7, se sigue que

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3}(x - 2) \qquad \text{Aplicar el teorema 1.7.}$$
$$= -5. \qquad \text{Usar sustitución directa.}$$

Este resultado se muestra de forma gráfica en la figura 1.18. Observar que la gráfica de la función *f* coincide con la de la función $g(x) = x - 2$, sólo que la gráfica de *f* tiene un hueco en el punto $(-3, -5)$.

NOTA En la solución del ejemplo 7, cerciorarse de distinguir la utilidad del teorema de factorización del álgebra. Este teorema establece que si c es un cero de una función polinómica, entonces $(x - c)$ es un factor del polinomio. Por tanto, si se aplica sustitución directa a una función racional y se obtiene

$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \frac{0}{0}$$

puede concluirse que $(x - c)$ es un factor común de $p(x)$ y de $q(x)$.

En el ejemplo 7, la sustitución directa produce la forma fraccionaria 0/0, que carece de significado, denominada **forma indeterminada** porque no es posible (a partir sólo de esa forma) determinar el límite. Si al intentar evaluar un límite se llega a esta forma, debe reescribirse la fracción de modo que el nuevo denominador no tenga 0 como límite. Una manera de lograrlo consiste en *cancelar los factores idénticos o comunes*, como se muestra en el ejemplo 7. Otra manera consiste en racionalizar el numerador, como se hace en el ejemplo 8.

$-3-\delta$ $-5+\varepsilon$ $-3+\delta$ $-5-\varepsilon$
Irregularidades
(−3, −5)

Gráfica incorrecta de *f*
Figura 1.19

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Puesto que las gráficas de

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x - 2$$

difieren sólo en el punto $(-3, -5)$, la configuración normal de una calculadora gráfica podría no distinguir entre ellas. No obstante, debido a la configuración de puntos ("pixeles") y a los errores de redondeo, quizá sea posible encontrar configuraciones de pantalla que distingan las gráficas. De manera específica, aplicando el *zoom* repetidas veces cerca del punto $(-3, -5)$ en la gráfica de *f*, la calculadora podría mostrar fallas o irregularidades que no existen en la gráfica real (ver la figura 1.19). Modificando la configuración de pantalla, podría obtenerse la gráfica correcta de *f*.

EJEMPLO 8 Técnica de racionalización

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

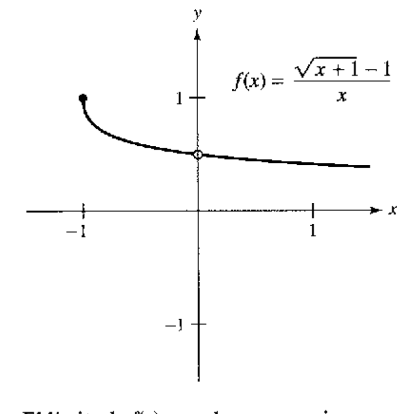
Solución Utilizando la sustitución directa, se obtiene la forma indeterminada 0/0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla.

En este caso, se puede reescribir la fracción racionalizando el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \\ &= \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

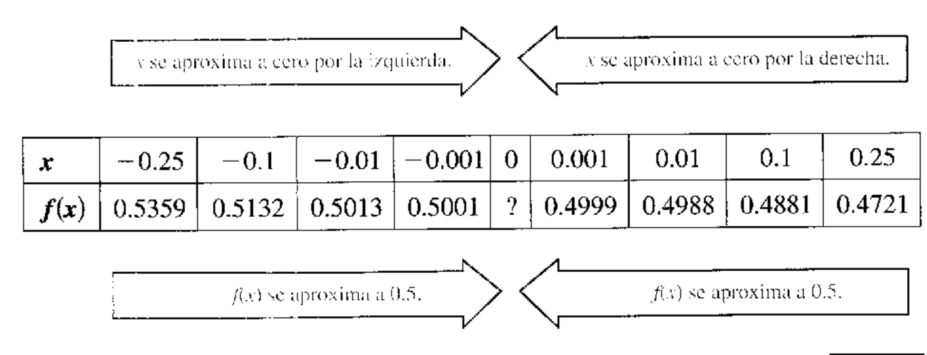


El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es $\frac{1}{2}$
Figura 1.20

Ahora, empleando el teorema 1.7, se puede evaluar el límite como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

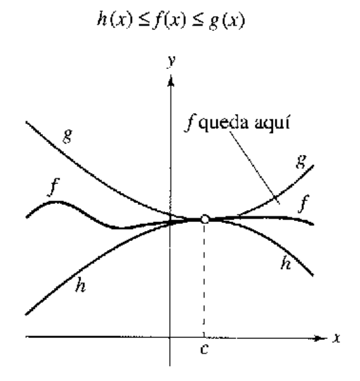
Una tabla o una gráfica pueden servir para fortalecer la conclusión de que el límite es $\frac{1}{2}$ (ver la figura 1.20).



x	−0.25	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
$f(x)$	0.5359	0.5132	0.5013	0.5001	?	0.4999	0.4988	0.4881	0.4721

NOTA La técnica de racionalización en el cálculo de límites se basa en multiplicar por una forma conveniente de 1. En el ejemplo 8, la forma apropiada es

$$1 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}.$$



Teorema del encaje o teorema del emparedado
Figura 1.21

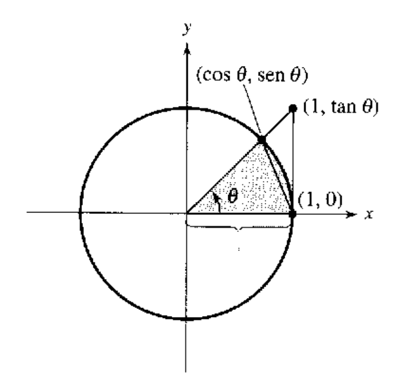
Teorema del encaje o teorema del emparedado

El siguiente teorema se refiere al límite de una función que está "encajada" o "emparedada" entre otras dos, cada una de las cuales tiene el mismo límite en un valor dado de x, como se muestra en la figura 1.21 (ver la demostración de este teorema en el apéndice A).

> **TEOREMA 1.8 Teorema del encaje o teorema del emparedado**
>
> Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c, por la posible excepción de la propia c, y si
>
> $$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$
>
> entonces el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

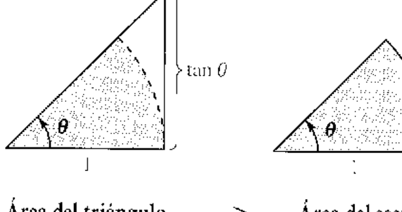
En la demostración del teorema 1.9 se aprecia la utilidad del teorema del encaje o del emparedado.

> **TEOREMA 1.9 Dos límites trigonométricos especiales**
>
> **1.** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ **2.** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$



Sector circular utilizado para demostrar el teorema 1.9
Figura 1.22

Demostración Con el fin de evitar la confusión entre dos usos distintos de x, se presenta la demostración utilizando la variable θ, donde θ denota un ángulo agudo positivo *medido en radianes*. En la figura 1.22 se muestra un sector circular encajado o emparedado entre dos triángulos.



Área del triángulo	$\geq$	Área del sector	$\geq$	Área del triángulo
$\frac{\tan \theta}{2}$	$\geq$	$\frac{\theta}{2}$	$\geq$	$\frac{\operatorname{sen} \theta}{2}$

Multiplicando cada expresión por $2/\operatorname{sen} \theta$ resulta

$$\frac{1}{\cos \theta} \geq \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} \geq 1$$

tomando sus recíprocos e invirtiendo las desigualdades se obtiene:

$$\cos \theta \leq \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leq 1.$$

Puesto que $\cos \theta = \cos(-\theta)$ y $(\operatorname{sen} \theta)/\theta = [\operatorname{sen}(-\theta)]/(-\theta)$, se concluye que esta desigualdad es válida para *todo* θ distinto de cero dentro del intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Por último, dado que $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$ y $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$, se puede aplicar el teorema del encaje o teorema del emparedado para concluir que $\lim_{\theta \to 0} (\operatorname{sen} \theta)/\theta = 1$. La demostración del segundo límite se deja como ejercicio para el lector (ver el ejercicio 120).

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para encontrar más información sobre la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, ver el artículo "The Function $(\sin x)/x$" de William B. Gearhart y Harris S. Schultz en *The College Mathematics Journal.*

EJEMPLO 9 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

Solución La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, se puede escribir $\tan x$ como $(\text{sen } x)/(\cos x)$ y obtener

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

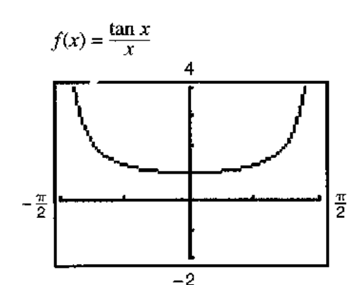
Ahora, puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

se puede obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} &= \left(\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)\\ &= (1)(1)\\ &= 1.\end{aligned}$$

(Ver la figura 1.23.)



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 1
Figura 1.23

EJEMPLO 10 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{x}$.

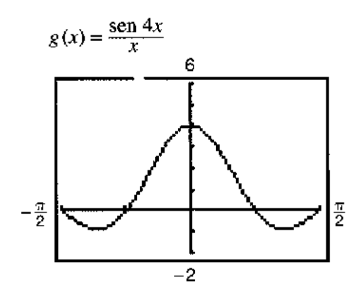
Solución La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, se puede escribir el límite como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{x} = 4\left(\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x}\right). \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 4.}$$

Haciendo ahora $y = 4x$ y observando que $x \to 0$ si y sólo si $y \to 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{x} &= 4\left(\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x}\right)\\ &= 4\left(\lim_{y \to 0} \frac{\text{sen } y}{y}\right)\\ &= 4(1)\\ &= 4.\end{aligned}$$

(Ver la figura 1.24.)



El límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 4
Figura 1.24

TECNOLOGÍA Utilizar una calculadora para confirmar los límites de los ejemplos y conjunto de ejercicios. Por ejemplo, las figuras 1.23 y 1.24 muestran las gráficas de:

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\text{sen } 4x}{x}.$$

Observar que la primera gráfica parece contener el punto (0, 1) y la segunda al punto (0, 4), lo cual respalda las conclusiones obtenidas en los ejemplos 9 y 10.

Ejercicios de la sección 1.3

En los ejercicios 1 a 4, utilizar una computadora para representar gráficamente la función y estimar los límites de manera visual.

1. $h(x) = x^2 - 5x$
   a) $\lim\limits_{x\to 5} h(x)$
   b) $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

2. $g(x) = \dfrac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$
   a) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$
   b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

3. $f(x) = x\cos x$
   a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
   b) $\lim\limits_{x\to \pi/3} f(x)$

4. $f(t) = t|t - 4|$
   a) $\lim\limits_{t\to 4} f(t)$
   b) $\lim\limits_{t\to -1} f(t)$

En los ejercicios 5 a 22, calcular el límite.

5. $\lim\limits_{x\to 2} x^4$
6. $\lim\limits_{x\to -2} x^3$
7. $\lim\limits_{x\to 0} (2x - 1)$
8. $\lim\limits_{x\to -3} (3x + 2)$
9. $\lim\limits_{x\to -3} (x^2 + 3x)$
10. $\lim\limits_{x\to 1} (-x^2 + 1)$
11. $\lim\limits_{x\to -3} (2x^2 + 4x + 1)$
12. $\lim\limits_{x\to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$
13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2}{x + 2}$
15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 3}{x^2 + 4}$
16. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x - 3}{x + 5}$
17. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{5x}{\sqrt{x + 2}}$
18. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x - 4}$
19. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x + 1}$
20. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x + 4}$
21. $\lim\limits_{x\to -4} (x + 3)^2$
22. $\lim\limits_{x\to 0} (2x - 1)^3$

En los ejercicios 23 a 26, encontrar los límites.

23. $f(x) = 5 - x,\ g(x) = x^3$
    a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

24. $f(x) = x + 7,\ g(x) = x^2$
    a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3} g(f(x))$

25. $f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x + 1}$
    a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

26. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x + 6}$
    a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 21} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 4} g(f(x))$

En los ejercicios 27 a 36, encontrar el límite de la función trigonométrica.

27. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x$
28. $\lim\limits_{x\to \pi} \tan x$
29. $\lim\limits_{x\to 2} \cos \dfrac{\pi x}{3}$
30. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$
31. $\lim\limits_{x\to 0} \sec 2x$
32. $\lim\limits_{x\to \pi} \cos 3x$
33. $\lim\limits_{x\to 5\pi/6} \operatorname{sen} x$
34. $\lim\limits_{x\to 5\pi/3} \cos x$
35. $\lim\limits_{x\to 3} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$
36. $\lim\limits_{x\to 7} \sec\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

En los ejercicios 37 a 40, utilizar la información que se expone para evaluar los límites.

37. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 2$
    $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 3$
    a) $\lim\limits_{x\to c} [5g(x)]$
    b) $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$
    c) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)g(x)]$
    d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

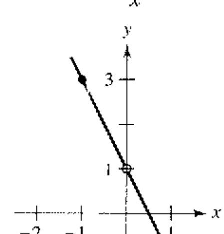
38. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \frac{3}{2}$
    $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \frac{1}{2}$
    a) $\lim\limits_{x\to c} [4f(x)]$
    b) $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$
    c) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)g(x)]$
    d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

39. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 4$
    a) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^3$
    b) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt{f(x)}$
    c) $\lim\limits_{x\to c} [3f(x)]$
    d) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^{3/2}$

40. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 27$
    a) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[3]{f(x)}$
    b) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{18}$
    c) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^2$
    d) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^{2/3}$

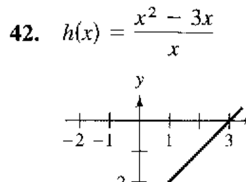
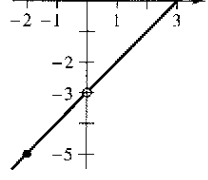
En los ejercicios 41 a 44, utilizar la gráfica para determinar el límite (si existe) de manera visual. Escribir una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto.

41. $g(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{x}$



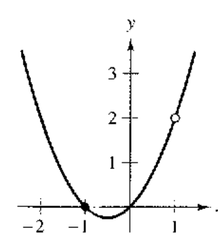
a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

42. $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

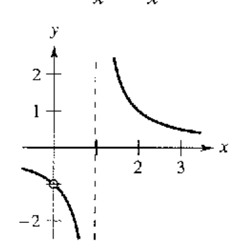
a) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

43. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$



a) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

44. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar el límite de la función (si existe). Escribir una función más simple que coincida con la dada salvo en un punto. Utilizar una computadora para confirmar el resultado.

45. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

46. $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

47. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

48. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

En los ejercicios 49 a 62, encontrar el límite (si existe).

49. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

50. $\lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4}$

51. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$

52. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$

53. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$

54. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

55. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$

56. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

57. $\lim_{x \to 0} \frac{[1/(3 + x)] - (1/3)}{x}$

58. $\lim_{x \to 0} \frac{[1/(x + 4)] - (1/4)}{x}$

59. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$

60. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

61. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{\Delta x}$

62. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

Análisis gráfico, numérico y analítico **En los ejercicios 63 a 66, utilizar una computadora para representar gráficamente la función y estimar el límite. Emplear una tabla para respaldar la conclusión. Posteriormente, calcular el límite empleando métodos analíticos.**

63. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

64. $\lim_{x \to 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{x - 16}$

65. $\lim_{x \to 0} \frac{[1/(2 + x)] - (1/2)}{x}$

66. $\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$

En los ejercicios 67 a 78, determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

67. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x}$

68. $\lim_{x \to 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x}$

69. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{2x^2}$

70. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta \tan \theta}{\theta}$

71. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

72. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x}$

73. $\lim_{h \to 0} \frac{(1 - \cos h)^2}{h}$

74. $\lim_{\phi \to \pi} \phi \sec \phi$

75. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\cot x}$

76. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

77. $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$

78. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ $\left[\textit{Sugerencia}\text{: Encontrar } \lim_{x \to 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\left(\frac{3x}{3 \operatorname{sen} 3x}\right).\right]$

Análisis gráfico, numérico y analítico **En los ejercicios 79 a 82, utilizar una computadora para representar gráficamente la función y estimar el límite. Emplear una tabla para respaldar la conclusión. Posteriormente, calcular el límite empleando métodos analíticos.**

79. $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}$

80. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x^2}$

81. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

82. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

En los ejercicios 83 a 86, encontrar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

83. $f(x) = 2x + 3$

84. $f(x) = \sqrt{x}$

85. $f(x) = \frac{4}{x}$

86. $f(x) = x^2 - 4x$

En los ejercicios 87 y 88, utilizar el teorema del encaje o teorema del emparedado para calcular $\lim_{x \to c} f(x)$.

87. $c = 0$
$4 - x^2 \leq f(x) \leq 4 + x^2$

88. $c = a$
$b - |x - a| \leq f(x) \leq b + |x - a|$

En los ejercicios 89 a 94, utilizar una computadora para representar gráficamente la función dada y las ecuaciones $y = |x|$ **y** $y = -|x|$ **en una misma ventana. Usando las gráficas para visualizar el teorema del encaje o del emparedado, calcular** $\lim_{x \to 0} f(x)$

89. $f(x) = x \cos x$

90. $f(x) = |x \operatorname{sen} x|$

91. $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$

92. $f(x) = |x| \cos x$

93. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

94. $h(x) = x \cos \frac{1}{x}$

Desarrollo de conceptos

95. En el contexto del cálculo de límites, analizar qué se quiere decir mediante las funciones que concuerdan salvo en un punto.

96. Elaborar un ejemplo de funciones que concuerdan salvo en un punto.

97. ¿Qué se quiere decir con indeterminación o forma indeterminada?

98. Explicar el teorema del encaje o teorema del emparedado.

99. ***Redacción*** Utilizar una computadora para hacer la representación gráfica de

$$f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1.$$

100. ***Redacción*** Utilizar una computadora para graficar

$$f(x) = x, \; g(x) = \text{sen}^2 x, \; \text{y} \; h(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

Objeto en caída libre **En los ejercicios 101 y 102, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + 1\,000$, que da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 1 000 pies. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t \to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

101. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 1 000 pies, ¿a qué velocidad estará cayendo luego de 5 segundos?

102. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 1 000 pies, ¿cuánto tiempo tardará ésta en llegar al suelo? ¿A qué velocidad se producirá el impacto?

Objeto en caída libre **En los ejercicios 103 y 104, utilizar la función de posición $s(t) = -4.9t^2 + 150$, que da la altura (en metros) de un objeto que cae desde una altura de 150 m. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t \to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

103. Determinar la velocidad del objeto cuando $t = 3$.

104. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

105. Encontrar dos funciones f y g tales que $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existan, pero sí $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$.

106. Demostrar que si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe y $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim_{x \to c} g(x)$ tampoco existe.

107. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.1.

108. Demostrar la propiedad 3 del teorema 1.1. (Se puede utilizar la propiedad 3 del teorema 1.2.)

109. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.2.

110. Demostrar que si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$.

111. Demostrar que si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $|g(x)| = M$ para un número fijo M y todas las $x \neq c$, entonces $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$.

112. *a)* Demostrar que si $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = 0$. (*Nota*: Este ejercicio es inverso al del problema 110.)

b) Demostrar que si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ entonces $\lim_{x \to c} |f(x)| = |L|$. [*Sugerencia*: Utilizar la desigualdad $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$.]

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 113 a 118, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

113. $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = 1$

114. $\lim_{x \to \pi} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

115. Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales distintos a $x = 0$, y $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x) = L$.

116. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

117. $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, donde $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

118. Si $f(x) < g(x)$ para todas las $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$.

119. ***Para pensar*** Encontrar una función f que muestre que el recíproco del ejercicio 112*b* no es verdadero. [*Sugerencia*: Buscar una función f tal que $\lim_{x \to c} |f(x)| = |L|$, pero donde $\lim_{x \to c} f(x)$ no exista.]

120. Demostrar la segunda parte del teorema 1.9 probando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

121. Sean $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Calcular (si es posible) $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} g(x)$.

122. ***Razonamiento gráfico*** Considerar $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$.

a) Determinar el dominio de f.

b) Utilizar una computadora para hacer la representación gráfica de f. ¿Resulta evidente el dominio de f a partir de la gráfica? Si no es así, explicar por qué.

c) Utilizar la gráfica f para calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

d) Confirmar la respuesta del apartado *c)* utilizando el método analítico.

123. ***Aproximación***

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

b) Utilizar al resultado del apartado anterior para obtener la aproximación $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ para x cercanas a 0.

c) Aplicar el resultado del apartado *b)* para estimar cos (0.1).

d) Utilizar una computadora para estimar cos (0.1) con cuatro decimales. Comparar el resultado con el del apartado *c)*.

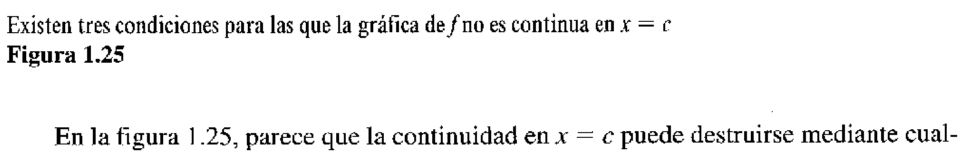
124. ***Para pensar*** Al utilizar un dispositivo tecnológico para generar una tabla con el fin de estimar $\lim_{x \to 0} [(\text{sen}\, x)/x]$, un estudiante saca en conclusión que el límite, y no 1, era 0.01745. Determinar la probable causa del error.

Sección 1.4 Continuidad y límites laterales o unilaterales

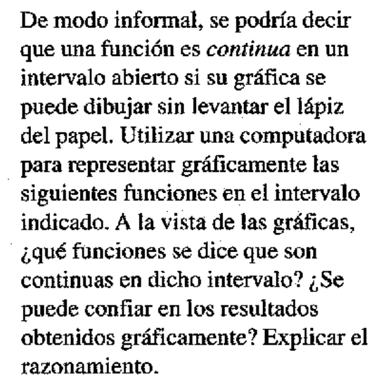
- **Determinar la continuidad en un punto y en un intervalo abierto.**
- **Determinar límites laterales o unilaterales y continuidad en un intervalo cerrado.**
- **Usar propiedades de continuidad.**
- **Comprender y aplicar el teorema del valor intermedio.**

Continuidad en un punto y en un intervalo abierto

En matemáticas, el término *continuo* tiene el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir, de manera informal, que una función es continua en $x = c$ significa que no hay interrupción de la gráfica de f en c. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en c. En la figura 1.25 se identifican tres valores de x en los que la gráfica de f *no es continua*. En los demás puntos del intervalo (a, b), la gráfica de f no sufre interrupciones y es **continua**.



Existen tres condiciones para las que la gráfica de f no es continua en $x = c$
Figura 1.25



De modo informal, se podría decir que una función es *continua* en un intervalo abierto si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Utilizar una computadora para representar gráficamente las siguientes funciones en el intervalo indicado. A la vista de las gráficas, ¿qué funciones se dice que son continuas en dicho intervalo? ¿Se puede confiar en los resultados obtenidos gráficamente? Explicar el razonamiento.

Función	*Intervalo*
a) $y = x^2 + 1$	$(-3, 3)$
b) $y = \dfrac{1}{x-2}$	$(-3, 3)$
c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$(-\pi, \pi)$
d) $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$	$(-3, 3)$
e) $y = \begin{cases} 2x-4, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$	$(-3, 3)$

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para obtener más información sobre el concepto de continuidad, ver el artículo "Leibniz and the Spell of the Continuous" de Hardy Grant en *The College Mathematics Journal.*

En la figura 1.25, parece que la continuidad en $x = c$ puede destruirse mediante cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no está definida en $x = c$.
2. No existe el límite de $f(x)$ en $x = c$.
3. El límite de $f(x)$ en $x = c$ existe, pero no es igual a $f(c)$.

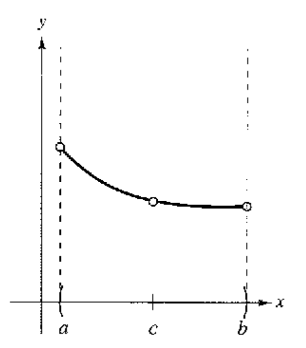
Si no se da *ninguna* de las tres condiciones anteriores, se dice que la función f es **continua en c**, como lo señala la importante definición que sigue.

Definición de continuidad

Continuidad en un punto: Una función f es **continua en c** si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

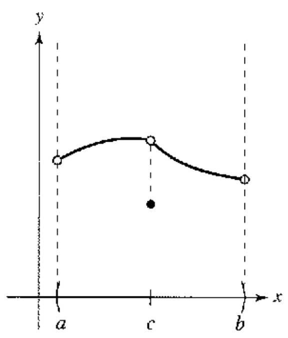
1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es **continua en un intervalo abierto (a, b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta de los números reales enteros $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes**.



a) Discontinuidad evitable o removible

b) Discontinuidad inevitable o no removible



c) Discontinuidad evitable o removible
Figura 1.26

Considerar un intervalo abierto I que contiene un número real c. Si una función f está definida en I (excepto, posiblemente, en c) y no es continua en c, se dice que f tiene una **discontinuidad** en c. Las discontinuidades se clasifican en dos categorías: **evitables o removibles** e **inevitables o no removibles**. Se dice que una discontinuidad en c es evitable o removible si f se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente $f(c)$. Por ejemplo, las funciones en las figuras 1.26*a* y *c* presentan discontinuidades evitables o removibles en c, mientras que la de la figura 1.26*b* presenta una discontinuidad inevitable o no removibles en c.

EJEMPLO 1 Continuidad de una función

Analizar la continuidad de cada función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b)* $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *c)* $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ *d)* $y = \operatorname{sen} x$

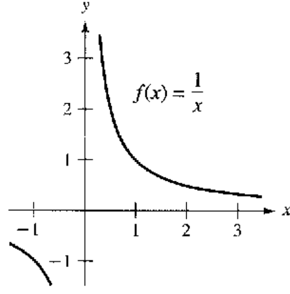
Solución

a) El dominio de f lo constituyen todos los números reales distintos de cero. A partir del teorema 1.3, se puede concluir que f es continua en todos los valores de x de su dominio. En $x = 0$, f tiene una discontinuidad inevitable, como se muestra en la figura 1.27*a*. En otras palabras, no hay modo de definir $f(0)$ para hacer que la nueva función sea continua en $x = 0$.

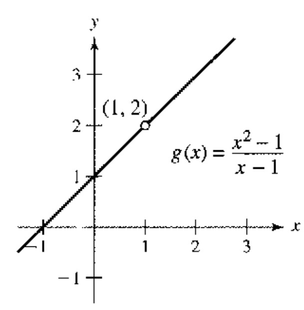
b) El dominio de g lo constituyen todos los números reales excepto $x = 1$. Aplicando el teorema 1.3, se puede concluir que g es continua en todos los valores de x de su dominio. En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad evitable, como se muestra en la figura 1.27*b*. Si $g(1)$ se define como 2, la "nueva" función es continua para todos los números reales.

c) El dominio de h está formado por todos los números reales. La función h es continua en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, y puesto que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$, h es continua en toda la recta real, como ilustra la figura 1.27*c*.

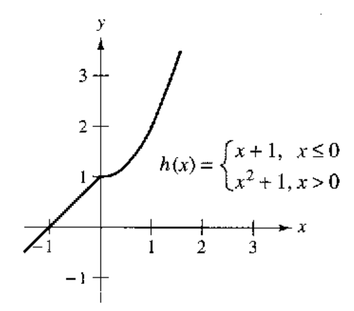
d) El dominio de y está conformado por todos los números reales. Del teorema 1.6, se puede concluir que la función es continua en todo su dominio $(-\infty, \infty)$, como se muestra en la figura 1.27*d*.



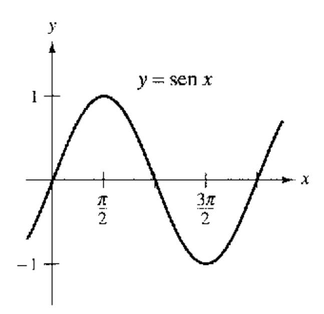
a) Discontinuidad inevitable o no removible en $x = 0$



b) Discontinuidad evitable o removible en $x = 1$

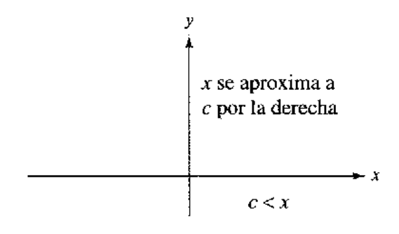


c) Continua en toda la recta real

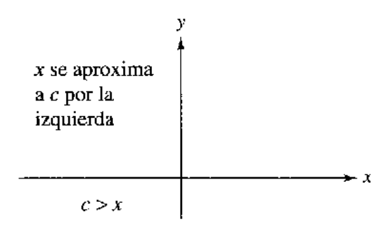


d) Continua en toda la recta real
Figura 1.27

AYUDA DE ESTUDIO Algunas veces se llama a la función del ejemplo 1*a* "discontinua". Pero se ha encontrado que esta terminología es confusa. Es preferible decir que la función es discontinua o mejor que es una discontinuidad en $x = 0$.



a) Límite por la derecha



b) Límite por la izquierda
Figura 1.28

Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado

Para comprender la noción de continuidad en un intervalo cerrado, es necesario estudiar antes un tipo diferente de límite, llamado **límite lateral**. Por ejemplo, el **límite por la derecha** significa que x se aproxima a c por valores superiores a c (ver la figura 1.28*a*). Este límite se denota

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$ Límite por la derecha.

Del mismo modo, el **límite por la izquierda** significa que x se aproxima a c por valores inferiores a c (ver la figura 1.28*b*). Este límite se denota

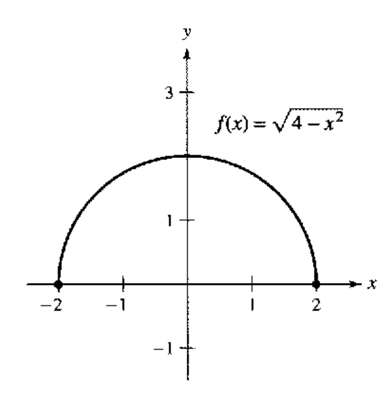
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$ Límite por la izquierda.

Los límites laterales son útiles al calcular límites de funciones que contienen raíces. Por ejemplo, si n es un entero dado

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

EJEMPLO 2 Un límite lateral

Encontrar el límite de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ cuando x se aproxima a -2 por la derecha.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a -2 por la derecha es 0
Figura 1.29

Solución Como se muestra en la figura 1.29, el límite cuando x se aproxima a -2 por la derecha es

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0.$$

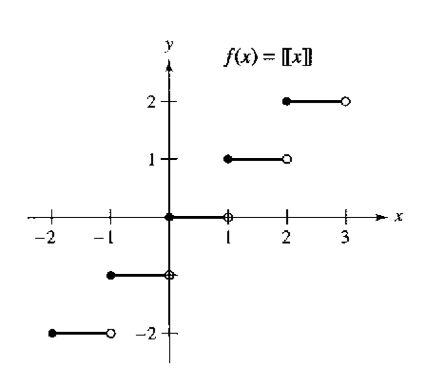
Los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de las **funciones escalón**. Un tipo común de función escalón es la **función parte entera o mayor entero** $[\![x]\!]$, que se define como

$$[\![x]\!] = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \le x$$ Función mayor entero.

Por ejemplo, $[\![2.5]\!] = 2$ y $[\![-2.5]\!] = -3$.

EJEMPLO 3 La función parte entera o mayor entero

Calcular el límite de la función parte entera o mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ cuando x tiende a 0 por la izquierda y cuando x tiende a 0 por la derecha.



Función parte entera o mayor entero
Figura 1.30

Solución Como se muestra en la figura 1.30, el límite cuando x se aproxima a 0 *por la izquierda* está dado por

$$\lim_{x \to 0^-} [\![x]\!] = -1$$

mientras que el límite cuando x se aproxima a 0 *por la derecha* está dado por

$$\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!] = 0.$$

La función parte entera o mayor entero no es continua en 0 debido a que los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto son diferentes. Mediante un razonamiento similar, se puede concluir que la función parte entera o mayor entero tiene una discontinuidad en cualquier entero n.

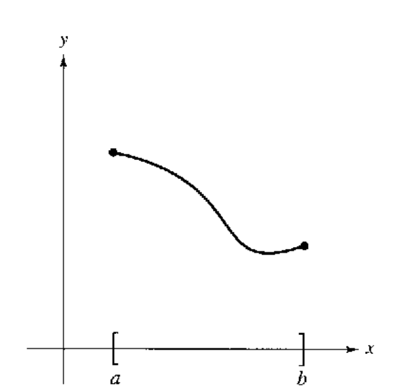
Cuando el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, el límite (bilateral) *no existe*, como lo explica el siguiente teorema. Su demostración se obtiene directamente de la definición de límite lateral.

TEOREMA 1.10 Existencia de un límite

Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad a los intervalos cerrados. Básicamente, se dice que una función es continua en un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los extremos. Esto se enuncia de manera formal como sigue.



Función continua en un intervalo cerrado
Figura 1.31

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

La función f es **continua por la derecha** en a y **continua por la izquierda** en b (ver la figura 1.31).

Se pueden establecer definiciones análogas para incluir la continuidad en intervalos con la forma $(a, b]$ o $[a, b)$, que no son abiertos ni cerrados, o en intervalos infinitos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

es continua en el intervalo infinito $[0, \infty)$, y la función

$$g(x) = \sqrt{2 - x}$$

es continua en el intervalo $(-\infty, 2]$.

EJEMPLO 4 **Continuidad en un intervalo cerrado**

Analizar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

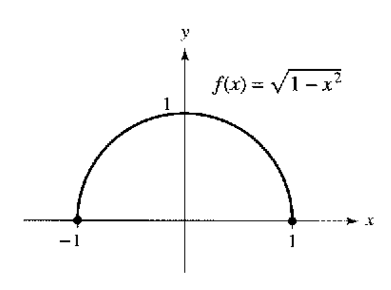
Solución El dominio de f es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. En todos los puntos del intervalo abierto $(-1, 1)$, la continuidad de f obedece a los teoremas 1.4 y 1.5. Además, dado que

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1) \qquad \text{Continua por la derecha.}$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1) \qquad \text{Continua por la izquierda.}$$

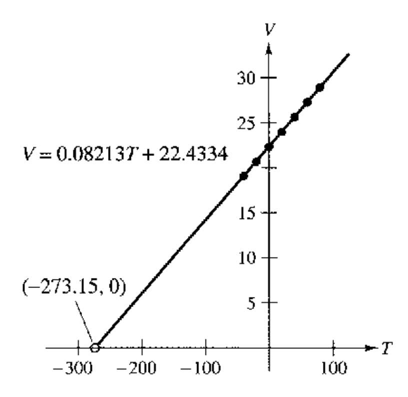
se puede concluir que f es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, como se ilustra en la figura 1.32.



Función continua en $[-1, 1]$
Figura 1.32

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar un límite lateral con el fin de determinar el cero absoluto en la escala Kelvin.

EJEMPLO 5 Ley de Charles y cero absoluto



El volumen del hidrógeno gaseoso depende de su temperatura
Figura 1.33

En la escala Kelvin, el *cero absoluto* es la temperatura 0 K. A pesar de que se han obtenido temperaturas de aproximadamente 0.0001 K en laboratorio, nunca se ha alcanzado el cero absoluto. De hecho, existen evidencias que sugieren la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto. ¿Cómo determinaron los científicos que 0 K es el "límite inferior" de la temperatura de la materia? ¿Cuál es el cero absoluto en la escala Celsius?

Solución La determinación del cero absoluto proviene del trabajo del físico francés Jacques Charles (1746-1823), quien descubrió que el volumen de un gas a presión constante crece de manera lineal con respecto a la temperatura. En la tabla siguiente se ilustra la relación entre volumen y temperatura. Una mol de hidrógeno se mantiene a una presión constante de una atmósfera; el volumen V se mide en litros y la temperatura T se mide en grados Celsius.

T	−40	−20	0	20	40	60	80
V	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

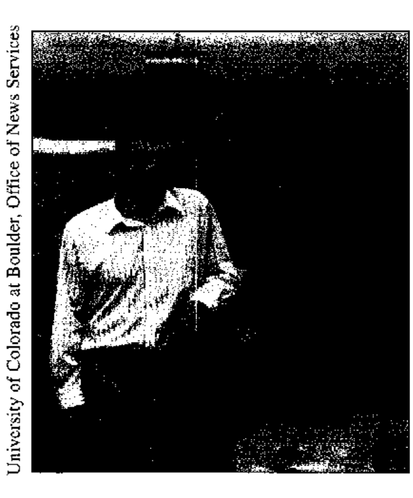
En la figura 1.33 se muestran los puntos representados en la tabla. Empleando dichos puntos, también se puede determinar que T y V se relacionan a través de la ecuación lineal

$$V = 0.08213T + 22.4334 \quad \text{o} \quad T = \frac{V - 22.4334}{0.08213}.$$

Mediante el razonamiento de que el volumen del gas puede tender a 0 (pero nunca ser igual o menor que cero) se puede concluir que la "temperatura mínima posible" se obtiene por medio de

$$\begin{aligned} \lim_{V \to 0^+} T &= \lim_{V \to 0^+} \frac{V - 22.4334}{0.08213} \\ &= \frac{0 - 22.4334}{0.08213} && \text{Sustitución directa.} \\ &\approx -273.15. \end{aligned}$$

De tal manera, el cero absoluto en la escala Kelvin (0 K) es de aproximadamente −273,15° en la escala Celsius.



En 1995, los físicos Carl Weiman y Eric Cornell, de la Universidad de Colorado en Boulder, utilizaron láser y evaporación para producir un gas superfrío en el que los átomos se superponen. Este gas se denomina condensado Bose-Einstein. "Estuvimos a menos de una milmillonésima de grado del cero absoluto", informó Wieman. (*Fuente*: *Time Magazine*, 10 de abril, 2000)

La tabla que se encuentra a continuación muestra las temperaturas del ejemplo 5, en la escala Fahrenheit. Repetir la solución del ejemplo 5 utilizando estas temperaturas y volúmenes. Utilizar el resultado para determinar el valor del cero absoluto en la escala Fahrenheit.

T	−40	−4	32	68	104	140	176
V	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

NOTA La Ley de Charles para los gases (suponiendo una presión constante) puede enunciarse como

$$V = RT \qquad \text{Ley de Charles.}$$

donde V es el volumen, R es una constante y T es la temperatura. En este enunciado de la ley, ¿qué propiedad debe tener la escala de temperaturas?

Propiedades de la continuidad

Bettmann/Latin Stock México

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857)

El concepto de función continua fue presentado por vez primera por Augustin-Louis Cauchy en 1821. La definición expuesta en su texto *Cours d'Analyse* establecía que las pequeñas modificaciones indefinidas en y eran resultado de las pequeñas modificaciones indefinidas en x. "… $f(x)$ será una función *continua* si… los valores numéricos de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x) = 0$ de forma indefinida con los de α…"

Cada una de las propiedades de los límites analizadas en la sección 1.3 genera una propiedad correspondiente relativa a la continuidad de una función. Por ejemplo, el teorema 1.11 es consecuencia directa del teorema 1.2.

TEOREMA 1.11 Propiedades de la continuidad

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. Múltiplo escalar: bf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: $\dfrac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$

Las funciones de los tipos siguientes son continuas en sus dominios.

1. Funciones polinómicas: $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_1x + a_0$
2. Funciones racionales: $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$
3. Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. Funciones trigonométricas: sen x, cos x, tan x, cot x, sec x, csc x

Combinando el teorema 1.11 con esta síntesis, se puede concluir que una gran variedad de funciones elementales son continuas en sus dominios.

EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades de la continuidad

Por el teorema 1.11, cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos de su dominio.

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x, \quad f(x) = 3\tan x, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{\cos x}$$

El siguiente teorema, consecuencia del teorema 1.5, permite determinar la continuidad de funciones *compuestas*, como

$$f(x) = \operatorname{sen} 3x, \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad f(x) = \tan\frac{1}{x}.$$

TEOREMA 1.12 Continuidad de una función compuesta

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.

Una consecuencia del teorema 1.12 es que si f y g satisfacen las condiciones señaladas, es posible determinar que el límite de $f(g(x))$ cuando x se aproxima a c es

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

EJEMPLO 7 Prueba de la continuidad

Describir el intervalo o intervalos donde es continua cada función.

a) $f(x) = \tan x$ *b*) $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *c*) $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Solución

a) La función tangente $f(x) = \tan x$ no está definida en

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

En todos los demás puntos es continua. De tal modo, $f(x) = \tan x$ es continua en todos los intervalos abiertos

$$\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$

como muestra la figura 1.34*a*.

b) Puesto que $y = 1/x$ es continua excepto en $x = 0$ y la función seno es continua para todos los valores reales de x, resulta que $y = \operatorname{sen}(1/x)$ es continua en todos los valores reales salvo en $x = 0$. En $x = 0$, no existe el límite de $g(x)$ (ver el ejemplo 5 de la sección 1.2). Por tanto, g es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, como se muestra en la figura 1.34*b*.

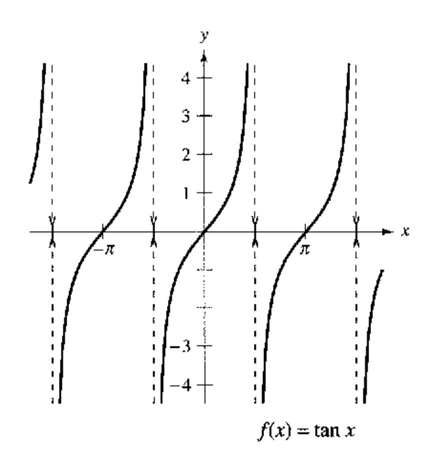
c) Esta función es parecida a la del apartado *b*), con excepción de que las oscilaciones están amortiguadas por el factor x. Aplicando el teorema del encaje o teorema del emparedado, se obtiene

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|, \qquad x \neq 0$$

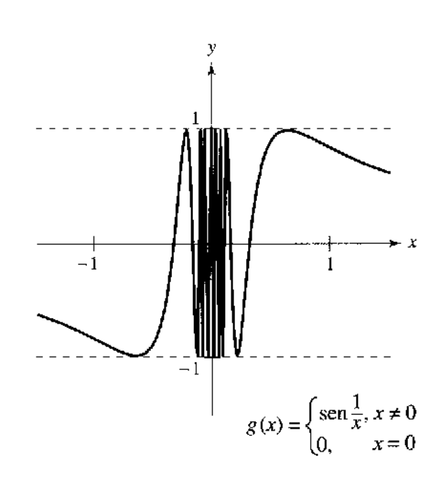
y se puede concluir que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

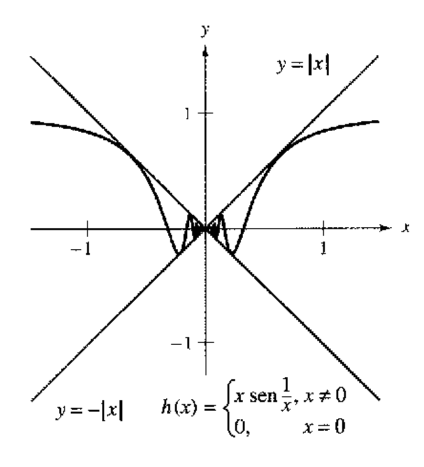
De tal manera, h es continua en toda la recta real, como se muestra en la figura 1.34*c*.



a) f es continua en cada intervalo abierto de su dominio



b) g es continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$



c) h es continua en toda la recta real

Figura 1.34

Teorema del valor intermedio

El teorema 1.13 es un importante teorema relativo al comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

TEOREMA 1.13 Teorema del valor intermedio

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que

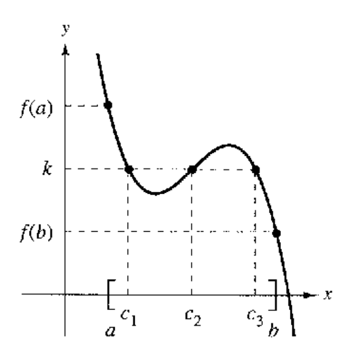
$$f(c) = k.$$

NOTA El teorema del valor intermedio asegura que existe al menos un c, pero no proporciona un método para encontrarla. Tales teoremas se denominan **teoremas de existencia**.

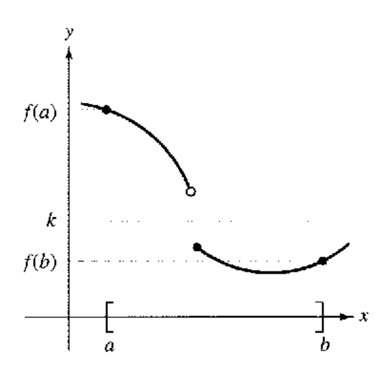
Al consultar un libro de cálculo avanzado, se observará que la demostración de este teorema se basa en una propiedad de los números reales denominada "completitud". El teorema del valor intermedio establece que para una función continua f, si x recorre todos los valores desde a hasta b, entonces $f(x)$ debe asumir todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Como ejemplo sencillo de este hecho, tomar en cuenta la estatura de las personas. Supongamos que una niña medía 1.52 m al cumplir 13 años y 1.70 m al cumplir 14 años, entonces, para cualquier altura h entre 1.52 y 1.70 m, debe existir algún momento t en el que su estatura fue exactamente de h. Esto parece razonable debido a que el crecimiento humano es continuo y la estatura de una persona no cambia de un valor a otro en forma abrupta.

El teorema del valor intermedio garantiza la existencia de *al menos* un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$. Puede, claro está, haber más de uno, tal que $f(c) = k$, como se muestra en la figura 1.35. Una función discontinua no necesariamente manifiesta la propiedad del valor intermedio. Por ejemplo, la gráfica de la función discontinua de la figura 1.36 salta sobre la recta horizontal dada por $y = k$, sin que exista valor alguno para c en $[a, b]$, tal que $f(c) = k$.

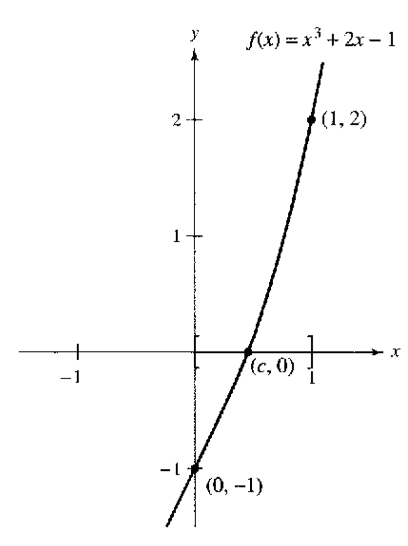


f es continua en $[a, b]$
[Existen 3 números c tales que $f(c) = k$]
Figura 1.35



f no es continua en $[a, b]$
[No existen números c tales que $f(c) = k$]
Figura 1.36

El teorema del valor intermedio suele emplearse para localizar los ceros de una función continua en un intervalo cerrado. De manera más específica, si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo distinto, entonces el teorema nos garantiza la existencia de por lo menos un cero de f en el intervalo cerrado $[a, b]$.



f es continua en [0,1] con $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$
Figura 1.37

EJEMPLO 8 Una aplicación del teorema del valor intermedio

Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que la función polinómica $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo [0, 1].

Solución Observar que *f* es continua en el intervalo cerrado [0, 1]. Dado que

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

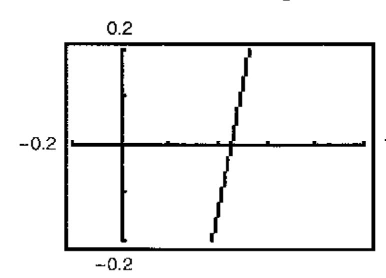
resulta que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Por tanto, se puede aplicar el teorema del valor intermedio y concluir que debe existir algún c en [0, 1] tal que

$$f(c) = 0 \qquad f \text{ tiene un cero en el intervalo cerrado } [0, 1].$$

como se muestra en la figura 1.37.

El **método de bisección** para estimar los ceros reales de una función continua es parecido al método empleado en el ejemplo 8. Si se sabe que existe un cero en el intervalo cerrado $[a, b]$, dicho cero debe pertenecer al intervalo $[a, (a + b)/2]$ o $[(a + b)/2, b]$. A partir del signo de $f([(a + b]/2)$, se puede determinar cuál intervalo contiene al cero. Mediante bisecciones sucesivas del intervalo, se puede "atrapar" al cero de la función.

TECNOLOGÍA También se puede usar el *zoom* de una calculadora gráfica para estimar los ceros reales de una función continua. Aumentando repetidas veces en la zona donde la gráfica corta al eje *x* y ajustando la escala de dicho eje, se puede estimar el cero de la función con la precisión deseada. El cero de $x^3 + 2x - 1$ es alrededor de 0.453, como se muestra en la figura 1.38.



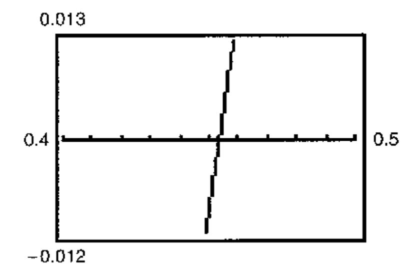


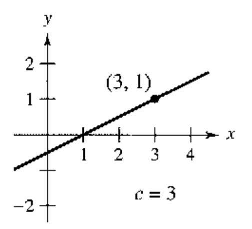
Figura 1.38 Aplicación del zoom al cero de $f(x) = x^3 + 2x - 1$

Ejercicios de la sección 1.4

En los ejercicios 1 a 6, utilizar una computadora gráfica para determinar el límite y analizar la continuidad de la función.

a) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$

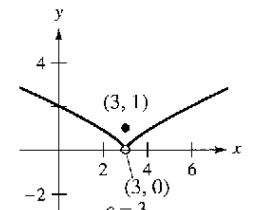
1.



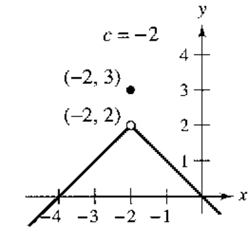
2.

y
c = −2
2
1
−2
−1
−2
(−2, −2)
x

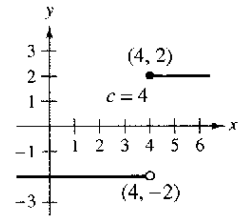
3.



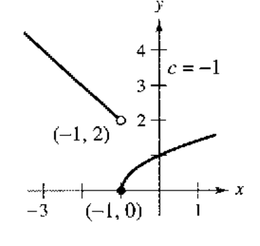
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 a 24, calcular el límite (si existe); si no existe, explicar por qué.

7. $\lim\limits_{x\to5^-} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

8. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

9. $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

10. $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

11. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{|x|}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

13. $\lim\limits_{\Delta x\to0^-} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}$

14. $\lim\limits_{\Delta x\to0^+} \dfrac{(x+\Delta x)^2+x+\Delta x-(x^2+x)}{\Delta x}$

15. $\lim\limits_{x\to3} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & x\le 3\\ \dfrac{12-2x}{3}, & x>3\end{cases}$

16. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, & x<2\\ -x^2+4x-2, & x\ge 2\end{cases}$

17. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<1\\ x+1, & x\ge 1\end{cases}$

18. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ 1-x, & x>1\end{cases}$

19. $\lim\limits_{x\to\pi} \cot x$

20. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sec x$

21. $\lim\limits_{x\to4} (3[\![x]\!]-5)$

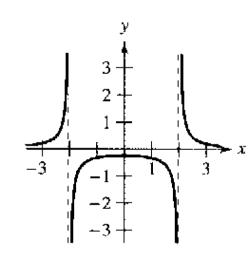
22. $\lim\limits_{x\to2^-} (2x-[\![x]\!])$

23. $\lim\limits_{x\to3} (2-[\![-x]\!])$

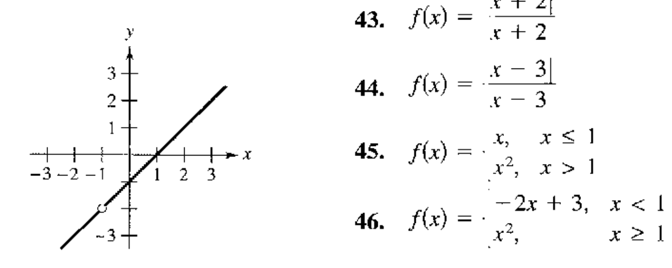
24. $\lim\limits_{x\to1} \left(1-\left[\!\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\!\right]\right)$

En los ejercicios 25 a 28, analizar la continuidad de cada función.

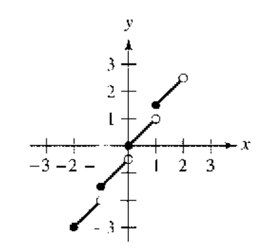
25. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$



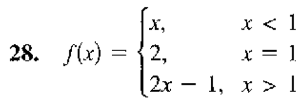
26. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

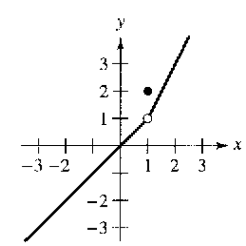


27. $f(x)=\frac{1}{2}[\![x]\!]+x$



28. $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 2, & x=1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$





En los ejercicios 29 a 32, analizar la continuidad de la función en el intervalo cerrado.

	Función	*Intervalo*
29.	$g(x)=\sqrt{25-x^2}$	$[-5, 5]$
30.	$f(t)=3-\sqrt{9-t^2}$	$[-3, 3]$
31.	$f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 0\\ 3+\frac{1}{2}x, & x>0\end{cases}$	$[-1, 4]$
32.	$g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$	$[-1, 2]$

En los ejercicios 33 a 54, encontrar los valores de x (si existe alguno) en los que f no es continua. ¿Qué discontinuidades son evitables o removibles?

33. $f(x)=x^2-2x+1$

34. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

35. $f(x)=3x-\cos x$

36. $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$

37. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$

38. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

39. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

40. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$

41. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

42. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

43. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$

44. $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$

45. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$

46. $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \le 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} \tan \frac{\pi x}{4}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \ge 1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} \csc \frac{\pi x}{6}, & |x - 3| \le 2 \\ 2, & |x - 3| > 2 \end{cases}$

51. $f(x) = \csc 2x$

52. $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$

53. $f(x) = [\![x - 1]\!]$

54. $f(x) = 3 - [\![x]\!]$

En los ejercicios 55 y 56, utilizar una computadora para representar gráficamente la función. A partir de la gráfica, estimar

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

¿Es continua la función en toda la recta real? Explicar la respuesta.

55. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|x}{x + 2}$

56. $f(x) = \dfrac{|x^2 + 4x|(x + 2)}{x + 4}$

En los ejercicios 57 a 60, encontrar la constante a, o las constantes a y b, tales que la función sea continua en toda la recta real.

57. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$

58. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x}, & x < 0 \\ a - 2x, & x \ge 0 \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \le -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \ge 3 \end{cases}$

60. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \ne a \\ 8, & x = a \end{cases}$

En los ejercicios 61 a 64, analizar la continuidad de la función compuesta $h(x) = f(g(x))$.

61. $f(x) = x^2$
$g(x) = x - 1$

62. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = x - 1$

63. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$
$g(x) = x^2 + 5$

64. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = x^2$

En los ejercicios 65 a 68, utilizar una computadora para representar gráficamente la función. Usar la gráfica para determinar todo valor de x en donde la función no sea continua.

65. $f(x) = [\![x]\!] - x$

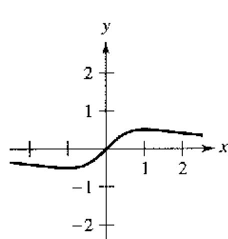
66. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

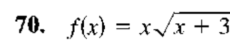
67. $g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \le 3 \\ x^2 - 2x, & x > 3 \end{cases}$

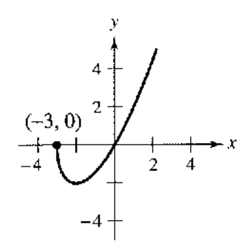
68. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & x < 0 \\ 5x, & x \ge 0 \end{cases}$

En los ejercicios 69 a 72, describir el o los intervalos en los que la función es continua.

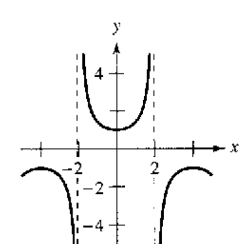
69. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

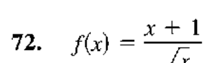


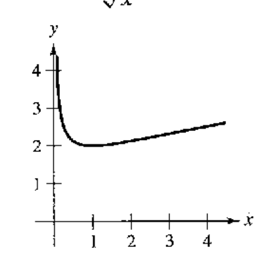
70.  $f(x) = x\sqrt{x + 3}$



71. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$



72.  $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$



Redacción **En los ejercicios 73 y 74, utilizar una computadora para representar gráficamente la función en el intervalo $[-4, 4]$. ¿Parece continua en este intervalo la gráfica de la función? ¿Es continua la función en $[-4, 4]$? Escribir unas líneas sobre la importancia de examinar una función analíticamente además de hacerlo de manera gráfica.**

73. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

74. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

Redacción **En los ejercicios 75 a 78, explicar por qué la función tiene un cero en el intervalo dado.**

	Función	*Intervalo*
75.	$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^3 + 3$	$[1, 2]$
76.	$f(x) = x^3 + 3x - 2$	$[0, 1]$
77.	$f(x) = x^2 - 2 - \cos x$	$[0, \pi]$
78.	$f(x) = -\dfrac{4}{x} + \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)$	$[1, 3]$

En los ejercicios 79 a 82, utilizar el teorema del valor intermedio y una computadora gráfica para estimar el cero de la función en el intervalo [0, 1]. Realizar aumentos (*zoom*) reiterados de la gráfica de la función con el fin de determinar el cero con una precisión de dos cifras decimales. Empleando la función *cero* o *raíz* de su computadora, estimar el cero con una precisión de cuatro cifras decimales.

79. $f(x) = x^3 + x - 1$

80. $f(x) = x^3 + 3x - 2$

81. $g(t) = 2\cos t - 3t$

82. $h(\theta) = 1 + \theta - 3\tan\theta$

En los ejercicios 83 a 86, verificar que el teorema del valor intermedio es aplicable al intervalo indicado y encontrar el valor de *c* garantizado por el teorema.

83. $f(x) = x^2 + x - 1, \quad [0, 5], \quad f(c) = 11$

84. $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3], \quad f(c) = 0$

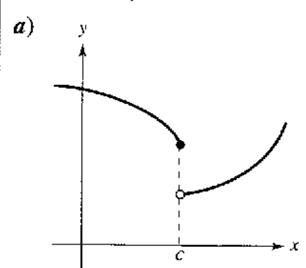
85. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2, \quad [0, 3], \quad f(c) = 4$

86. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}, \quad \left[\dfrac{5}{2}, 4\right], \quad f(c) = 6$

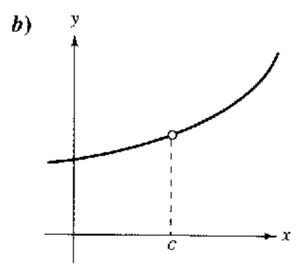
Desarrollo de conceptos

87. En cada una de las gráficas siguientes especificar cómo se destruye la continuidad en $x = c$:

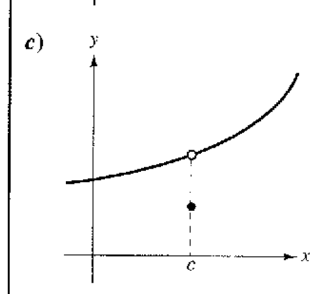
a)



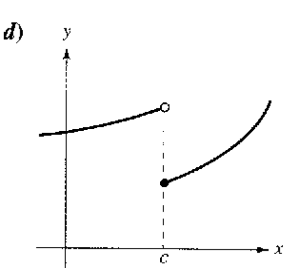
b)



c)



d)



88. Describir la diferencia que existe entre una discontinuidad que es evitable o removible y una que es inevitable o no removible. En la explicación, incluir ejemplos de las siguientes descripciones:

a) Una función con una discontinuidad inevitable o no removible en $x = 2$

b) Una función con una discontinuidad evitable o removible en $x = -2$

c) Una función que cuenta con las dos características descritas en los apartados *a)* y *b)*

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

89. Esbozar la gráfica de cualquier función f tal que:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0.$$

¿Esta función es continua en $x = 3$? Explicar la respuesta.

90. Si las funciones f y g son continuas para todos los x reales, ¿$f + g$ es siempre continua para todos los x reales? ¿f/g es siempre continua para todos los x reales? Si alguna no es continua, elaborar un ejemplo para verificar la conclusión.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

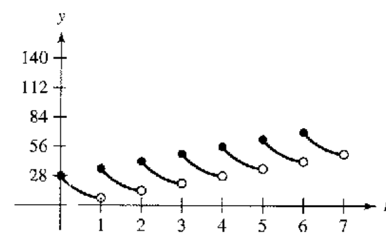
91. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c.

92. Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq c$ y $f(c) \neq g(c)$, entonces ya sea f o g no es continua en c.

93. En una función racional puede haber infinitos valores de x en los que no es continua.

94. La función $f(x) = |x - 1|/(x - 1)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

95. ***Piscina*** Todos los días se disuelven 28 onzas de cloro en el agua de una piscina. En la gráfica se muestra la cantidad de cloro $f(t)$ en esa agua luego de t días.



Estimar e interpretar $\lim_{t\to 4^-} f(t)$ y $\lim_{t\to 4^+} f(t)$.

96. ***Para pensar*** Describir en qué difieren las funciones

$f(x) = 3 + [\![x]\!]$

y

$g(x) = 3 - [\![-x]\!]$.

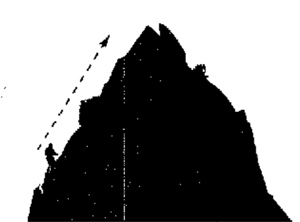
97. ***Tarifas telefónicas*** Una llamada de larga distancia entre dos ciudades cuesta \$1.04 los primeros 2 minutos y \$0.36 por cada minuto o fracción adicional. Utilizando la función parte entera o mayor entero expresar el costo C de una llamada en términos del tiempo t (en minutos). Dibujar la gráfica de esta función y analizar su continuidad.

98. ***Gestión de inventarios*** El número de unidades en inventario en una pequeña empresa está dado por

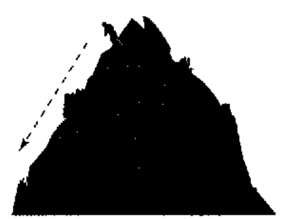
$$N(t) = 25\left(2\left[\!\!\left[\frac{t+2}{2}\right]\!\!\right] - t\right)$$

donde t representa el tiempo en meses. Dibujar la gráfica de esta función y analizar su continuidad. ¿Con qué frecuencia la empresa debe reponer existencias?

99. ***Déjà vu*** Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Demostrar que el hombre está en lo cierto. [*Sugerencia*: Considerar que $s(t)$ y $r(t)$ son las funciones de posición de subida y bajada y aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f(t) = s(t) - r(t)$.]



Sábado 8:00 de la mañana



Domingo 8:00 de la mañana

100. ***Volumen*** Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que entre todas las esferas cuyos radios pertenecen al intervalo [1, 5] hay una con un volumen de 275 centímetros cúbicos.

101. Demostrar que si f es continua y carece de ceros en $[a, b]$, entonces

$f(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$ o $f(x) < 0$ para todo x en $[a, b]$.

102. Demostrar que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es continua para ningún número real.

103. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ kx, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es continua sólo en $x = 0$ (suponer que k es cualquier número real distinto de cero).

104. La **función signo** se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Construir la gráfica de sgn (x) y calcular los siguientes límites (si es posible).

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$

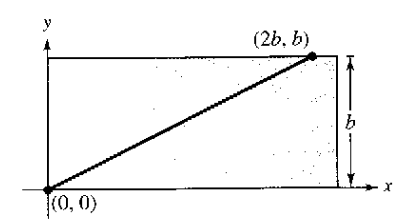
105. ***Modelo matemático*** La tabla recoge valores de la velocidad S (en pies/s) de un objeto tras caer t segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
S	0	48.2	53.5	55.2	55.9	56.2	56.3

a) Construir la curva con los datos.
b) ¿Parece existir una velocidad límite para el objeto? En caso afirmativo, identificar una posible causa.

106. ***Elaboración de modelos*** Un nadador cruza una piscina de una anchura b nadando en línea recta desde (0, 0) hasta $(2b, b)$ (ver la figura).

a) Sea f una función definida como la coordenada y del punto sobre el lado más largo de la piscina que se encuentra más cerca del nadador en cualquier momento dado durante su trayecto a través de la piscina. Encontrar la función f y construir su gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explicar la respuesta.
b) Sea g la distancia mínima entre el nadador y el lado más largo de la piscina. Encontrar la función g y construir la gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explicar la respuesta.



107. Encontrar todos los valores de c tales que f sea continua en $(-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le c \\ x, & x > c \end{cases}$$

108. Demostrar que para todo número real y existe un x en $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan x = y$.

109. Sea $f(x) = \left(\sqrt{x + c^2} - c\right)/x$, $c > 0$. ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cómo se puede definir f en $x = 0$ con el fin de que sea continua en ese punto?

110. Demostrar que si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c + \Delta x) = f(c)$ (c), entonces f es continua en c.

111. Analizar la continuidad de la función $h(x) = x[\![x]\!]$.

112. *a)* Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Si $f_1(a) < f_2(a)$ y $f_1(b) > f_2(b)$, demostrar que entre a y b existe c tal que $f_1(c) = f_2(c)$.
b) Demostrar que existe c en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos c = c$. Utilizar una computadora para estimar c con tres decimales.

Preparación del examen Putnam

113. Afirme o desmienta: si x y y son números reales con $y \ge 0$ y $y(y + 1) \le (x + 1)^2$, entonces $y(y - 1) \le x^2$.

114. Encontrar todas las polinomiales $P(x)$ tales que

$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$ y $P(0) = 0$.

Sección 1.5 Límites infinitos

- **Determinar límites infinitos por la izquierda y por la derecha.**
- **Hallar y dibujar las asíntotas verticales de una gráfica.**

Límites infinitos

Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{3}{x-2}.$$

$\frac{3}{x-2} \to \infty$, cuando $x \to 2^+$

$\frac{3}{x-2} \to -\infty$, cuando $x \to 2^-$

$f(x) = \frac{3}{x-2}$

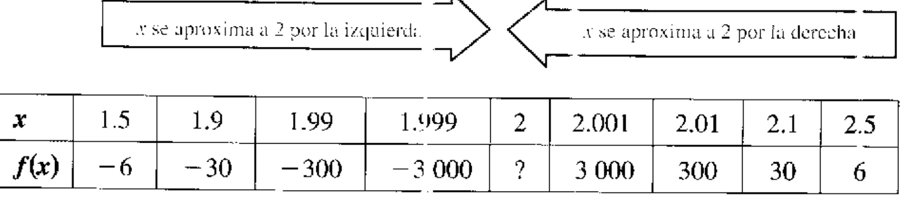
$f(x)$ crece y decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a 2
Figura 1.39

Con ayuda de la figura 1.39 y de la siguiente tabla, se puede observar que $f(x)$ *decrece sin cota* o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la izquierda y que *crece sin cota* o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Este comportamiento se denota

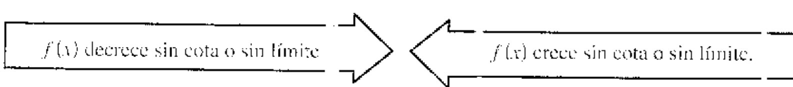
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \quad f(x) \text{ decrece sin cota o sin límite cuando } x \text{ se aproxima a 2 por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty \quad f(x) \text{ crece sin cota o sin límite cuando } x \text{ se aproxima a 2 por la derecha.}$$



x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3 000	?	3 000	300	30	6



Si $f(x)$ crece o decrece sin cota o sin límite cuando x se aproxima a c se dice que el **límite de $f(x)$ en c es infinito.**

Definición de límites infinitos

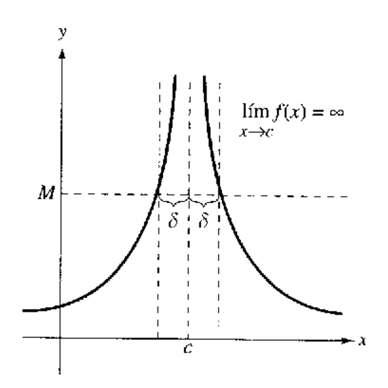
Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c (salvo, posiblemente, en el propio c). La expresión

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

significa que para toda $M > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$ (ver la figura 1.40). Del mismo modo, la expresión

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para definir el **límite infinito por la izquierda**, sustituir $0 < |x - c| < \delta$ por $c - \delta < x < c$. Y para definir el **límite infinito por la derecha**, basta sustituir $0 < |x - c| < \delta$ por $c < x < c + \delta$.



Límites infinitos
Figura 1.40

Observar que el signo de igualdad en la expresión $\lim f(x) = \infty$ no significa que el límite exista. Por el contrario, indica la razón de su *no existencia* al denotar el comportamiento no acotado o no limitado de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.

Representar gráficamente las siguientes funciones en una computadora. En cada una de ellas, determinar analíticamente el único número real c que no pertenece al dominio. A continuación, encontrar de manera gráfica el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda y por la derecha.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$ *d)* $f(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

EJEMPLO 1 Determinación de límites infinitos a partir de una gráfica

Usando la figura 1.41, determinar el límite de cada función cuando x tiende a 1 por la izquierda y por la derecha.

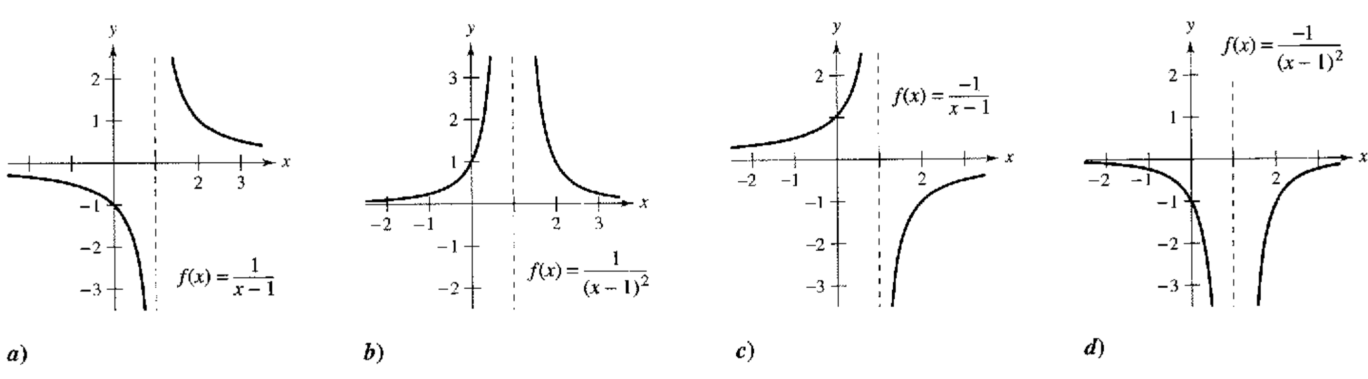


Figura 1.41 Las cuatro gráficas tienen una asíntota vertical en $x = 1$

Solución

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ El límite por ambos lados es ∞.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ El límite por ambos lados es $-\infty$.

Asíntotas verticales

Si fuera posible extender las gráficas de la figura 1.41 hacia el infinito, positivo o negativo, se vería que ambas se acercan arbitrariamente a la recta vertical $x = 1$. Esta recta es una **asíntota vertical** de la gráfica de f. (En las secciones 3.5 y 3.6 se estudiarán otros tipos de asíntotas.)

NOTA Si la gráfica de una función f tiene una asíntota vertical en $x = c$, entonces f *no es continua* en c.

Definición de asíntota vertical

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

En el ejemplo 1, se observa que todas las funciones son *cocientes* y la asíntota vertical aparece en el número que anula al denominador (pero no al numerador). El siguiente teorema generaliza esta observación (en el apéndice A se encuentra la demostración de este teorema).

TEOREMA 1.14 Asíntotas verticales

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$, entonces la gráfica de la función

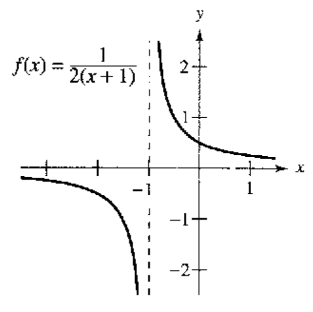
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

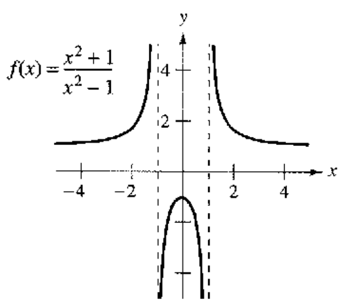
EJEMPLO 2 Cálculo de las asíntotas verticales

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

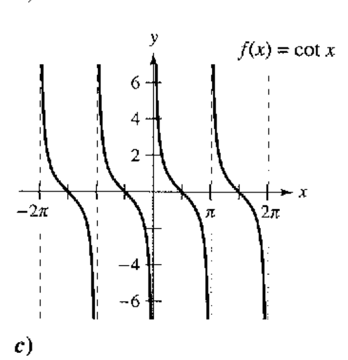
a) $f(x) = \dfrac{1}{2(x+1)}$ ***b***) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ ***c***) $f(x) = \cot x$



a)



b)



c)

Funciones con asíntotas verticales
Figura 1.42

Solución

a) Cuando $x = -1$, el denominador de

$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$$

es igual a 0 y el numerador no lo es. Por tanto, mediante el teorema 1.14, se puede concluir que $x = -1$ es una asíntota vertical, como se observa en la figura 1.42*a*.

b) Factorizando el denominador como

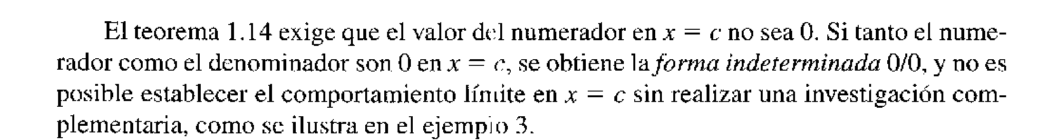
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

puede verse que el denominador se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Además, dado que el numerador no es 0 en ninguno de estos puntos, se puede aplicar el teorema 1.14 y concluir que la gráfica de f tiene dos asíntotas verticales, como se ilustra la figura 1.42*b*.

c) Escribiendo la función cotangente de la forma

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

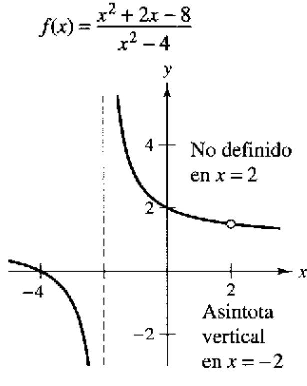
se puede aplicar el teorema 1.14 para concluir que las asíntotas verticales tienen lugar en todos los valores de x tales que $\operatorname{sen} x = 0$ y $\cos x \neq 0$, como muestra la figura 1.42*c*. Por consiguiente, la gráfica de esta función tiene infinitas asíntotas verticales. Estas asíntotas aparecen cuando $x = n\pi$, donde n es un número entero.


El teorema 1.14 exige que el valor del numerador en $x = c$ no sea 0. Si tanto el numerador como el denominador son 0 en $x = c$, se obtiene la *forma indeterminada* 0/0, y no es posible establecer el comportamiento límite en $x = c$ sin realizar una investigación complementaria, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Una función racional con factores comunes

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}.$$



$f(x)$ crece y decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a -2
Figura 1.43

Solución Comenzar por simplificar la expresión como sigue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} \\ &= \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \frac{x + 4}{x + 2}, \quad x \neq -2 \end{aligned}$$

En todos los valores de x distintos de $x = -2$, la gráfica de f coincide con la de $g(x) = (x + 4)/(x + 2)$. De manera que se puede aplicar a g el teorema 1.14 y concluir que existe una asíntota vertical en $x = -2$, como se muestra en la figura 1.43. A partir de la gráfica, se ve que

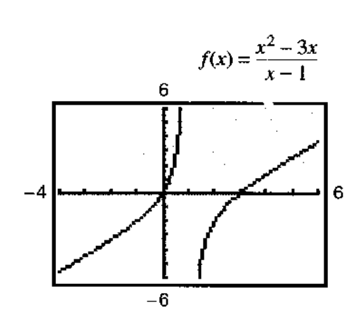
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty.$$

Observar que $x = 2$ *no es* una asíntota vertical.

EJEMPLO 4 Cálculo de límites infinitos

Determinar los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$



f tiene una asíntota vertical en $x = 1$
Figura 1.44

Solución Puesto que el denominador es 0 cuando $x = 1$ (y el numerador no se anula), se sabe que la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Esto significa que cada uno de los límites dados es ∞ o $-\infty$. Una gráfica en la calculadora puede ayudar a determinar el resultado. En la gráfica de f que se muestra en la figura 1.44, se observa que la gráfica tiende a ∞ por la izquierda de $x = 1$ y a $-\infty$ por la derecha. De tal modo, se puede concluir que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \infty \qquad \text{El límite por la izquierda es infinito.}$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty. \qquad \text{El límite por la derecha es menos infinito.}$$

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utiliza una calculadora, hay que tener cuidado para interpretar correctamente la gráfica de una función con una asíntota vertical, ya que las calculadoras suelen tener dificultades para representar este tipo de gráficas.

TEOREMA 1.15 Propiedades de los límites infinitos

Sean c y L números reales, y f y g funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

1. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. Producto: $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$

   $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3. Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$.

Demostración Para probar que el límite de $f(x) + g(x)$ es infinito, elegir un $M > 0$. Se necesita entonces encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$[f(x) + g(x)] > M$$

siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para simplificar, suponer que L es positiva ($L > 0$) y hacer a $M_1 = M + 1$. Puesto que el límite de $f(x)$ es infinito, existe un δ_1 tal que $f(x) > M_1$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_1$. Como además el límite de $g(x)$ es L, existe un δ_2 tal que $|g(x) - L| < 1$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_2$. Haciendo que δ sea el menor de δ_1 y δ_2, concluir que $0 < |x - c| < \delta$ implica que $f(x) > M + 1$ y $|g(x) - L| < 1$. La segunda de estas desigualdades implica que $g(x) > L - 1$ y, sumando esto a la primera desigualdad, se obtiene

$$f(x) + g(x) > (M + 1) + (L - 1) = M + L > M.$$

Por tanto, también se concluye que

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \infty.$$

Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios (ver el ejercicio 72).

EJEMPLO 5 Cálculo de límites

a) Puesto que $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty. \qquad \text{Propiedad 1, teorema 1.15.}$$

b) Puesto que $\lim_{x\to 1^-} (x^2 + 1) = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} (\cot \pi x) = -\infty$, se deduce que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 1}{\cot \pi x} = 0. \qquad \text{Propiedad 3, teorema 1.15.}$$

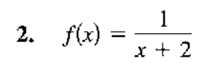
c) Al ser $\lim_{x\to 0^+} 3 = 3$ y $\lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty$, se tiene

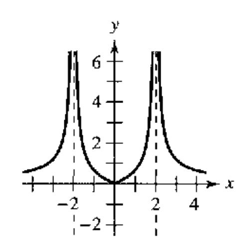
$$\lim_{x\to 0^+} 3 \cot x = \infty. \qquad \text{Propiedad 2, teorema 1.15.}$$

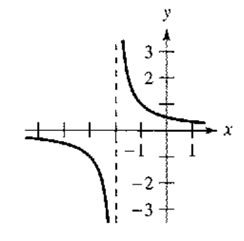
Ejercicios de la sección 1.5

En los ejercicios 1 a 4, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda y por la derecha.

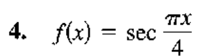
1. $f(x) = 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$

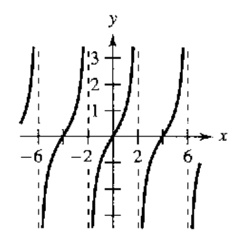
2.  $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

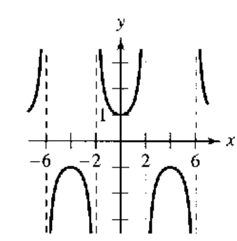




3. $f(x) = \tan\dfrac{\pi x}{4}$

4.  $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{4}$





Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 5 a 8, completar la tabla para determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -3 por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Utilizar una computadora para representar gráficamente la función y corroborar la respuesta.**

x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$				

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$				

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

8. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{6}$

En los ejercicios 9 a 28, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

10. $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$

11. $h(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

12. $g(x) = \dfrac{2+x}{x^2(1-x)}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

14. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$

15. $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2+1}$

16. $h(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-25}$

17. $f(x) = \tan 2x$

18. $f(x) = \sec \pi x$

19. $T(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$

20. $g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x}{3x^2 - 6x - 24}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$

22. $f(x) = \dfrac{4x^2+4x-24}{x^4-2x^3-9x^2+18x}$

23. $g(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

24. $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^3-5x^2+x-5}$

26. $h(t) = \dfrac{t^2-2t}{t^4-16}$

27. $s(t) = \dfrac{t}{\operatorname{sen} t}$

28. $g(\theta) = \dfrac{\tan\theta}{\theta}$

En los ejercicios 29 a 32, determinar si la función tiene una asíntota vertical o una discontinuidad evitable (o removible) en $x = -1$. Representar gráficamente la función en una computadora para confirmar la respuesta.

29. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2-6x-7}{x+1}$

31. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

32. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+1)}{x+1}$

En los ejercicios 33 a 48, calcular el límite.

33. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2}$

34. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2+x}{1-x}$

35. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2}{x^2-9}$

36. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2}{x^2+16}$

37. $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$

38. $\lim\limits_{x\to(-1/2)^+} \dfrac{6x^2+x-1}{4x^2-4x-3}$

39. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{(x^2+1)(x-1)}$

40. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2}$

41. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$

43. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$

44. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \dfrac{-2}{\cos x}$

45. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{x}}{\csc x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{\cot x}$

47. $\lim\limits_{x\to 1/2} x\sec \pi x$

48. $\lim\limits_{x\to 1/2} x^2\tan \pi x$

En los ejercicios 49 a 52, utilizar una computadora para representar gráficamente la función y determinar el límite lateral.

49. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

50. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-25}$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

52. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{6}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

Desarrollo de conceptos

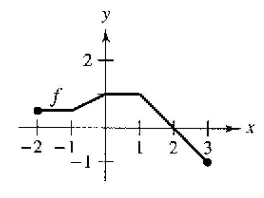
53. Con sus propias palabras, describir el significado de un límite infinito. ¿Es ∞ un número real?

54. Con sus propias palabras, describir el significado de la asíntota vertical de una gráfica.

55. Escribir una función racional con asíntotas verticales en $x = 6$ y en $x = -2$, y un cero en $x = 3$.

56. ¿Tiene toda función racional una asíntota vertical? Explicar la respuesta.

57. Utilizar la gráfica de la función f (ver la figura) para construir la gráfica de $g(x) = 1/f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.

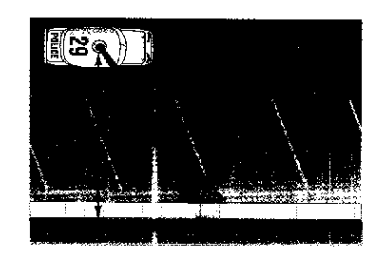


58. ***Ley de Boyle*** En un gas a temperatura constante, la presión P es inversamente proporcional al volumen V. Calcular el límite de P cuando $V \to 0^+$.

59. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Una patrulla está estacionada a 50 pies de un gran almacén (ver la figura). La luz giratoria de la parte superior del automóvil gira a un ritmo o velocidad de $\frac{1}{2}$ revolución por segundo. El ritmo o velocidad al que se desplaza el haz de luz a lo largo de la pared es

$r = 50\pi \sec^2 \theta$ pies/s.

a) Calcular el ritmo o velocidad r cuando θ es $\pi/6$.
b) Determinar el ritmo o velocidad r cuando θ es $\pi/3$.
c) Encontrar el límite de r cuando $\theta \to (\pi/2)^-$.



60. ***Drogas ilegales*** El costo, en millones de dólares, que le supone a una agencia gubernamental confiscar $x\%$ de una droga ilegal es

$$C = \frac{528x}{100 - x}, \quad 0 \le x < 100.$$

a) Calcular el costo por confiscar 25%.
b) Calcular el costo por confiscar 50%.
c) Calcular el costo por confiscar 75%.
d) Encontrar el límite de C cuando $x \to 100^-$ e interpretar su significado.

61. ***Relatividad*** De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende de su velocidad v; es decir:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

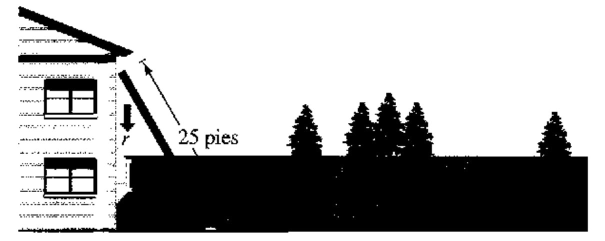
donde m_0 es la masa cuando la partícula está en reposo y c es la velocidad de la luz. Calcular el límite de la masa cuando v tiende a c^-.

62. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Una escalera de 25 pies de largo está apoyada en una casa (ver la figura). Si por alguna razón la base de la escalera se aleja del muro a un ritmo de 2 pies por segundo, la parte superior descenderá con un ritmo dado por

$$r = \frac{2x}{\sqrt{625 - x^2}} \text{ pies/s}$$

donde x es la distancia que hay entre la base de la escalera y el muro

a) Calcular el ritmo o velocidad r cuando x es 7 pies.
b) Calcular el ritmo o velocidad r cuando x es 15 pies.
c) Encontrar el límite de r cuando $x \to 25^-$.



63. ***Velocidad media*** En un viaje de d millas hacia otra ciudad, la velocidad media de un camión fue de x millas por hora. En el viaje de regreso, su velocidad media fue de y millas por hora. La velocidad media del viaje de ida y vuelta fue de 50 millas por hora.

a) Verificar que $y = \dfrac{25x}{x - 25}$. ¿Cuál es el dominio?
b) Completar la tabla.

x	30	40	50	60
y				

¿Difieren los valores de y de los esperados? Explicar la respuesta.

c) Calcular el límite de y cuando $x \to 25^+$ e interpretar el resultado.

64. ***Análisis numérico y gráfico*** Utilizar una computadora a fin de completar la tabla para cada función y representar gráficamente cada una de ellas con objeto de calcular el límite. ¿Cuál es el valor del límite cuando la potencia de x en el denominador es mayor que 3?

x	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$							

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x}$ *b*) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ *d*) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^4}$

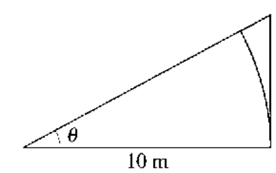
65. ***Análisis numérico y gráfico*** Considerar la región sombreada que queda fuera del sector del círculo con radio de 10 m y dentro del triángulo rectángulo de la figura.

a) Expresar el área $A = f(\theta)$ de la región en función de θ. Determinar el dominio de esta función.

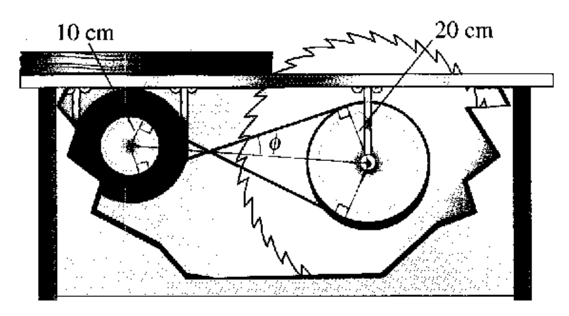
b) Utilizar una computadora para completar la tabla y representar gráficamente la función sobre el dominio apropiado.

$\boldsymbol{\theta}$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$\boldsymbol{f(\theta)}$					

c) Calcular el límite de A cuando $\theta \to (\pi/2)$.



66. ***Análisis numérico y gráfico*** Una banda en cruz conecta la polea de 20 cm (10 cm de radio) de un motor eléctrico con otra polea de 40 cm (20 cm de radio) de una sierra circular. El motor eléctrico gira a 1 700 revoluciones por minuto.



a) Determinar el número de revoluciones por minuto de la sierra.

b) ¿Cómo afecta el cruce de la banda a la sierra en relación con el motor?

c) Sea L la longitud total de la correa. Exprese L en función de ϕ, donde ϕ se mide en radianes. ¿Cuál es el dominio de la función? [*Sugerencia*: Sumar las longitudes de los tramos rectos de la banda y las longitudes de la banda alrededor de cada polea.]

d) Utilizar una computadora para completar la tabla.

$\boldsymbol{\phi}$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$\boldsymbol{L}$					

e) Utilizar una computadora para representar gráficamente la función en un dominio apropiado.

f) Calcular el $\lim\limits_{\phi\to(\pi/2)^-} L$. Utilizar algún argumento geométrico como base de otro procedimiento para encontrar este límite.

g) Calcular $\lim\limits_{\phi\to 0^+} L$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 67 a 70, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

67. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces la función dada por

$f(x) = \dfrac{p(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

68. La gráfica de una función racional tiene al menos una asíntota vertical.

69. Las funciones polinómicas carecen de asíntotas verticales.

70. Si f tiene una asíntota vertical en $x = 0$, entonces no está definida en $x = 0$.

71. Encontrar a continuación las funciones f y g tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, pero $\lim\limits_{x\to c} [f(x) - g(x)] \neq 0$.

72. Demostrar las propiedades restantes del teorema 1.15.

73. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

74. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe.

Límites infinitos **En los ejercicios 75 y 76, usar la definición ε-δ de límite para demostrar lo afirmado**

75. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \infty$

76. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$

Proyecto de trabajo: Gráficas y límites de las funciones trigonométricas

Recordando, del teorema 1.9, que el límite de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ cuando x tiende a 0 es 1:

a) Utilizar una computadora para representar gráficamente la función f en el intervalo $-\pi \leq 0 \leq \pi$ y explicar cómo ayuda esta gráfica a confirmar dicho teorema.

b) Explicar cómo podría usar una tabla de valores para confirmar numéricamente el valor de este límite.

c) Dibujar a mano la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$. Trazar una recta tangente en el punto $(0, 0)$ y estimar visualmente su pendiente.

d) Sea $(x, \operatorname{sen} x)$ un punto en la gráfica de g cercano a $(0, 0)$. Escribir una fórmula para la pendiente de la recta secante que une a $(x, \operatorname{sen} x)$ con $(0, 0)$. Evaluar esta fórmula para $x = 0.1$ y $x = 0.01$. Después encontrar la pendiente exacta de la recta tangente a g en el punto $(0, 0)$.

e) Dibujar la gráfica de la función coseno, $h(x) = \cos x$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto $(0, 1)$? Utilizar límites para calcular analíticamente dicha pendiente.

f) Calcular la pendiente de la recta tangente a $k(x) = \tan x$ en el punto $(0, 0)$.

Ejercicios de repaso del capítulo 1

En los ejercicios 1 y 2, determinar si el problema se puede resolver usando conocimientos previos al cálculo, en cuyo caso, resolverlo. En caso de que sea necesario el cálculo, explicar por qué. Encontrar la solución usando un método gráfico o numérico.

1. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la curva $y = x^2$.
2. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la recta $y = 4x - 3$.

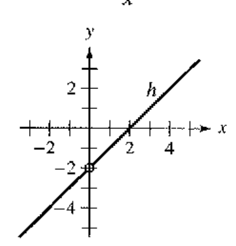
En los ejercicios 3 y 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Utilizar una computadora para representar gráficamente la función y corroborar el resultado.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[4/(x+2)] - 2}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)}{x}$

En los ejercicios 5 y 6, utilizar la gráfica para determinar el límite.

5. $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$



a) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$

6. $g(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

En los ejercicios 7 a 10, encontrar el límite L. Después utilizar la definición ε-δ para demostrar que el límite es L.

7. $\lim\limits_{x \to 1} (3 - x)$
8. $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x}$
9. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3)$
10. $\lim\limits_{x \to 5} 9$

En los ejercicios 11 a 24, encontrar el límite (si existe).

11. $\lim\limits_{t \to 4} \sqrt{t + 2}$
12. $\lim\limits_{y \to 4} 3|y - 1|$
13. $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{t + 2}{t^2 - 4}$
14. $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{t^2 - 9}{t - 3}$
15. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(x + 1)] - 1}{x}$
18. $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{\left(1/\sqrt{1 + s}\right) - 1}{s}$
19. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^3 + 125}{x + 5}$
20. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$
21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
22. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{4x}{\tan x}$
23. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}[(\pi/6) + \Delta x] - (1/2)}{\Delta x}$

[*Sugerencia:* $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$]

24. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$

[*Sugerencia:* $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$]

En los ejercicios 25 y 26, calcular el límite, dado que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\frac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \frac{2}{3}$.

25. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)]$
26. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + 2g(x)]$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 27 y 28, considerar**

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

a) **Completar la tabla para estimar el límite.**
b) **Utilizar una computadora para representar gráficamente la función y usar la gráfica para estimar el límite.**
c) **Racionalizar el numerador y calcular de manera analítica el valor exacto del límite.**

x	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$				

27. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{3}}{x - 1}$
28. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

[*Sugerencia:* $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$]

Objeto en caída libre **En los ejercicios 29 y 30, utilizar la función posición $s(t) = -4.9t^2 + 200$, que da la altura en metros de un objeto que cae libremente desde una altura de 200 metros. Su velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t \to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

29. Calcular la velocidad cuando $t = 4$.
30. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

En los ejercicios 31 a 36, encontrar el límite (si lo hay). Si no existe límite, explicar por qué.

31. $\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$

32. $\lim_{x\to 4} [\![x-1]\!]$

33. $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \le 2 \\ 2-x, & x > 2 \end{cases}$

34. $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, donde $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

35. $\lim_{t\to 1} h(t)$, donde $h(t) = \begin{cases} t^3+1, & t < 1 \\ \frac{1}{2}(t+1), & t \ge 1 \end{cases}$

36. $\lim_{s\to -2} f(s)$, donde $f(s) = \begin{cases} -s^2-4s-2, & s \le -2 \\ s^2+4s+6, & s > -2 \end{cases}$

En los ejercicios 37 a 46, determinar los intervalos en los que la función es continua.

37. $f(x) = [\![x+3]\!]$

38. $f(x) = \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}$

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \le 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$

41. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

42. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

43. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

44. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+2}$

45. $f(x) = \csc \dfrac{\pi x}{2}$

46. $f(x) = \tan 2x$

47. Determinar el valor de c para el que la función es continua en toda la recta de los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 2 \\ cx+6, & x > 2 \end{cases}$$

48. Determinar los valores de b y c que hacen a la función continua sobre toda la recta de los números reales:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c, & |x-2| \ge 1 \end{cases}$$

49. Utilizar el teorema de valor intermedio para demostrar que $f(x) = 2x^3 - 3$ tiene un cero en el intervalo $[1, 2]$.

50. ***Costo de mensajería*** El envío de un paquete por mensajería de Nueva York a Atlanta cuesta $9.80 por la primera libra y $2.50 por cada libra o fracción adicional. Utilizar la función parte entera para elaborar un modelo que describa el costo C de envío por mensajería para un paquete de x libras. Utilizar una computadora para representar gráficamente la función y analizar su continuidad.

51. Sea $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$. Encontrar los siguientes límites (si es posible).

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

52. Sea $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$

a) Encontrar el dominio de f

b) Calcular $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

c) Calcular $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

En los ejercicios 53 a 56, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

53. $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

54. $h(x) = \dfrac{4x}{4-x^2}$

55. $f(x) = \dfrac{8}{(x-10)^2}$

56. $f(x) = \csc \pi x$

En los ejercicios 57 a 68, encontrar el límite lateral.

57. $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{2x^2+x+1}{x+2}$

58. $\lim_{x\to (1/2)^+} \dfrac{x}{2x-1}$

59. $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{x^3+1}$

60. $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{x+1}{x^4-1}$

61. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

62. $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$

63. $\lim_{x\to 0^-} \left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)$

64. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

65. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$

66. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sec x}{x}$

67. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\csc 2x}{x}$

68. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos^2 x}{x}$

69. ***Medio ambiente*** Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El costo C, en dólares, de eliminar p% de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humo es

$$C = \frac{80\,000p}{100-p}, \qquad 0 \le p < 100.$$

Calcular cuánto cuesta eliminar *a)* 15%, *b)* 50% y *c)* 90%. *d)* Encontrar el límite de C cuando $p \to 100^-$.

70. La función f está definida como

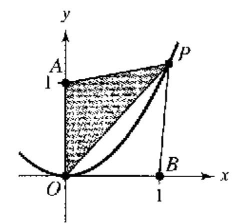
$$f(x) = \frac{\tan 2x}{x}, \qquad x \ne 0$$

a) Encontrar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$ (si existe).

b) ¿Puede definirse a f en $x = 0$ de manera que sea continua en ese punto?

SP Solución de problemas

1. Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante. Considerar el triángulo ΔPAO formado por P, $A(0, 1)$ y el origen O $(0, 0)$, y el triángulo ΔPBO formado por P, $B(1, 0)$ y el origen:



a) Dar el perímetro de cada triángulo en términos de x.

b) Sea $r(x)$ la relación entre los perímetros de ambos triángulos,

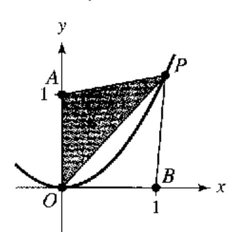
$$r(x) = \frac{\text{Perímetro } \triangle PAO}{\text{Perímetro } \triangle PBO}.$$

Completar la tabla.

x	4	2	1	0.1	0.01
Perímetro $\triangle PAO$					
Perímetro $\triangle PBO$					
$r(x)$					

c) Calcular $\lim_{x\to 0^+} a(x)$.

2. Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante. Considerar el triángulo ΔPAO formado por P, $A(0, 1)$ y el origen O $(0, 0)$, y el triángulo ΔPBO formado por P, $B(1, 0)$ y el origen:



a) Determinar el área de cada triángulo en términos de x.

b) Sea $a(x)$ la relación entre las áreas de ambos triángulos,

$$a(x) = \frac{\text{Área } \triangle PBO}{\text{Área } \triangle PAO}.$$

Completar la tabla.

x	4	2	1	0.1	0.01
Área $\triangle PAO$					
Área $\triangle PBO$					
$a(x)$					

c) Calcular $\lim_{x\to 0^+} a(x)$.

3. a) Calcular el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 1. ¿Cuánto se acerca su área a la del círculo?

b) Encontrar el área A_n de un polígono regular con n lados inscrito en un círculo de radio 1. Elaborar su respuesta como una función de n.

c) Completar la tabla.

n	6	12	24	48	96
A_n					

d) ¿Qué número es cada vez mayor cuando A_n tiende a n?

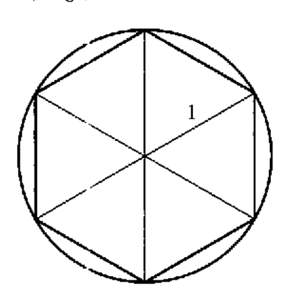


Figura para 3

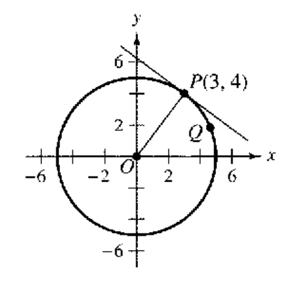


Figura para 4

4. Sea $P(3, 4)$ un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

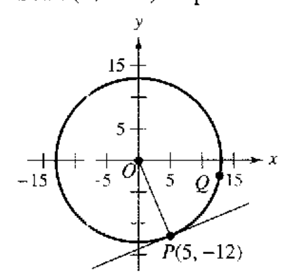
a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une a P con $O(0, 0)$?

b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P.

c) Sea $Q(x, y)$ otro punto que se encuentra en el primer cuadrante y forma parte de la misma circunferencia. Calcular la pendiente m_x de la recta que une a P con Q en términos de x.

d) Calcular $\lim_{x\to 3} m_x$. ¿Cómo se relaciona este número con la respuesta al apartado b)?

5. Sea $P(5, -12)$ un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 169$.



a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une a P con $O(0, 0)$?

b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P.

c) Sea $Q(x, y)$ otro punto que se encuentra en el primer cuadrante y forma parte de la misma circunferencia. Calcular la pendiente m_x de la recta que une a P con Q en términos de x.

d) Calcular $\lim_{x\to 5} m_x$. ¿Cómo se relaciona este número con la respuesta al apartado b)?

6. Encontrar valores de las constantes a y b tales que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}.$$

7. Considerar la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 + x^{1/3}} - 2}{x - 1}$.

a) Encontrar el dominio de f.

b) Utilizar una computadora para representar gráficamente la función.

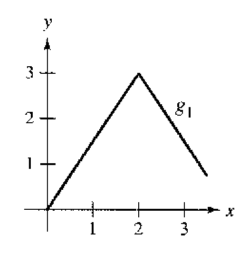
c) Calcular $\lim\limits_{x \to -27^-} f(x)$.

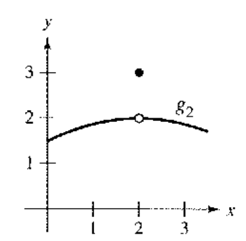
d) Calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

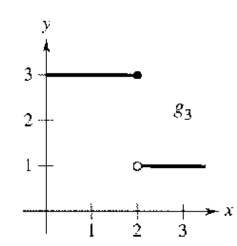
8. Determinar todos los valores de la constante a tales que la siguiente función sea continua en todos los números reales.

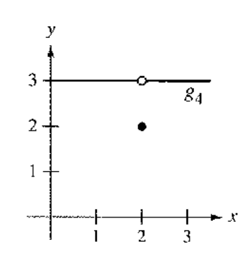
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{\tan x}, & x \geq 0 \\ a^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$$

9. Considerar las gráficas de las funciones g_1, g_2, g_3 y g_4:









Tomando en cuenta cada una de las siguientes condiciones, ¿qué gráfica podría ser una gráfica de f?

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

b) f es continua en 2.

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$

10. Construir la gráfica de la función $f(x) = \left[\!\left[\dfrac{1}{x}\right]\!\right]$.

a) Evaluar $f(\frac{1}{4})$, $f(3)$ y $f(1)$.

b) Evaluar los límites $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

c) Analizar la continuidad de la función.

11. Construir la gráfica de la función $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

a) Evaluar $f(1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ y $f(-2.7)$.

b) Evaluar los límites $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.

c) Analizar la continuidad de la función.

12. Para que un cohete escape del campo gravitacional de la Tierra, se debe lanzar con una velocidad inicial denominada **velocidad de escape**. Un cohete lanzado desde la superficie de la Tierra tiene una velocidad v (en millas por segundo) dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + v_0^2 - \frac{2GM}{R}} \approx \sqrt{\frac{192\,000}{r} + v_0^2 - 48}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, r es la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra, G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra (4 000 millas, aproximadamente).

a) Encontrar el valor de v_0 para el que se obtiene un límite infinito para r cuando v tiende a cero. Este valor de v_0 es la velocidad de escape para la Tierra.

b) Un cohete lanzado desde la superficie de la Luna se traslada con una velocidad v (en millas por segundo) dada por

$$v = \sqrt{\frac{1\,920}{r} + v_0^2 - 2.17}.$$

Encontrar la velocidad de escape para la Luna.

c) Un cohete lanzado desde la superficie de un planeta se traslada con una velocidad v (en millas por segundo) dada por

$$v = \sqrt{\frac{10\,600}{r} + v_0^2 - 6.99}.$$

Encontrar la velocidad de escape de este planeta. ¿Es la masa de este planeta mayor o menor que la de la Tierra? (Suponer que la densidad media de este planeta es igual a la de la Tierra.)

13. Para números positivos $a < b$, la **función pulso** se define como:

$$P_{a,b}(x) = H(x - a) - H(x - b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

donde $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ es la función de Heaviside.

a) Trazar la gráfica de la función pulso.

b) Encontrar los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x \to a^+} P_{a,b}(x)$ *ii)* $\lim\limits_{x \to a^-} P_{a,b}(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to b^+} P_{a,b}(x)$ *iv)* $\lim\limits_{x \to b^-} P_{a,b}(x)$

c) Analizar la continuidad de la función pulso.

d) ¿Por qué

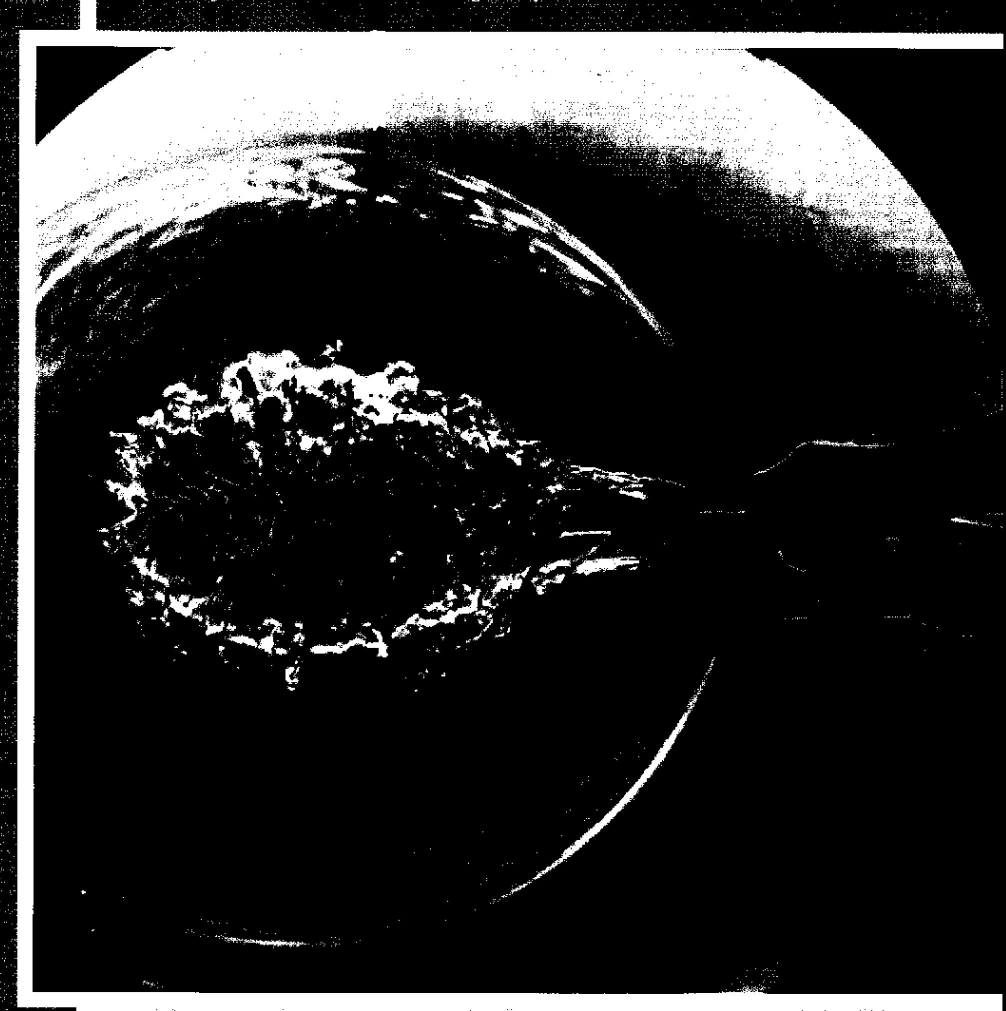
$$U(x) = \frac{1}{b - a} P_{a,b}(x)$$

se llama la función pulso **unitario**?

14. Sea a una constante diferente de cero. Comprobar que si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(ax) = L$. Demostrar por medio de un ejemplo que a debe ser distinta de cero.

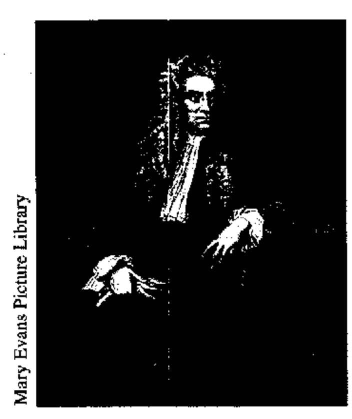
Derivación

Al bombear aire dentro de un globo desinflado hasta hacerlo reventar, el diámetro de dicho globo ¿cambia más rápido cuando se empieza a inflar o justo antes de reventar? ¿Por qué?



Dr. Gary Settles/SPL/Photo Researchers

Sección 2.1 La derivada y el problema de la recta tangente



ISAAC NEWTON (1642-1727)

Además de sus trabajos relativos al Cálculo, Newton aportó contribuciones a la Física tan revolucionarias como la Ley de la Gravitación Universal y sus tres leyes del movimiento.

- **Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.**
- **Usar la definición de límite para calcular la derivada de una función.**
- **Comprobar la relación entre derivabilidad y continuidad.**

El problema de la recta tangente

El cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.

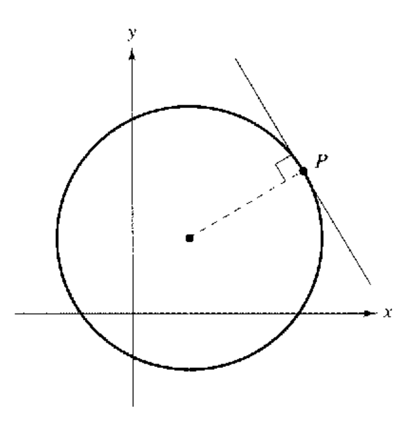
1. El problema de la recta tangente (sección 1.1 y esta sección)
2. El problema de la velocidad y la aceleración (secciones 2.2 y 2.3)
3. El problema de los máximos y mínimos (sección 3.1)
4. El problema del área (secciones 1.1 y 4.2)

Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al cálculo.

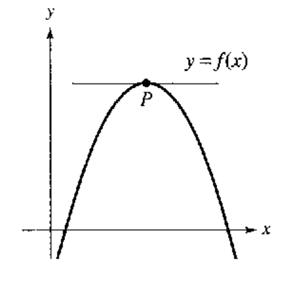
En la sección 1.1 se hizo una breve introducción al problema de la recta tangente. Aunque Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales, la primera solución general se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton respecto a este problema procedía de su interés por la refracción de la luz y la óptica.

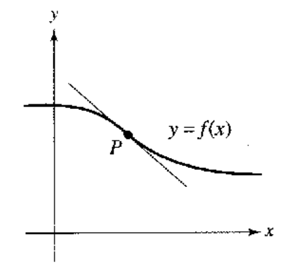
¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto P es la recta perpendicular al radio que pasa por P, como se muestra en la figura 2.1.

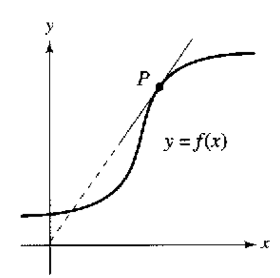
Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto P si toca a la curva en P sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 2.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto P, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2.2.



Recta tangente a una circunferencia
Figura 2.1



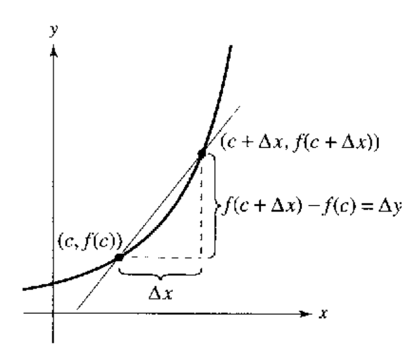




Recta tangente a una curva en un punto
Figura 2.2

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información acerca de las acreditaciones de los descubrimientos matemáticos al primer "descubridor", veáse el artículo "Mathematical Firsts—Who Done It?" de Richard H. Williams y Roy D. Mazzagatti en *Mathematics Teacher*.

Identificación de una recta tangente **Utilizar una computadora para representar gráficamente la función $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. En la misma pantalla, dibujar la gráfica $y = x - 5$, $y = 2x - 5$ y $y = 3x - 5$. ¿Cuál de estas rectas, si es que hay alguna, parece tangente a la gráfica de f en el punto $(0, -5)$? Explicar el razonamiento.**



Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$
Figura 2.3

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante*** que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 2.3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}.$$

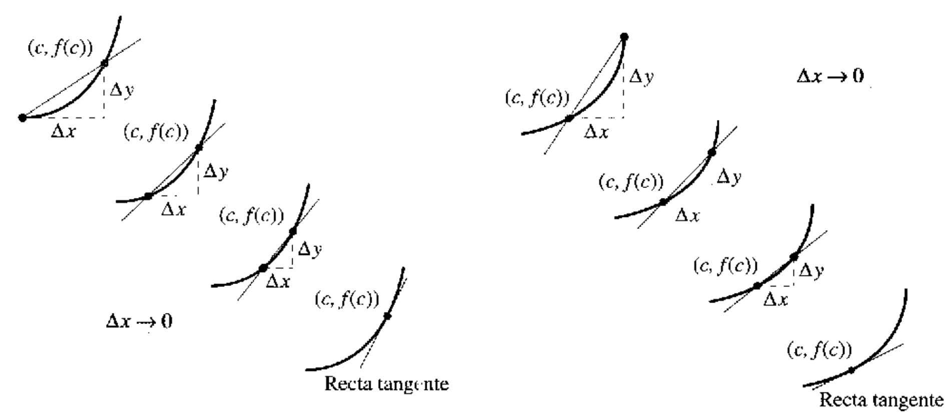
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}. \qquad \text{Pendiente de la recta secante.}$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente incremental o de diferencias.** El denominador Δx es el **cambio** (o incremento) **en x** y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es el **cambio** (o incremento) **en y**.

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener aproximaciones más y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como se muestra en la figura 2.4.

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE
En 1637 el matemático René Descartes afirmó lo siguiente respecto al problema de la recta tangente:

"Y no tengo inconveniente en afirmar que éste no es sólo el problema de Geometría más útil y general que conozco, sino incluso el que siempre desearía conocer."



Aproximaciones a la recta tangente
Figura 2.4

Definición de la recta tangente con pendiente *m*

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces, la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ se llama también **pendiente de la gráfica de f en $x = c$.**

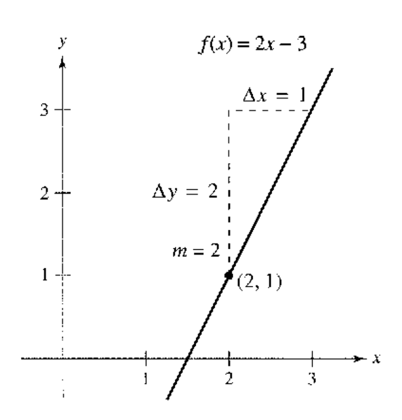
* *El uso de la palabra* secante *procede del latín* secare, *que significa cortar, y no es una referencia a la función trigonométrica del mismo nombre.*

EJEMPLO 1 La pendiente de la gráfica de una función lineal

Encontrar la pendiente de la gráfica de

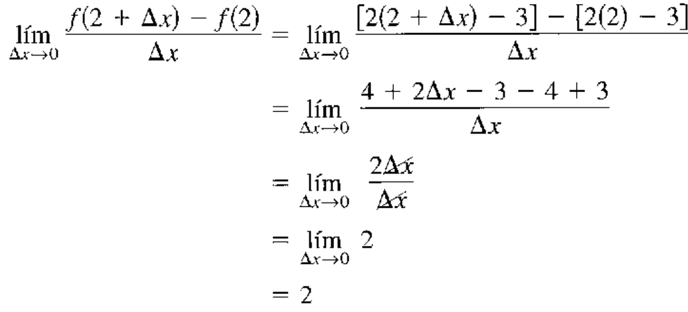
$$f(x) = 2x - 3$$

en el punto (2, 1).



La pendiente de f en (2, 1) es $m = 2$
Figura 2.5

Solución Para encontrar la pendiente de la gráfica de f cuando $c = 2$, aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente como se muestra a continuación:



$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(2 + \Delta x) - 3] - [2(2) - 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 2\Delta x - 3 - 4 + 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

La pendiente de f en $(c, f(c)) = (2, 1)$ es $m = 2$, como se observa en la figura 2.5.

NOTA En el ejemplo 1, la definición de la pendiente de f por medio de límites concuerda con la definición analizada en la sección P.2.

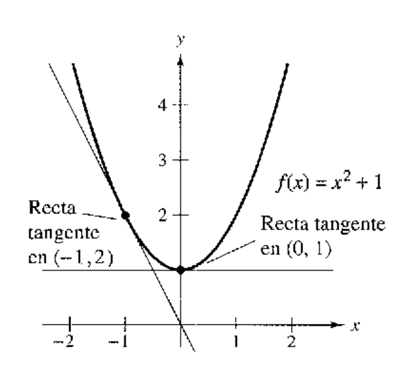
La gráfica de una función lineal tiene la misma pendiente en todos sus puntos, lo cual no sucede en las funciones no lineales, como se puede observar en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 Rectas tangentes a la gráfica de una función no lineal

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 1$$

en los puntos (0, 1) y $(-1, 2)$, que se ilustran en la figura 2.6.



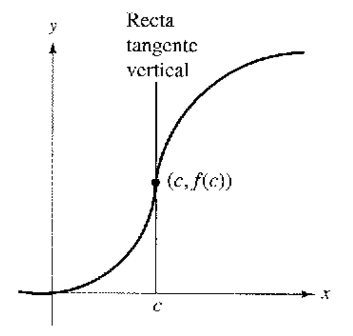
La pendiente de f en un punto cualquiera $(c, f(c))$ es $m = 2c$
Figura 2.6

Solución Sea $(c, f(c))$ un punto cualquiera de la gráfica de f. La pendiente de la recta tangente en él se encuentra mediante:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(c + \Delta x)^2 + 1] - (c^2 + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c^2 + 2c(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2c(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2c + \Delta x) \\
&= 2c.
\end{aligned}$$

De tal manera, la pendiente en *cualquier* punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f es $m = 2c$. En el punto (0, 1) la pendiente es $m = 2(0) = 0$ y en $(-1, 2)$, la pendiente es $m = 2(-1) = -2$.

NOTA Observar que en el ejemplo 2, c se mantiene constante en el proceso de límite (cuando $\Delta x \to 0$).



La gráfica de f tiene recta tangente vertical en $(c, f(c))$
Figura 2.7

La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, usar la siguiente definición. Si f es continua en c y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

la recta vertical, $x = c$, que pasa por $(c, f(c))$ es una **recta tangente vertical** a la gráfica de f, por ejemplo, la función que se muestra en la figura 2.7 tiene tangente vertical en $(c, f(c))$. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede ampliar la definición de recta tangente vertical de manera que incluya los extremos, considerando la continuidad y los límites por la derecha (para $x = a$) y por la izquierda (para $x = b$).

Derivada de una función

Se ha llegado a un punto crucial en el estudio del cálculo. El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la **derivación**.

Definición de la derivada de una función

La **derivada** de f en x viene dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Observar que la derivada de una función de x también es una función de x. Esta "nueva" función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto.

El proceso de calcular la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** en x si su derivada en x existe, y **derivable en un intervalo abierto (a, b)** si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Además de $f'(x)$, que se lee "f prima de x", se usan otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$. Las más comunes son:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y].$$ Notaciones para la derivada.

La notación dy/dx se lee "derivada de y *con respecto a* x". Usando notaciones de límites, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la derivada mediante el proceso de límite

Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$.

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3+2x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2]\\
&= 3x^2 + 2
\end{aligned}
$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente incremental (o cociente de diferencias), de manera que Δx no aparezca como factor del denominador.

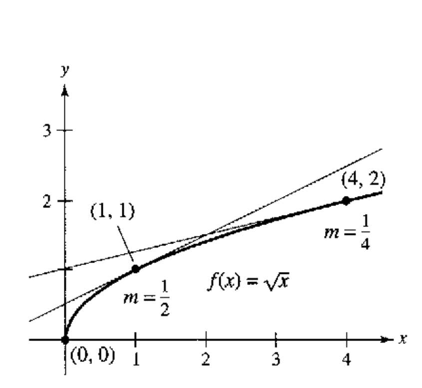
Cabe recordar que la derivada de una función f es en sí una función, misma que puede emplearse para encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Uso de la derivada para calcular la pendiente en un punto

Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular luego la pendiente de la gráfica de f en los puntos (1, 1) y (4, 2). Analizar el comportamiento de f en (0, 0).

Solución Se racionaliza el numerador, como se explicó en la sección 1.3.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
\end{aligned}
$$



La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/(2\sqrt{x})$
Figura 2.8

En el punto (1, 1) la pendiente es $f'(1) = \frac{1}{2}$. En el punto (4, 2) la pendiente es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Ver la figura 2.8. En el punto (0, 0) la pendiente no está definida. Además, la gráfica de f tiene tangente vertical en (0, 0).

En muchas aplicaciones, resulta conveniente usar una variable independiente distinta de x, como se manifiesta en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función

Encontrar la derivada de la función $y = 2/t$ respecto a t.

Solución Considerando $y = f(t)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$ Definición de derivada.

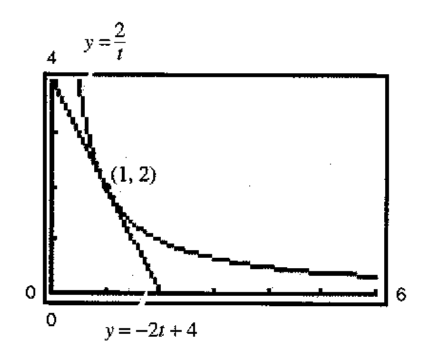
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2}{t + \Delta t} - \dfrac{2}{t}}{\Delta t}$$ $f(t + \Delta t) = 2/(t + \Delta t)$ y $f(t) = 2/t$.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)}}{\Delta t}$$ Combinar las fracciones del numerador.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2\Delta t}{\Delta t(t)(t + \Delta t)}$$ Cancelar el factor común Δt.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)}$$ Simplificar.

$$= -\frac{2}{t^2}.$$ Evaluar el límite cuando $\Delta t \to 0$.



En el punto (1, 2) la recta $y = -2t + 4$ es tangente a la gráfica de $y = 2/t$
Figura 2.9

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una calculadora para corroborar el resultado del ejemplo 5. Es decir, usando la fórmula $dy/dt = -2/t^2$, se sabe que la pendiente de la gráfica de $y = 2/t$ en el punto (1, 2) es $m = -2$. Esto implica que una ecuación de la recta tangente a la gráfica en (1, 2) es

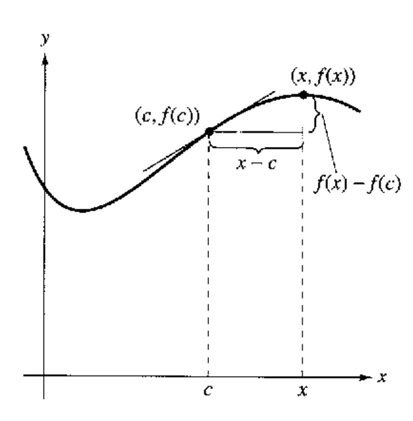
$$y - 2 = -2(t - 1) \quad \text{o} \quad y = -2t + 4$$

como se muestra en la figura 2.9.

Derivabilidad y continuidad

La siguiente forma alternativa como límite de la derivada es útil al investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de f en c es

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$ Fórmula alternativa de la derivada.

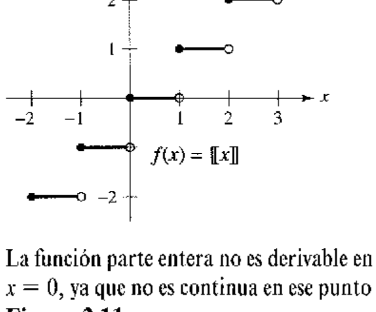


Cuando x tiende a c, la recta secante se aproxima a la recta tangente
Figura 2.10

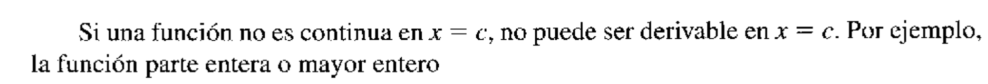
siempre que dicho límite exista (ver la figura 2.10) (en el apéndice A se demuestra la equivalencia de ambas fórmulas). Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites unilaterales

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda y por la derecha**, respectivamente. Se dice que f es **derivable en un intervalo cerrado [a, b]** si es derivable en (a, b) y existen además la derivada por la derecha en a y la derivada por la izquierda en b.



La función parte entera no es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en ese punto
Figura 2.11



Si una función no es continua en $x = c$, no puede ser derivable en $x = c$. Por ejemplo, la función parte entera o mayor entero

$$f(x) = [\![x]\!]$$

no es continua en $x = 0$, y en consecuencia no es derivable en $x = 0$ (ver la figura 2.11). Se comprueba con sólo observar que

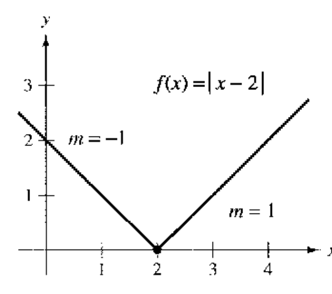
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = \infty \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = 0. \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

Aunque es cierto que derivable implica continua (como se muestra en el teorema 2.1), el recíproco no es cierto. En otras palabras, puede ocurrir que una función sea continua en $x = c$ y *no* sea derivable en $x = c$. Los ejemplos 6 y 7 ilustran tal posibilidad.

EJEMPLO 6 Una gráfica con un punto angular o anguloso



f no es derivable en $x = 2$, porque las derivadas laterales no son iguales

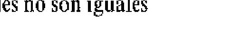



Figura 2.12

La función

$$f(x) = |x - 2|$$

que se muestra en la figura 2.12 es continua en $x = 2$. Sin embargo, los límites unilaterales

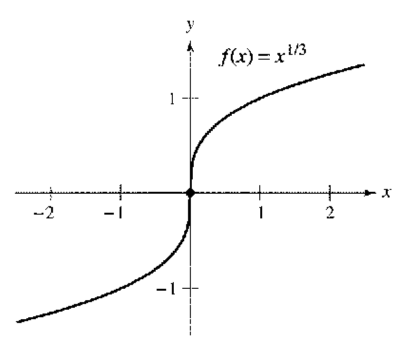
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1 \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1 \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

no son iguales. Por consiguiente, f no es derivable en $x = 2$ y la gráfica de f no tiene una recta tangente en el punto $(2, 0)$.

EJEMPLO 7 Una gráfica con una recta tangente vertical



f no es derivable en $x = 0$, porque tiene tangente vertical en ese punto
Figura 2.13

La función

$$f(x) = x^{1/3}$$

es continua en $x = 0$, como se observa en la figura 2.13. Sin embargo, como el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}\\ &= \infty\end{aligned}$$

es infinito, se puede concluir que la recta tangente en $x = 0$ es vertical. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

En los ejemplos 6 y 7 se puede observar que una función no es derivable en un punto donde su gráfica cuenta con un punto angular *o* una tangente vertical.

TECNOLOGÍA Algunas computadoras utilizan los programas de cálculo *Derive*, *Maple*, *Mathcad*, *Mathematica* y *TI89*, para realizar una derivación simbólica. Otros la hacen numérica, calculando valores de la derivada mediante la fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

donde Δx es un número pequeño como 0.001. ¿Observa algún problema con esta definición? Por ejemplo, usándola ¿cuál sería la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$?

TEOREMA 2.1 Derivable implica continua

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Demostración Para comprobar que f es continua en $x = c$ bastará con mostrar que $f(x)$ tiende a $f(c)$ cuando $x \to c$. Para tal fin, usar la derivabilidad de f en $x = c$ considerando el siguiente límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}[f(x) - f(c)] &= \lim_{x\to c}\left[(x - c)\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\right] \\
&= \left[\lim_{x\to c}(x - c)\right]\left[\lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] \\
&= (0)[f'(c)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puesto que la diferencia $f(x) - f(c)$ tiende a cero cuando $x \to c$, se puede concluir que $\lim_{x\to c}[f(x) = f(c)$. De tal manera, f es continua en $x = c$.

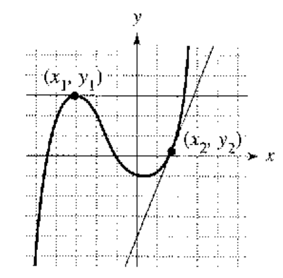
Los siguientes enunciados expresan en forma resumida la relación que existe entre continuidad y derivabilidad:

1. Si una función es derivable en $x = c$. entonces es continua en $x = c$. Por tanto, derivable implica continua.
2. Es posible que una función sea continua en $x = c$ sin ser derivable. En otras palabras, continua no implica derivable.

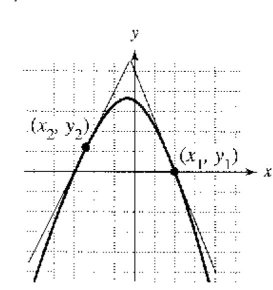
Ejercicios de la sección 2.1

En los ejercicios 1 y 2, estimar la pendiente de la curva en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

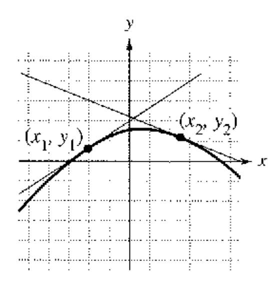
1. *a)*



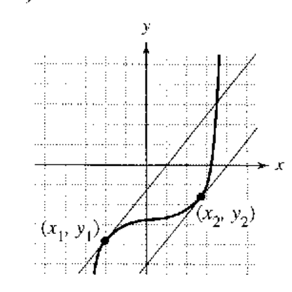
b)



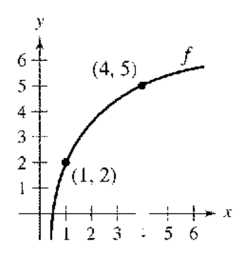
2. *a)*



b)



Con el fin de resolver los ejercicios 3 y 4, utilizar la gráfica que se muestra a continuación.



3. Identificar o trazar en la figura cada una de las cantidades siguientes.

   a) $f(1)$ y $f(4)$ *b)* $f(4) - f(1)$

   c) $y = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Escribir un símbolo de desigualdad (< o >) entre las cantidades dadas

   a) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ $\quad\dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

   b) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ $\quad f'(1)$

En los ejercicios 5 a 10, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

5. $f(x) = 3 - 2x, \quad (-1, 5)$ **6.** $g(x) = \frac{3}{2}x + 1, \quad (-2, -2)$

7. $g(x) = x^2 - 4, \quad (1, -3)$ **8.** $g(x) = 5 - x^2, \quad (2, 1)$

9. $f(t) = 3t - t^2, \quad (0, 0)$ **10.** $h(t) = t^2 + 3, \quad (-2, 7)$

En los ejercicios 11 a 24, encontrar la derivada mediante el proceso de límite.

11. $f(x) = 3$ **12.** $g(x) = -5$

13. $f(x) = -5x$ **14.** $f(x) = 3x + 2$

15. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$ **16.** $f(x) = 9 - \frac{1}{2}x$

17. $f(x) = 2x^2 + x - 1$ **18.** $f(x) = 1 - x^2$

19. $f(x) = x^3 - 12x$ **20.** $f(x) = x^3 + x^2$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

23. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ **24.** $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

En los ejercicios 25 a 32, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto indicado, *b*) utilizar una computadora para dibujar la gráfica, la función y su recta tangente en dicho punto, y *c*) aplicar la función *derivada* de una computadora con el fin de verificar sus resultados.

25. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$

26. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad (-3, 4)$

27. $f(x) = x^3, \quad (2, 8)$ **28.** $f(x) = x^3 + 1, \quad (1, 2)$

29. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$ **30.** $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad (5, 2)$

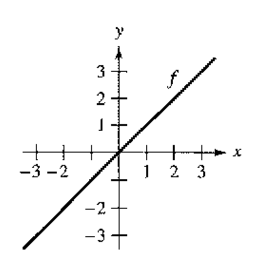
31. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}, \quad (4, 5)$ **32.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad (0, 1)$

En los ejercicios 33 a 36, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f y paralela a la recta dada.

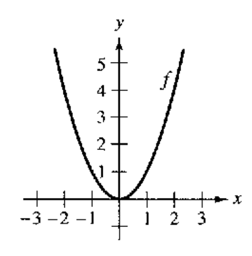
	Función	*Recta*
33.	$f(x) = x^3$	$3x - y + 1 = 0$
34.	$f(x) = x^3 + 2$	$3x - y - 4 = 0$
35.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x + 2y - 6 = 0$
36.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$	$x + 2y + 7 = 0$

En los ejercicios 37 a 40, se muestra la gráfica de f. Seleccionar la gráfica de f'.

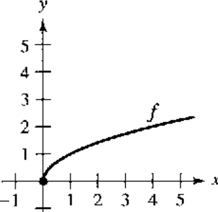
37.



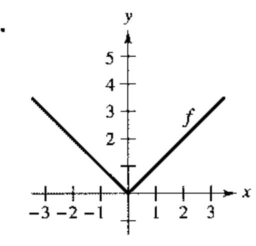
38.



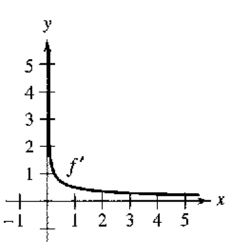
39.



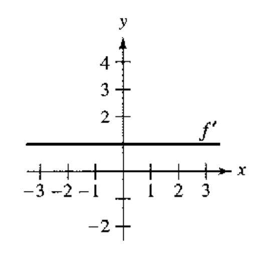
40.



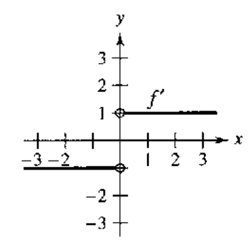
a)



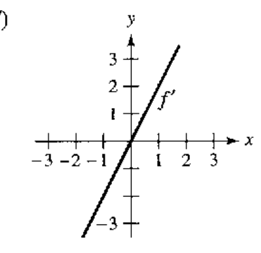
b)



c)



d)



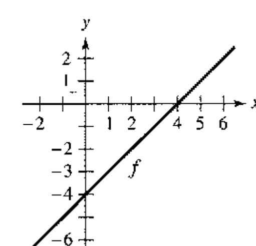
41. La recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en el punto $(5, 2)$ pasa por el punto $(9, 0)$. Encontrar $g(5)$ y $g'(5)$.

42. La recta tangente a la gráfica de $y = h(x)$ en el punto $(-1, 4)$ pasa por el punto $(3, 6)$. Encontrar $h(-1)$ y $h'(-1)$.

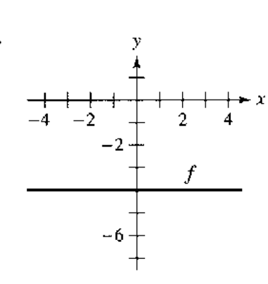
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 43 a 46, construir la gráfica de f' y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

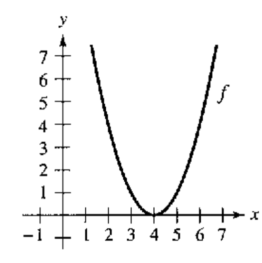
43.



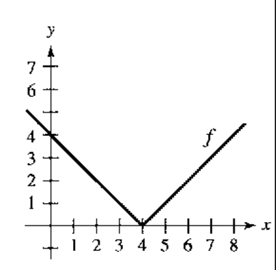
44.



45.



46.



47. Construir la gráfica de una función cuya derivada siempre sea negativa.

Desarrollo de conceptos (continuación)

48. Construir la gráfica de una función cuya derivada siempre sea positiva.

En los ejercicios 49 a 52, el límite representa a $f'(c)$ para una función f y un número c. Encontrar f y c.

49. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5 - 3(1 + \Delta x)] - 2}{\Delta x}$ **50.** $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2 + \Delta x)^3 + 8}{\Delta x}$

51. $\lim_{x \to 6} \frac{-x^2 + 36}{x - 6}$ **52.** $\lim_{x \to 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

En los ejercicios 53 a 55, identifique una función f que tenga las características señaladas. Represéntela gráficamente.

53. $f(0) = 2$; $f'(x) = -3, -\infty < x < \infty$

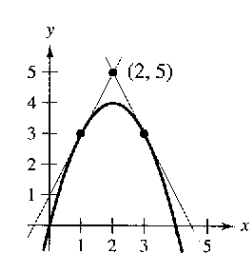
54. $f(0) = 4; f'(0) = 0$; $f'(x) < 0$ para $x < 0$; $f'(x) > 0$ para $x > 0$

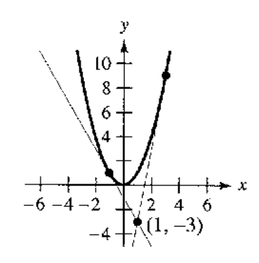
55. $f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(x) > 0$ si $x \neq 0$

56. Suponer que $f'(c) = 3$. Encontrar $f'(-c)$ si: *a)* f es una función impar *b)* f es una función par.

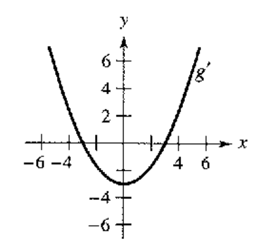
En los ejercicios 57 y 58, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado.

57. $f(x) = 4x - x^2$ **58.** $f(x) = x^2$





59. ***Razonamiento gráfico*** En la figura se muestra la gráfica de g'.



a) $g'(0) =$ *b)* $g'(3) =$

c) ¿Qué se puede concluir de la gráfica de g, sabiendo que $g'(1) = -\frac{8}{3}$?

d) ¿Qué se puede concluir de la gráfica de g, sabiendo que $g'(-4) = \frac{7}{3}$?

e) $g(6) - g(4)$ ¿es positiva o negativa? Explicar la respuesta.

f) ¿Es posible encontrar $g(2)$ a partir de la gráfica? Explicar la respuesta.

60. ***Razonamiento gráfico*** Utilizar una computadora para dibujar la gráfica de cada una de las funciones y sus rectas tangentes en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Con base en los resultados, determinar si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función en distintos valores de x siempre son distintas.

a) $f(x) = x^2$ *b)* $g(x) = x^3$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 61 y 62, utilizar una computadora para representar f en el intervalo $[-2, 2]$. Completar la tabla estimando gráficamente las pendientes de la gráfica en los puntos indicados. A continuación, evaluar las pendientes de manera analítica y comparar los resultados.**

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$									
$f'(x)$									

61. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ **62.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 63 y 64, representar en una misma ventana de la calculadora las gráficas de f y g y describir la relación entre ellas.**

$$g(x) = \frac{f(x + 0.01) - f(x)}{0.01}.$$

clasificar las gráficas y describir la relación entre ellas.

63. $f(x) = 2x - x^2$ **64.** $f(x) = 3\sqrt{x}$

En los ejercicios 65 y 66, evaluar $f(2)$ y $f(2.1)$, y utilizar los resultados para estimar $f'(2)$.

65. $f(x) = x(4 - x)$ **66.** $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 67 y 68, utilizar una computadora para dibujar la gráfica de la función y su derivada en la misma ventana. Clasificar las gráficas y describir la relación que existe entre ellas.**

67. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **68.** $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$

Redacción **En los ejercicios 69 y 70, tomar en consideración las funciones f y $S_{\Delta x}$, donde**

$$S_{\Delta x}(x) = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}(x - 2) + f(2).$$

a) **Utilizar una computadora para dibujar la gráfica f y $S_{\Delta x}$ en la misma pantalla para $\Delta x = 1, 0.5$ y 0.1.**

b) **Desarrollar una descripción de las gráficas de S para los diferentes valores de Δx en el apartado *a*).**

69. $f(x) = 4 - (x - 3)^2$ **70.** $f(x) = x + \frac{1}{x}$

En los ejercicios 71 a 80, utilizar la forma alterna para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

71. $f(x) = x^2 - 1,\ c = 2$ **72.** $g(x) = x(x - 1),\ c = 1$

73. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1,\ c = -2$

74. $f(x) = x^3 + 2x,\ c = 1$

75. $g(x) = \sqrt{|x|},\ c = 0$

76. $f(x) = 1/x,\ c = 3$

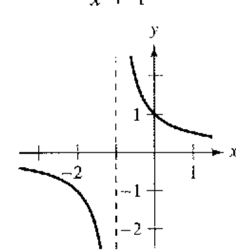
77. $f(x) = (x - 6)^{2/3},\ c = 6$

78. $g(x) = (x + 3)^{1/3},\ c = -3$

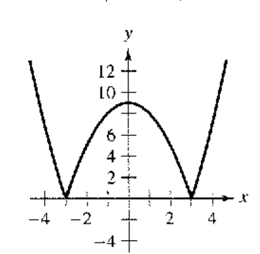
79. $h(x) = |x + 5|,\ c = -5$ **80.** $f(x) = |x - 4|,\ c = 4$

En los ejercicios 81 a 86, describir los valores x para los que f es derivable.

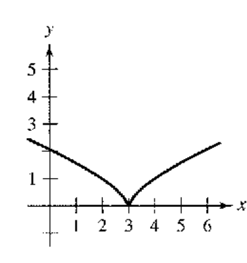
81. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$



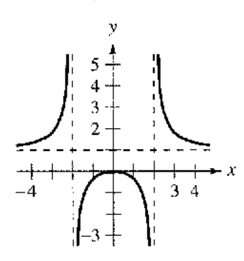
82. $f(x) = |x^2 - 9|$



83. $f(x) = (x - 3)^{2/3}$

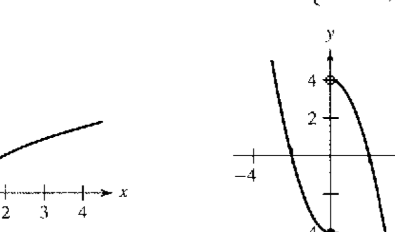


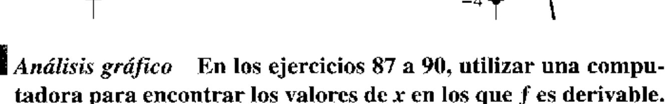
84. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



85. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

86. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$





Análisis gráfico **En los ejercicios 87 a 90, utilizar una computadora para encontrar los valores de x en los que f es derivable.**

87. $f(x) = |x + 3|$ **88.** $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

89. $f(x) = x^{2/5}$

90. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x, & x \le 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 91 a 94, calcular las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen). ¿Es derivable la función en $x = 1$?

91. $f(x) = |x - 1|$ **92.** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

93. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x \le 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$ **94.** $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 95 y 96, determinar si la función es derivable en $x = 2$.

95. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$ **96.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

97. ***Razonamiento gráfico*** Una recta de pendiente m pasa por el punto $(0, 4)$ y tiene ecuación $y = mx + 4$.

a) Escribir la distancia d que hay entre la recta y el punto $(3, 1)$ como función de m.

b) Utilizar una computadora para dibujar la gráfica de la función d del apartado *a*). Basándonos en la gráfica, ¿es esa función derivable para todo valor de m? Si no es así, especificar en dónde no lo es.

98. ***Conjetura*** Tomando en cuenta las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$:

a) Dibujar la gráfica f y f' sobre el mismo conjunto de ejes.

b) Dibujar la gráfica g y g' sobre el mismo conjunto de ejes.

c) Identificar un patrón entre f y g y sus respectivas derivadas. Utilizarlo para hacer conjeturas respecto a $h'(x)$ si $h(x) = x^n$, donde n es un número entero mayor o igual y $n \ge 2$.

d) Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = x^4$. Comparar el resultado con la conjetura del apartado *c*). ¿Esto comprueba la conjetura? Explicar la respuesta.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Para las que sean falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

99. La pendiente de la recta tangente a una función derivable f en el punto $(2, f(2))$ es $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

100. Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en él.

101. Si una función tiene derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es derivable en él.

102. Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él.

103. Sean $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

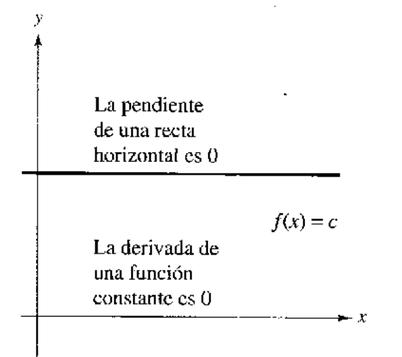
Demostrar que f es continua, pero no derivable, en $x = 0$. Demostrar que g es derivable en 0 y calcular $g'(0)$.

104. ***Redacción*** Utilizar una computadora para dibujar la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = |x| + 1$ en la misma ventana. Utilizar las funciones *zoom* y *trace* para analizarlas cerca del punto $(0, 1)$. ¿Qué se observa? ¿Cuál función es derivable en ese punto? Escribir un pequeño párrafo describiendo el significado geométrico de la derivabilidad en un punto.

Sección 2.2 Reglas básicas de derivación y ritmos o velocidades de cambio

- **Hallar la derivada de una función por la regla de la constante.**
- **Hallar la derivada de una función por la regla de las potencias.**
- **Hallar la derivada de una función por la regla del múltiplo constante.**
- **Hallar la derivada de una función por las reglas de suma y diferencia.**
- **Hallar la derivada de las funciones seno y coseno.**
- **Usar derivadas para calcular ritmos o velocidades de cambio.**

La regla de la constante



Regla de la constante
Figura 2.14

En la sección 2.1 se usó la definición por medio de límites para calcular las derivadas. Ésta y las dos próximas secciones presentan varias "reglas de derivación" que permiten calcular las derivadas sin el uso *directo* de la definición por límites.

TEOREMA 2.2 La regla de la constante

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

Demostración Sea $f(x) = c$. Entonces, por la definición de derivada mediante el proceso de límite, se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= f'(x)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

NOTA En la figura 2.14 se observa que la regla de la constante equivale a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto demuestra la relación que existe entre derivada y pendiente.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = 7$	$\frac{dy}{dx} = 0$
b)	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
c)	$s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
d)	$y = k\pi^2$, k es constante	$y' = 0$

EXPLORACIÓN

Conjetura Utilizar la definición de derivada de la sección 2.1 para encontrar la derivada de las siguientes funciones. ¿Qué patrones se observan? Utilizar los resultados para elaborar una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = x^n$.

a) $f(x) = x^1$ ***b)*** $f(x) = x^2$ ***c)*** $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$ ***e)*** $f(x) = x^{1/2}$ ***f)*** $f(x) = x^{-1}$

La regla de las potencias

Antes de demostrar la próxima regla, revisar el proceso de desarrollo de un binomio.

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

El desarrollo general del binomio para un entero positivo n cualquiera es

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \underbrace{\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}_{(\Delta x)^2 \text{ es un factor común en estos términos.}}.$$

Este desarrollo del binomio se va a utilizar para demostrar un caso especial de la regla de las potencias.

> **TEOREMA 2.3 La regla de las potencias**
>
> Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y
>
> $$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$
>
> Para que f sea derivable en $x = 0$, n debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

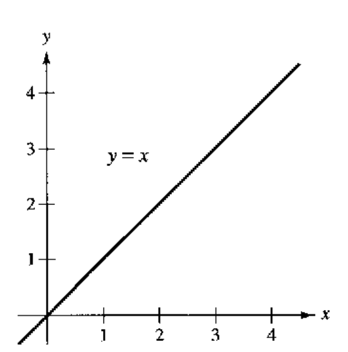
Demostración Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces del desarrollo del binomio resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema para $n > 1$. Se deja al lector la demostración del caso $n = 1$. En el ejemplo 7 de la sección 2.3 se demuestra el caso para el que n es un entero negativo. Mientras que en el ejercicio 75 de la sección 2.5 se demuestra el caso en el cual n es racional (en la sección 5.5 la regla de las potencias se extenderá hasta abarcar los valores irracionales de n).

Al utilizar la regla de las potencias, resulta conveniente separar el caso para el que $n = 1$ como otra regla distinta de derivación, a saber

$$\frac{d}{dx}[x] = 1. \qquad \text{Regla de las potencias para } n = 1.$$



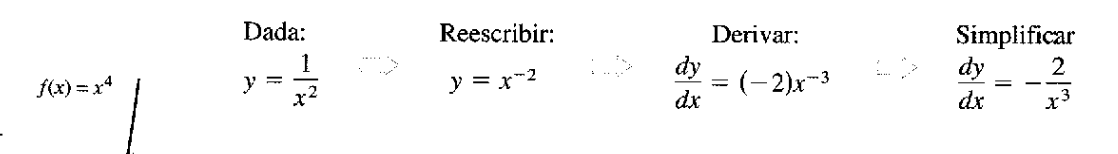
La pendiente de la recta $y = x$ es 1
Figura 2.15

Esta regla es congruente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es 1, como se muestra en la figura 2.15.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de las potencias

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
b)	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \dfrac{d}{dx}[x^{1/3}] = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$
c)	$y = \dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[x^{-2}] = (-2)x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

Observar que en el ejemplo 2*c*, *antes* de derivar se ha reescrito $1/x^2$ como x^{-2}. En muchos problemas de derivación, el primer paso consiste en reescribir la función.



EJEMPLO 3 Pendiente de una gráfica

Calcular la pendiente de la gráfica de $f(x) = x^4$ cuando

a) $x = -1$ ***b)*** $x = 0$ ***c)*** $x = 1$.

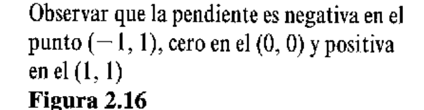
Solución La pendiente de una gráfica en un punto es igual a la derivada en dicho punto. La derivada de f es $f'(x) = 4x^3$.

a) Para $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$. La pendiente negativa.

b) Para $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4(0)^3 = 0$. La pendiente es 0.

c) Para $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1)^3 = 4$. La pendiente positiva.

Ver la figura 2.16


Observar que la pendiente es negativa en el punto $(-1, 1)$, cero en el $(0, 0)$ y positiva en el $(1, 1)$
Figura 2.16

EJEMPLO 4 Ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ cuando $x = -2$.

Solución Para encontrar el *punto* sobre la gráfica de f, evaluar la función en $x = -2$.

$$(-2, f(-2)) = (-2, -4)$$ Punto de la gráfica.

Para calcular la *pendiente* de la gráfica en $x = -2$. Evaluar la derivada, $f'(x) = 2x$, en $x = -2$.

$$m = f'(-2) = -4$$ Pendiente de la gráfica en $(-2, 4)$.

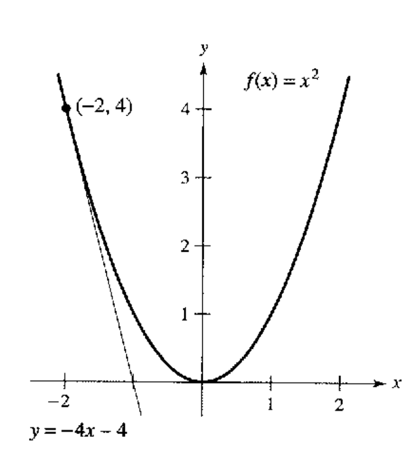
Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, escribir

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ Forma punto-pendiente.

$$y - 4 = -4[x - (-2)]$$ Sustituir y_1, m y x_1.

$$y = -4x - 4.$$ Simplificar.

Ver la figura 2.17.



La recta tangente $y = -4x - 4$ es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$
Figura 2.17

La regla del múltiplo constante

TEOREMA 2.4 La regla del múltiplo constante

Si f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\
&= c\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] && \text{Aplicar teorema 1.2.} \\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

De manera informal, esta regla establece que las constantes se pueden extraer de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right] = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del múltiplo constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = \frac{2}{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{-1}] = 2\frac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
b)	$f(t) = \frac{4t^2}{5}$	$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{5}t^2\right] = \frac{4}{5}\frac{d}{dt}[t^2] = \frac{4}{5}(2t) = \frac{8}{5}t$
c)	$y = 2\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{1/2}] = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
d)	$y = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-2/3}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\frac{1}{3x^{5/3}}$
e)	$y = -\frac{3x}{2}$	$y' = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{2}x\right] = -\frac{3}{2}(1) = -\frac{3}{2}$

La regla del múltiplo constante y la de las potencias se pueden combinar en una sola. La regla resultante es

$$D_x[cx^n] = cnx^{n-1}.$$

EJEMPLO 6 Uso de paréntesis al derivar

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \frac{5}{2x^3}$	$y = \frac{5}{2}(x^{-3})$	$y' = \frac{5}{2}(-3x^{-4})$	$y' = -\frac{15}{2x^4}$
b)	$y = \frac{5}{(2x)^3}$	$y = \frac{5}{8}(x^{-3})$	$y' = \frac{5}{8}(-3x^{-4})$	$y' = -\frac{15}{8x^4}$
c)	$y = \frac{7}{3x^{-2}}$	$y = \frac{7}{3}(x^2)$	$y' = \frac{7}{3}(2x)$	$y' = \frac{14x}{3}$
d)	$y = \frac{7}{(3x)^{-2}}$	$y = 63(x^2)$	$y' = 63(2x)$	$y' = 126x$

Las reglas de suma y diferencia

TEOREMA 2.5 Las reglas de suma y diferencia

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \qquad \text{Regla de la suma.}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x) \qquad \text{Regla de la diferencia.}$$

Demostración Una demostración de la regla de la suma se sigue del teorema 1.2 (la de la diferencia se demuestra de manera análoga).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Las reglas de suma y diferencia pueden ampliarse en cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, si $F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$, entonces $F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$.

EJEMPLO 7 Aplicación de las reglas de suma y diferencia

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3 - 4x + 5$	$f'(x) = 3x^2 - 4$
b)	$g(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$	$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$

PARA MAYOR INFORMACIÓN El esbozo de una demostración geométrica de las derivadas de las funciones seno y coseno puede consultarse en el artículo "The Spider's Spacewalk Derivation of sin′ and cos′" de Tim Hesterberg en *The College Mathematics Journal.*

Derivadas de las funciones seno y coseno

En la sección 1.3 se vieron los límites siguientes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$$

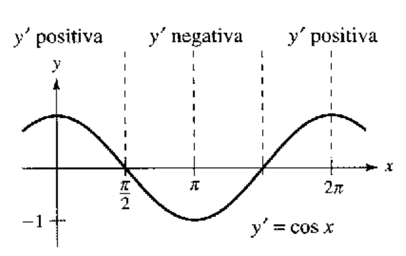
Estos dos límites pueden utilizarse para demostrar las reglas de derivación de las funciones seno y coseno (las derivadas de las demás funciones trigonométricas se analizan en la sección 2.3).

TEOREMA 2.6 Derivadas de las funciones seno y coseno

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

Demostración

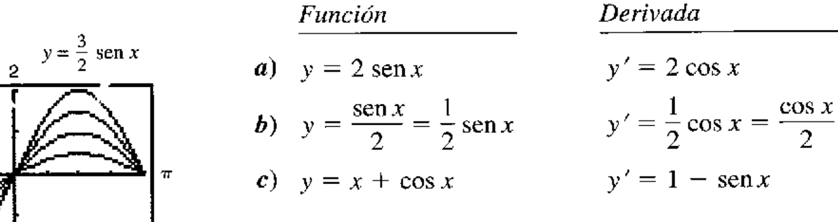
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x) \left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) - (\operatorname{sen} x) \left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right) \right]\\
&= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right)\\
&= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0)\\
&= \cos x
\end{aligned}$$



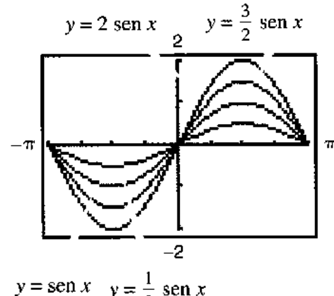
La derivada de la función seno es la función coseno
Figura 2.18

Esta regla de derivación se ilustra en la figura 2.18. Observar que para cada x, la *pendiente* de la curva seno es igual al valor del coseno. La demostración de la segunda regla se deja como ejercicio (ver el ejercicio 116).

EJEMPLO 8 Derivadas que contienen senos y cosenos



	Función	*Derivada*
a)	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$y' = 2 \cos x$
b)	$y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$	$y' = \dfrac{1}{2} \cos x = \dfrac{\cos x}{2}$
c)	$y = x + \cos x$	$y' = 1 - \operatorname{sen} x$



$\frac{d}{dx}[a \operatorname{sen} x] = a \cos x$

Figura 2.19

TECNOLOGÍA Una calculadora permite visualizar la interpretación de una derivada. Por ejemplo, en la figura 2.19 se muestran las gráficas de

$$y = a \operatorname{sen} x$$

para $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2. Estimar la pendiente de cada gráfica en el punto (0, 0). Después verificar los cálculos de manera analítica mediante el cálculo de la derivada de cada función cuando $x = 0$.

Ritmos o velocidades de cambio

Ya se ha visto que la derivada se utiliza para calcular pendientes. Pero también sirve para determinar el ritmo de cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Por citar sólo algunas, son ejemplos los ritmos de crecimiento de poblaciones, los ritmos de producción, los de flujo de un líquido, de la velocidad y de la aceleración.

Un uso frecuente de los ritmos de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical, con un origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

La función s que representa la posición (respecto al origen) de un objeto como función del tiempo t se denomina **función (de) posición.** Si durante cierto lapso Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces, empleando la consabida fórmula:

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

la **velocidad media** es

$$\frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{Velocidad media.}$$

EJEMPLO 9 Velocidad media de un objeto en su caída

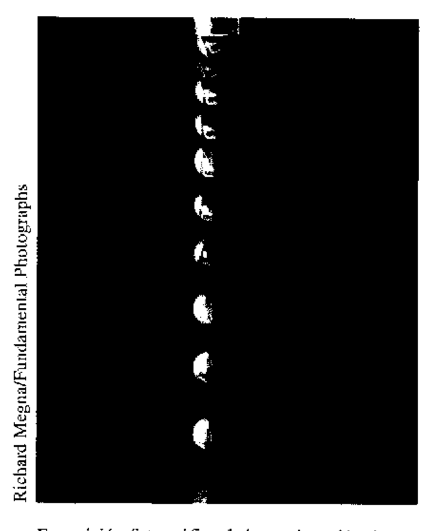
Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura s en el instante t se representa mediante la función posición

$$s = -16t^2 + 100 \qquad \text{Función posición.}$$

donde s se mide en pies y t en segundos. Encontrar su velocidad media para cada uno de estos intervalos.

a) $[1, 2]$ ***b***) $[1, 1.5]$ ***c***) $[1, 1.1]$

Solución



Exposición fotográfica de larga duración de una bola de billar en caída libre.

a) En el intervalo $[1, 2]$, el objeto cae desde una altura de $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ pies hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies por segundo.}$$

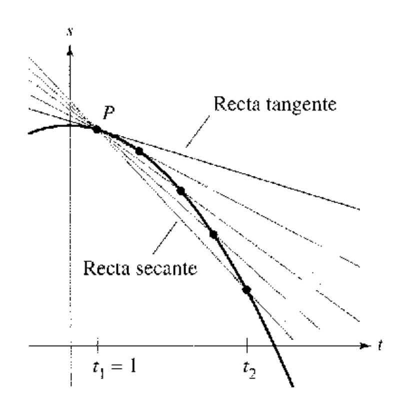
b) En el intervalo $[1, 1.5]$ el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{1.5 - 1} = \frac{-20}{0.5} = -40 \text{ pies por segundo.}$$

c) En el intervalo $[1, 1.1]$ el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 80.64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80.64 - 84}{1.1 - 1} = \frac{-3.36}{0.1} = -33.6 \text{ pies por segundo.}$$

Observar que las velocidades medias son *negativas*, lo que refleja el hecho de que el objeto se mueve hacia abajo.



La velocidad media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en t_1 es igual a la pendiente de la recta tangente
Figura 2.20

Supongamos que en el ejemplo anterior se quisiera encontrar la velocidad *instantánea* (o velocidad, sin más) del objeto cuando $t = 1$, al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse utilizando las pendientes de rectas secantes, se puede aproximar la velocidad en $t = 1$ por medio de las velocidades medias durante un pequeño intervalo $[1, 1 + \Delta t]$ (ver en la figura 2.20). Se obtiene dicha velocidad calculando el límite cuando Δt tiende a cero. Al intentar hacerlo se puede comprobar que la velocidad cuando $t = 1$ es de -32 pies por segundo.

En general, si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante t es

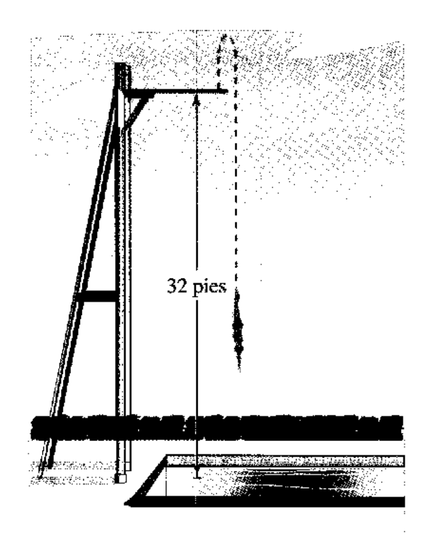
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$ Función velocidad.

En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa. La **rapidez** de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$ Función posición.

donde s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre viene a ser de -9.8 m/s^2.



La velocidad es positiva cuando un objeto se eleva, y negativa cuando desciende
Figura 2.21

EJEMPLO 10 Aplicación de la derivada para calcular la velocidad

En el instante $t = 0$, un saltador se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina (ver la figura 2.21). La posición del saltador está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$ Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el saltador en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Solución

a) Para determinar el momento en que toca el agua hacemos $s = 0$ y despejamos t.

$$-16t^2 + 16t + 32 = 0$$ Igualar a cero la función posición.

$$-16(t + 1)(t - 2) = 0$$ Factorizar.

$$t = -1 \text{ o } 2$$ Despejar t.

Como $t \geq 0$, hemos de seleccionar el valor positivo, así que el saltador llega al agua en $t = 2$ segundos.

b) Su velocidad en el instante t está dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. En consecuencia, su velocidad en $t = 2$ es

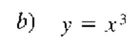
$$s'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ pies por segundo.}$$

NOTA En la figura 2.21 se observa que el saltador se mueve hacia arriba durante la primera mitad de segundo, porque la velocidad es positiva para $0 < t < \frac{1}{2}$. Cuando la velocidad es de 0, el saltador ha alcanzado la altura máxima del salto.

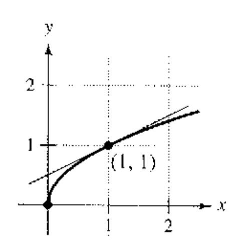
Ejercicios de la sección 2.2

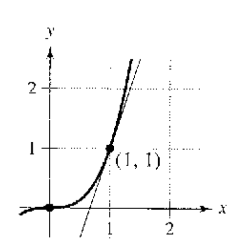
En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica para estimar la pendiente de la recta tangente a $y = x^n$ en el punto (1, 1). Verificar la respuesta de manera analítica.

1. *a)* $y = x^{1/2}$

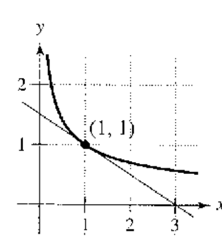


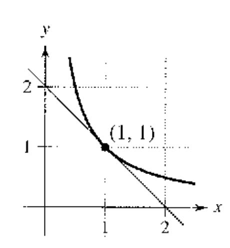
b) $y = x^3$





2. *a)* $y = x^{-1/2}$ *b)* $y = x^{-1}$





En los ejercicios 3 a 24, calcular la derivada de la función.

3. $y = 8$

4. $f(x) = -2$

5. $y = x^6$

6. $y = x^8$

7. $y = \dfrac{1}{x^7}$

8. $y = \dfrac{1}{x^8}$

9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$

11. $f(x) = x + 1$

12. $g(x) = 3x - 1$

13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$

14. $y = t^2 + 2t - 3$

15. $g(x) = x^2 + 4x^3$

16. $y = 8 - x^3$

17. $s(t) = t^3 - 2t + 4$

18. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

19. $y = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta - \cos \theta$

20. $g(t) = \pi \cos t$

21. $y = x^2 - \frac{1}{2} \cos x$

22. $y = 5 + \operatorname{sen} x$

23. $y = \dfrac{1}{x} - 3 \operatorname{sen} x$

24. $y = \dfrac{5}{(2x)^3} + 2 \cos x$

En los ejercicios 25 a 30, completar la tabla.

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
25.	$y = \dfrac{5}{2x^2}$			
26.	$y = \dfrac{2}{3x^2}$			
27.	$y = \dfrac{3}{(2x)^3}$			
28.	$y = \dfrac{\pi}{(3x)^2}$			
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$			
30.	$y = \dfrac{4}{x^{-3}}$			

En los ejercicios 31 a 38, encontrar la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilizar la función *derive* de una computadora para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
31.	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$	$(1, 3)$
32.	$f(t) = 3 - \dfrac{3}{5t}$	$\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
33.	$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
34.	$y = 3x^3 - 6$	$(2, 18)$
35.	$y = (2x + 1)^2$	$(0, 1)$
36.	$f(x) = 3(5 - x)^2$	$(5, 0)$
37.	$f(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta - \theta$	$(0, 0)$
38.	$g(t) = 2 + 3 \cos t$	$(\pi, -1)$

En los ejercicios 39 a 52, encontrar la derivada de cada función.

39. $f(x) = x^2 + 5 - 3x^{-2}$

40. $f(x) = x^2 - 3x - 3x^{-2}$

41. $g(t) = t^2 - \dfrac{4}{t^3}$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

43. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

44. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

45. $y = x(x^2 + 1)$

46. $y = 3x(6x - 5x^2)$

47. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$

48. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

49. $h(s) = s^{4/5} - s^{2/3}$

50. $f(t) = t^{2/3} - t^{1/3} + 4$

51. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5 \cos x$

52. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \cos x$

En los ejercicios 53 a 56, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) utilizar una computadora para dibujar la gráfica de la función y su recta tangente en el punto, y *c*) verificar los resultados empleando la función *derive* de su computadora.

	Función	*Punto*
53.	$y = x^4 - 3x^2 + 2$	$(1, 0)$
54.	$y = x^3 + x$	$(-1, -2)$
55.	$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$	$(1, 2)$
56.	$y = (x^2 + 2x)(x + 1)$	$(1, 6)$

En los ejercicios 57 a 62, determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal.

57. $y = x^4 - 8x^2 + 2$

58. $y = x^3 + x$

59. $y = \dfrac{1}{x^2}$

60. $y = x^2 + 1$

61. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x < 2\pi$

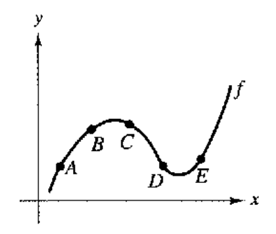
62. $y = \sqrt{3}x + 2\cos x, \quad 0 \le x < 2\pi$

En los ejercicios 63 a 66, encontrar una k tal que la recta sea tangente a la gráfica de la función

	Función	*Recta*
63.	$f(x) = x^2 - kx$	$y = 4x - 9$
64.	$f(x) = k - x^2$	$y = -4x + 7$
65.	$f(x) = \dfrac{k}{x}$	$y = -\dfrac{3}{4}x + 3$
66.	$f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$

Desarrollo de conceptos

67. Utilizar la gráfica para responder a las siguientes preguntas.



a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor el ritmo medio de cambio de la función?

b) ¿El ritmo de cambio medio de f entre A y B es mayor o menor que el ritmo instantáneo de cambio en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual al ritmo de cambio promedio de la función entre C y D.

68. Construir la gráfica de una función f tal que $f' > 0$ para todos los x y cuyo ritmo de cambio sea decreciente.

En los ejercicios 69 y 70 se muestra la relación que existe entre f y g. Explicar la relación entre f' y g'.

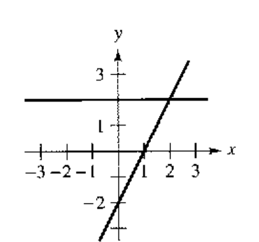
69. $g(x) = f(x) + 6$

70. $g(x) = -5\,f(x)$

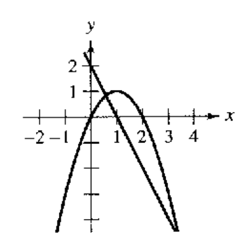
Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 71 y 72, se muestran las gráficas de la función f y de su derivada f' en el mismo plano cartesiano. Clasificar las gráficas como f o f' y explicar en un breve párrafo los criterios empleados para hacer tal selección.

71.



72.



73. Construir las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encontrar las ecuaciones de dichas rectas.

74. Demostrar que las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en su punto de intersección.

75. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = 3x + \operatorname{sen} x + 2$$

no tiene ninguna recta tangente horizontal.

76. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$$

no tiene una recta tangente con pendiente de 3.

En los ejercicios 77 y 78, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f que pasa por el punto (x_0, y_0), no perteneciente a la gráfica. Para determinar el punto de tangencia (x, y) en la gráfica de f, resolver la ecuación.

$$f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}.$$

77. $f(x) = \sqrt{x}$
$(x_0, y_0) = (-4, 0)$

78. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
$(x_0, y_0) = (5, 0)$

79. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la calculadora, aplicar el zoom para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4 - \tfrac{1}{2}x^2$$

a fin de estimar $f'(1)$. Calcular $f'(1)$ por derivación.

80. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la calculadora, aplicar el zoom para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4\sqrt{x} + 1$$

a fin de estimar $f'(4)$. Calcular $f'(4)$ por derivación.

81. ***Aproximación lineal*** Tomando en cuenta la función $f(x) = x^{3/2}$ con el punto de solución (4, 8):

a) Utilizar una computadora para dibujar la gráfica f. Usar el *zoom* para ampliar el entorno del punto (4, 8). Tras varias ampliaciones, la gráfica aparecerá casi lineal. Utilizar la función *trace* para determinar las coordenadas de un punto de la gráfica próximo al (4, 8). Encontrar la ecuación de la secante que une esos dos puntos.

b) Encontrar la ecuación de la recta

$$T(x) = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

tangente a la gráfica de f que pasa por el punto dado. ¿Por qué las funciones lineales S y T son casi iguales?

c) Representar f y T en la misma ventana de la computadora. Observar que T es una buena aproximación de f cuando x es cercano a 4. ¿Qué ocurre con la precisión de esta aproximación a medida que el punto de tangencia se aleja?

d) Demostrar la conclusión obtenida en el apartado *c)* completando la tabla.

Δx	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0
$f(4 + \Delta x)$						
$T(4 + \Delta x)$						

Δx	0.1	0.5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$					
$T(4 + \Delta x)$					

82. ***Aproximación lineal*** Repetir el ejercicio 81 empleando ahora la función $f(x) = x^3$, donde $T(x)$ es la recta tangente en el punto (1, 1). Explicar por qué la precisión de la aproximación lineal disminuye más rápido que en el ejercicio anterior.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 88, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

83. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.

84. Si $f(x) = g(x) + c$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

85. Si $y = \pi^2$, entonces $dy/dx = 2\pi$.

86. Si $y = x/\pi$, entonces $dy/dx = 1/\pi$.

87. Si $g(x) = 3f(x)$, entonces $g'(x) = 3f'(x)$.

88. Si $f(x) = 1/x^n$, entonces $f'(x) = 1/(nx^{n-1})$.

En los ejercicios 89 a 92, calcular el ritmo de cambio promedio de la función en el intervalo dado. Compararlo con los ritmos de cambio instantáneos en los extremos del intervalo.

89. $f(t) = 2t + 7, \quad [1, 2]$

90. $f(t) = t^2 - 3, \quad [2, 2.1]$

91. $f(x) = \dfrac{-1}{x}, \quad [1, 2]$

92. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

Movimiento vertical **En los ejercicios 93 y 94, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$ para objetos en caída libre.**

93. Se deja caer una moneda desde lo alto de un edificio que tiene una altura de 1 362 pies.

a) Determinar las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda.

b) Calcular su velocidad promedio en el intervalo [1, 2].

c) Encontrar las velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$.

d) Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

e) Determinar su velocidad al caer en el suelo.

94. Desde una altura de 220 pies, se lanza hacia abajo una bola con una velocidad inicial de -22 pies/s. ¿Cuál es su velocidad tras 3 segundos? ¿Y luego de descender 108 pies?

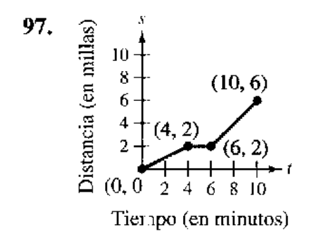
Movimiento vertical **En los ejercicios 95 y 96, utilizar la función posición $s(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0$ para objetos en caída libre.**

95. Se lanza un proyectil hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 120 m/s. ¿Cuál es su velocidad a los 5 segundos? ¿Y a los 10?

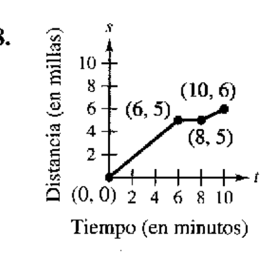
96. Con el fin de estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte más alta en el agua de una piscina que se encuentra al nivel del suelo. ¿Cuál es la altura del edificio, si el chapoteo se observa 6.8 segundos después de soltar la piedra?

Para pensar **En los ejercicios 97 y 98 se muestra la gráfica de una función posición, que representa la distancia recorrida por un conductor, en millas, que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un boceto de la función velocidad correspondiente.**

97.

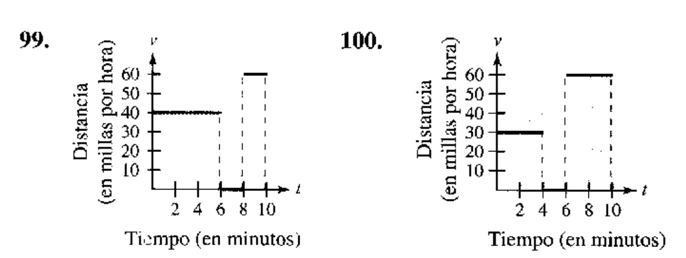


98.

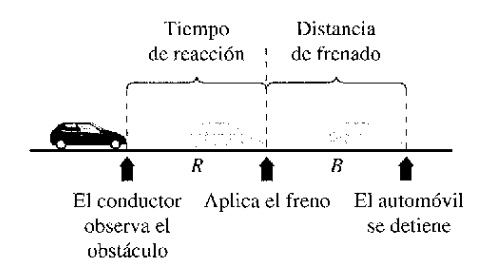


Para pensar **En los ejercicios 99 y 100 se muestra la gráfica de una función velocidad, que representa la velocidad, en millas por hora, de una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un boceto de la función posición correspondiente.**

99. **100.**



101. ***Modelo matemático*** La distancia de frenado de un automóvil que viaja a v (kilómetros por hora), es la distancia R (metros) que recorre durante el tiempo de reacción del conductor más la distancia B (metros) que recorre una vez aplicados los frenos (ver la figura). La tabla muestra los resultados de un experimento al respecto.



Velocidad, v	20	40	60	80	100
Distancia por tiempo de reacción R	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7
Distancia por tiempo de frenado B	2.3	9.0	20.2	35.8	55.9

a) Utilizar las funciones de regresión de una computadora para obtener un modelo lineal para el tiempo de reacción.
b) Utilizar las funciones de regresión de una computadora para obtener un modelo cuadrático para la distancia aplicando los frenos.
c) Encontrar el polinomio que expresa la distancia total T recorrida hasta que el vehículo se detiene por completo.
d) Utilizar una computadora para dibujar la gráfica de las funciones R, B y T en una misma ventana.
e) Calcular la derivada de T y el ritmo de cambio de la distancia total de frenado para $v = 40$, $v = 80$ y $v = 100$.
f) A partir de los resultados de este ejercicio, elaborar conclusiones acerca del comportamiento de la distancia total de frenado a medida que se aumenta la velocidad.

102. ***Costo del combustible*** Un automóvil viaja 15 000 millas al año y recorre x millas por galón. Suponiendo que el costo promedio del combustible es $ 1.55 por galón, calcular el costo anual C del combustible consumido como función de x y utilizar esta función para completar la tabla.

x	10	15	20	25	30	35	40
C							
dC/dx							

¿Quién se beneficiaría más con el aumento en 1 milla por galón en la eficiencia del vehículo: un conductor que obtiene 15 millas por galón o uno que hace 35 millas por galón? Explicar la respuesta.

103. ***Volumen*** El volumen de un cubo con lado s es $V = s^3$. Calcular el ritmo de cambio del volumen respecto a s cuando $s =$ 4 centímetros.

104. ***Área*** El área de un cuadrado con lados s es $A = s^2$. Encontrar el ritmo de cambio del área respecto a s cuando $s = 4$ metros.

105. ***Velocidad*** Verificar que la velocidad media en el intervalo $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ es la misma que la velocidad instantánea en $t = t_0$ para la función posición

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + c.$$

106. ***Gestión de inventario*** El costo anual de inventario C de un fabricante es

$$C = \frac{1\,008\,000}{Q} + 6.3Q$$

donde Q es el tamaño del pedido cuando se reponen existencias. Calcular el cambio del costo anual cuando Q crece de 350 a 351 y compararlo con el ritmo de cambio instantáneo para $Q = 350$.

107. ***Redacción*** La ecuación $N = f(p)$ representa el número de galones N de gasolina normal sin plomo que vende una gasolinería a un precio de p dólares por galón.

a) Describir el significado de $f'(1.479)$
b) ¿$f'(1.479)$ suele resultar positiva o negativa? Explicar la respuesta.

108. ***Ley del enfriamiento de Newton*** Esta ley establece que el ritmo o velocidad de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura T y la temperatura ambiente T_a. Elaborar una ecuación para esta ley.

109. Encontrar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $(0, 1)$ y es tangente a la recta $y = x - 1$ en ese mismo punto.

110. Sea (a, b) un punto cualquiera de la gráfica de $y = 1/x$, $x > 0$. Demostrar que el área del triángulo formado por la recta tangente que pasa por (a, b) y los ejes coordenados es 2.

111. Encontrar la recta o rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 9x$ en el punto $(1, -9)$.

112. Encontrar la ecuación de la recta o rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ en el punto dado.

a) $(0, a)$ *b)* $(a, 0)$

¿Existe alguna restricción para la constante a?

En los ejercicios 113 y 114, encontrar a y b tales que f sea derivable en todos los puntos.

113. $f(x) = \begin{cases} ax^3, & x \le 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$

114. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ ax + b, & x \ge 0 \end{cases}$

115. ¿Dónde son derivables las funciones $f_1(x) = |\operatorname{sen} x|$ y $f_2(x) = \operatorname{sen}|x|$?

116. Demostrar que $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo "Sines and Cosines of the Times", de Victor J. Katz, publicado en *Math Horizons*, encontrará una interpretación geométrica de las derivadas de las funciones trigonométricas.

Sección 2.3 Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior

- Hallar la derivada de una función por la regla del producto.
- Hallar la derivada de una función por la regla del cociente.
- Hallar las derivadas de las funciones trigonométricas.
- Hallar las derivadas de orden superior de una función.

La regla del producto

En la sección 2.2 se vio que la derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de sus derivadas. La regla para derivar el producto de dos funciones no es tan simple.

TEOREMA 2.7 La regla del producto

El producto de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

NOTA Algunas personas prefieren la siguiente versión de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La ventaja de esta forma radica en que se puede generalizar con facilidad a multiplicaciones con tres o más factores.

Demostración Algunas demostraciones matemáticas, como en el caso de la regla de la suma, son directas. Otras requieren pasos inteligentes cuyo motivo puede resultar imperceptible para el lector. Esta demostración presenta uno de esos pasos, sumar y restar una misma cantidad, la cual se muestra en distinto color.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Observar que $\lim_{\Delta x\to\infty} f(x+\Delta x) = f(x)$, porque se considera que f es derivable y, por tanto, continua.

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores. Por ejemplo, si f, g y h son funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Por ejemplo, la derivada de $y = x^2 \operatorname{sen} x \cos x$ es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)\\
&= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x).
\end{aligned}$$

LA REGLA DEL PRODUCTO

Cuando Leibniz elaboró originalmente una fórmula para la regla del producto, lo hizo motivado por la expresión

$$(x + dx)(y + dy) - xy$$

de la cual restó $dx\, dy$ (considerándolos despreciables) y calculando la forma diferencial $x\, dy + y\, dx$. Esta derivación tuvo como resultado la forma tradicional de la regla del producto.
(Fuente: The History if Mathematics de David M. Burton)

En términos generales, la derivada del producto de dos funciones no está dada por el producto de sus derivadas. Para observarlo basta con comparar el producto de las derivadas de $f(x) = 3x - 2x^2$ y $g(x) = 5 + 4x$ con la derivada obtenida en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$.

Solución

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\text{Primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}^{\text{Derivada de la segunda}} + \overbrace{(5 + 4x)}^{\text{Segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{\text{Derivada de la primera}} && \text{Aplicar la regla del producto.} \\ &= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x) \\ &= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2) \\ &= -24x^2 + 4x + 15 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se cuenta con la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Sin ella, se escribiría

$$\begin{aligned} D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] &= D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x] \\ &= -24x^2 + 4x + 15. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, se debe utilizar la regla del producto.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 3x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[3x^2 \operatorname{sen} x] &= 3x^2 \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[3x^2] && \text{Aplicar la regla del producto.} \\ &= 3x^2 \cos x + (\operatorname{sen} x)(6x) \\ &= 3x^2 \cos x + 6x \operatorname{sen} x \\ &= 3x(x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(2x)\left(\frac{d}{dx}[\cos x]\right) + (\cos x)\left(\frac{d}{dx}[2x]\right)}^{\text{Regla del producto}} - \overbrace{2 \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x]}^{\text{Regla del múltiplo constante}} \\ &= (2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x) \\ &= -2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

NOTA Observar que en el ejemplo 3 se usa la regla del producto cuando ambos factores son variables, y la del múltiplo constante cuando uno de ellos es constante.

La regla del cociente

TEOREMA 2.8 La regla del cociente

El cociente f/g de dos funciones derivables f y g es derivable en sí para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de f/g se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

Demostración Al igual que en la demostración del teorema 2.7, la clave radica en sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

Definición de derivada.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

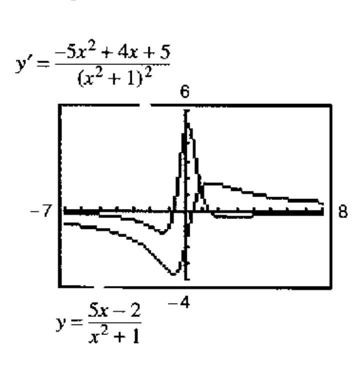
$$= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Observar que $\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$ porque g se obtiene como un diferencial y por tanto es continua.

TECNOLOGÍA En una calculadora se pueden comparar las gráficas de una función y de su derivada. Por ejemplo, en la figura 2.22, la gráfica de la función del ejemplo 4 parece incluir dos puntos con rectas tangentes horizontales. ¿Cuáles son los valores de y' en dichos puntos?



Comparación gráfica de una función y su derivada
Figura 2.22

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla del cociente

Encontrar la derivada de $y = \dfrac{5x-2}{x^2+1}$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x-2}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}[5x-2] - (5x-2)\dfrac{d}{dx}[x^2+1]}{(x^2+1)^2}$$

Aplicar la regla de cociente.

$$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+5) - (10x^2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$

Observar el uso de los paréntesis en el ejemplo 4. Es recomendable utilizar paréntesis en *todos* los problemas de derivación. Por ejemplo, cuando se usa la regla del cociente, es conveniente encerrar todo factor y derivada en un paréntesis y prestar especial atención a la resta exigida en el numerador.

Al presentarle las reglas de derivación en la sección precedente, se hizo hincapié en la necesidad de reescribir *antes* de derivar. El ejemplo siguiente ilustra este aspecto en relación con la regla del cociente.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de derivar

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - (1/x)}{x + 5}$ en $(-1, 1)$.

Solución Comenzar por reescribir la función.

$$f(x) = \frac{3 - (1/x)}{x + 5} \qquad \text{Función original.}$$

$$= \frac{x\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x(x + 5)} \qquad \text{Multiplicar por } x \text{ a numerador y denominador.}$$

$$= \frac{3x - 1}{x^2 + 5x} \qquad \text{Reescribir.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{(3x^2 + 15x) - (6x^2 + 13x - 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2} \qquad \text{Simplificar.}$$

Con objeto de encontrar la pendiente en $(-1, 1)$, evaluar $f'(-1)$.

$$f'(-1) = 0 \qquad \text{Pendiente de la gráfica en } (-1, 1).$$

Luego, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se puede determinar que la ecuación de la recta tangente en ese punto es $y = 1$. Ver la figura 2.23.

La recta $y = 1$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-1, 1)$
Figura 2.23

No todo cociente requiere ser derivado mediante la regla del cociente. Por ejemplo, cada uno de los cocientes del ejemplo siguiente se puede considerar como el producto de una constante por una función, de modo que es más sencillo aplicar la regla del múltiplo constante.

EJEMPLO 6 Aplicación de la regla del múltiplo constante

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{6}$	$y = \dfrac{1}{6}(x^2 + 3x)$	$y' = \dfrac{1}{6}(2x + 3)$	$y' = \dfrac{2x + 3}{6}$
b)	$y = \dfrac{5x^4}{8}$	$y = \dfrac{5}{8}x^4$	$y' = \dfrac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \dfrac{5}{2}x^3$
c)	$y = \dfrac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$	$y = -\dfrac{3}{7}(3 - 2x)$	$y' = -\dfrac{3}{7}(-2)$	$y' = \dfrac{6}{7}$
d)	$y = \dfrac{9}{5x^2}$	$y = \dfrac{9}{5}(x^{-2})$	$y' = \dfrac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\dfrac{18}{5x^3}$

NOTA Para distinguir la ventaja de la regla del múltiplo constante en ciertos cocientes, tratar de calcular las derivadas del ejemplo 6 mediante la regla del cociente. Se llegará al mismo resultado, pero con un esfuerzo mucho mayor.

En la sección 2.2 se demostró la regla de las potencias sólo para exponentes enteros mayores que 1. En el ejemplo que sigue se amplía esa demostración a exponentes enteros negativos.

EJEMPLO 7 Demostración de la regla de las potencias (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo, existe un entero positivo k tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]\\ &= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} && \text{Regla del cociente y regla de las potencias.}\\ &= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}\\ &= -kx^{-k-1}\\ &= nx^{n-1}. && n = -k.\end{aligned}$$

De tal modo, la regla de las potencias

$$D_x[x^n] = nx^{n-1} \qquad \text{Regla de las potencias.}$$

es válida para todo entero. En el ejercicio 75 de la sección 2.5 se pide demostrar el caso en el que n es cualquier múmero racional.

Derivadas de las funciones trigonométricas

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la regla del cociente permite establecer las de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

TEOREMA 2.9 Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

Demostración Considerando $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y aplicando la regla del cociente, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \text{Aplicar la regla del cociente.}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x.\end{aligned}$$

La demostración de las otras tres partes del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 89).

EJEMPLO 8 Derivación de funciones trigonométricas

NOTA Debido a las identidades trigonométricas, la derivada de una función trigonométrica puede adoptar diversas formas. Esto complica la comparación de las soluciones obtenidas por el lector con las propuestas al final del libro.

	Función	*Derivada*
a)	$y = x - \tan x$	$\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$
b)	$y = x \sec x$	$y' = x(\sec x \tan x) + (\sec x)(1) = (\sec x)(1 + x \tan x)$

EJEMPLO 9 Diferentes formas de una derivada

Derivar ambas formas de $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \csc x - \cot x$.

Solución

Primera forma: $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Segunda forma: $y = \csc x - \cot x$

$$y' = -\csc x \cot x + \csc^2 x$$

Para demostrar que ambas derivadas son idénticas, basta escribir

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

$$= \csc^2 x - \csc x \cot x.$$

El siguiente compendio muestra que gran parte del trabajo necesario para obtener la forma simplificada de una derivada se debe hacer *después* de derivar. Observar que dos características de una forma simplificada son la ausencia de exponentes negativos y el agrupamiento de términos semejantes.

	f′(x) tras derivar	***f′(x) tras simplificar***
Ejemplo 1	$(3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$	$-24x^2 + 4x + 15$
Ejemplo 3	$(2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)$	$-2x \operatorname{sen} x$
Ejemplo 4	$\dfrac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$	$\dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2}$
Ejemplo 5	$\dfrac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$	$\dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$
Ejemplo 9	$\dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Derivadas de orden superior

Así como al derivar una función posición se obtiene una función velocidad, al derivar esta última se obtiene una función **aceleración.** En otras palabras, la función aceleración es la segunda derivada de la función posición.

$$s(t) \qquad \text{Función posición.}$$
$$v(t) = s'(t) \qquad \text{Función velocidad.}$$
$$a(t) = v'(t) = s''(t) \qquad \text{Función aceleración.}$$

NOTA La segunda derivada de f es la derivada de la primera derivada de f.

La función dada por $a(t)$ es la **segunda derivada** de $s(t)$ y se denota como $s''(t)$.

La segunda derivada es un ejemplo de **derivada de orden superior.** Se puede definir derivadas de cualquier orden entero positivo. Por ejemplo, la **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como se muestra a continuación.

Primera derivada:	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x[y]$
Segunda derivada:	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2[y]$
Tercera derivada:	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3[y]$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4[y]$
⋮					
n-ésima derivada:	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\frac{d^ny}{dx^n}$,	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$,	$D_x^n[y]$

EJEMPLO 10 Aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

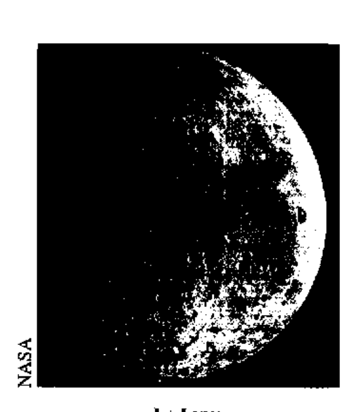
donde $s(t)$ es la altura en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna?

Solución Para calcular la aceleración, derivar dos veces la función posición.

$$s(t) = -0.81t^2 + 2 \qquad \text{Función posición.}$$
$$s'(t) = -1.62t \qquad \text{Función velocidad.}$$
$$s''(t) = -1.62 \qquad \text{Función aceleración.}$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de -1.62 m/s^2. Puesto que la aceleración de la gravedad en la Tierra es de -9.8 m/s^2, la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} = \frac{-9.8}{-1.62} \approx 6.05.$$



LA LUNA
La masa de la Luna es de 7.349×10^{22} kg y la de la Tierra 5.976×10^{24} kg. El radio de la Luna es 1 737 km y el de la Tierra 6 378 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6\,378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1\,737^2} \approx 6.03.$$

Ejercicios de la sección 2.3

En los ejercicios 1 a 6, utilizar la regla del producto para derivar la función.

1. $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x)$
2. $f(x) = (6x + 5)(x^3 - 2)$
3. $h(t) = \sqrt[3]{t}(t^2 + 4)$
4. $g(s) = \sqrt{s}(4 - s^2)$
5. $f(x) = x^3 \cos x$
6. $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 7 a 12, utilizar la regla del cociente para derivar la función.

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
8. $g(t) = \dfrac{t^2 + 2}{2t - 7}$
9. $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^3 + 1}$
10. $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s} - 1}$
11. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
12. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^3}$

En los ejercicios 13 a 18, encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.

	Función	*Valor de c*
13.	$f(x) = (x^3 - 3x)(2x^2 + 3x + 5)$	$c = 0$
14.	$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$	$c = 1$
15.	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$	$c = 1$
16.	$f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$	$c = 2$
17.	$f(x) = x \cos x$	$c = \dfrac{\pi}{4}$
18.	$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$c = \dfrac{\pi}{6}$

En los ejercicios 19 a 24, completar la tabla sin usar la regla del cociente.

	Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
19.	$y = \dfrac{x^2 + 2x}{3}$			
20.	$y = \dfrac{5x^2 - 3}{4}$			
21.	$y = \dfrac{7}{3x^3}$			
22.	$y = \dfrac{4}{5x^2}$			
23.	$y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$			
24.	$y = \dfrac{3x^2 - 5}{7}$			

En los ejercicios 25 a 38, encontrar la derivada de la función algebraica.

25. $f(x) = \dfrac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2 - 1}$
27. $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x + 3}\right)$
28. $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{2}{x + 1}\right)$
29. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{x}}$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$
31. $h(s) = (s^3 - 2)^2$
32. $h(x) = (x^2 - 1)^2$
33. $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{x - 3}$
34. $g(x) = x^2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$
35. $f(x) = (3x^3 + 4x)(x - 5)(x + 1)$
36. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$
37. $f(x) = \dfrac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$, c es una constante
38. $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$, c es una constante

En los ejercicios 39 a 54 encontrar la derivada de la función trigonométrica.

39. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$
40. $f(\theta) = (\theta + 1) \cos \theta$
41. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$
42. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
43. $f(x) = -x + \tan x$
44. $y = x + \cot x$
45. $g(t) = \sqrt[4]{t} + 8 \sec t$
46. $h(s) = \dfrac{1}{s} - 10 \csc s$
47. $y = \dfrac{3(1 - \operatorname{sen} x)}{2 \cos x}$
48. $y = \dfrac{\sec x}{x}$
49. $y = -\csc x - \operatorname{sen} x$
50. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$
51. $f(x) = x^2 \tan x$
52. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
53. $y = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$
54. $h(\theta) = 5\theta \sec \theta + \theta \tan \theta$

En los ejercicios 55 a 58, usar un programa de cálculo para derivar las funciones.

55. $g(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)(2x - 5)$
56. $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}\right)(x^2 + x + 1)$
57. $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$
58. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$

En los ejercicios 59 a 62, evaluar la derivada de la función en el punto que se indica. Utilizar una computadora para verificar su resultado.

	Función	*Punto*
59.	$y = \dfrac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$	$\left(\dfrac{\pi}{6}, -3\right)$
60.	$f(x) = \tan x \cot x$	$(1, 1)$
61.	$h(t) = \dfrac{\sec t}{t}$	$\left(\pi, -\dfrac{1}{\pi}\right)$
62.	$f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

En los ejercicios 63 a 68, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto que se indica, *b*) Utilizar una computadora para dibujar la gráfica de la función y su recta tangente en ese punto, y *c*) utilizar la función *derivative* para confirmar los resultados.

63. $f(x) = (x^3 - 3x + 1)(x + 2), \quad (1, -3)$

64. $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2), \quad (0, 2)$

65. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad (2, 2)$

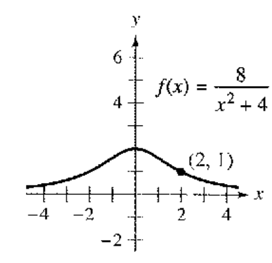
66. $f(x) = \dfrac{(x - 1)}{(x + 1)}, \quad \left(2, \dfrac{1}{3}\right)$

67. $f(x) = \tan x, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

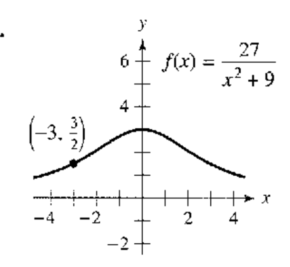
68. $f(x) = \sec x, \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 69 a 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado (las curvas de los ejercicios 69 y 70 se conocen como *brujas de Agnesi.* Las curvas de los ejercicios 71 y 72 de denominan *serpentinas*).**

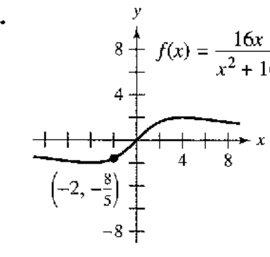
69.



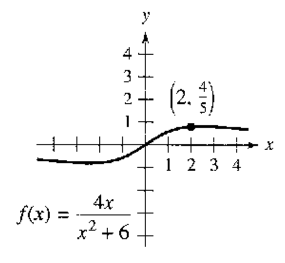
70.



71.



72.



En los ejercicios 73 a 76, determinar el punto o puntos donde la gráfica tiene tangente horizontal.

73. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x^2}$

76. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 7}$

77. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ paralelas a la recta $2y + x = 6$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

78. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ que pasan por el punto $(-1, 5)$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

En los ejercicios 79 y 80, verificar que $f'(x) = g'(x)$, y explicar la relación que existe entre *f* y *g*.

79. $f(x) = \dfrac{3x}{x + 2}, \quad g(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$

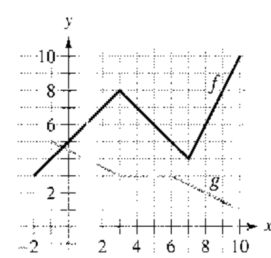
80. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - 3x}{x}, \quad g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2x}{x}$

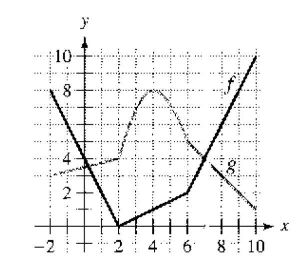
En los ejercicios 81 y 82, utilizar las gráficas de *f* y *g*, siendo

$$p(x) = f(x)g(x) \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

81. *a*) Encontrar $p'(1)$.
b) Encontrar $q'(4)$

82. *a*) Encontrar $p'(4)$.
b) Encontrar $q'(7)$





83. ***Área*** La longitud de un rectángulo está dada por $2t + 1$ y su altura es $\sqrt{t}$, donde t es el tiempo en segundos y las dimensiones están en centímetros. Encontrar el ritmo de cambio del área respecto al tiempo.

84. ***Volumen*** El radio de un cilindro recto circular está dado por $\sqrt{t + 2}$ y su altura por $\frac{1}{2}\sqrt{t}$, donde t es el tiempo en segundos y las dimensiones se encuentran en pulgadas. Encontrar el ritmo de cambio del volumen respecto al tiempo.

85. ***Reposición de inventario*** El costo C de pedido y transporte de los elementos utilizados para la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido, en cientos. Encontrar el ritmo de cambio de C respecto a x cuando *a*) $x = 10$, *b*) $x = 15$ y *c*) $x = 20$. ¿Qué implican estos ritmos de cambio cuando el tamaño del pedido aumenta?

86. ***Ley de Boyle*** Esta ley establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

87. ***Crecimiento demográfico*** Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

donde t se mide en horas. Calcular el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

88. ***Fuerza gravitacional*** La Ley de la Gravitación Universal de Newton establece que la fuerza F que existe entre dos masas, m_1 y m_2, es

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

donde G es una constante y d es la distancia entre ambas masas. Encontrar una ecuación que calcule el ritmo de cambio instantáneo de F respecto a d (suponer que m_1 y m_2 representan puntos móviles).

89. Demostrar las siguientes reglas de derivación.

a) $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$ *b)* $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

c) $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

90. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Determinar si existe algún valor de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que los ritmos de cambio de $f(x) = \sec x$ y de $g(x) = \csc x$ sean iguales.

91. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestra el número n (en miles) de casas rodantes vendidas en Estados Unidos y su valor v (en miles de millones de dólares) durante los años 1996 a 2000. La t representa al año, donde $t = 6$ corresponde a 1996. (*Fuente*: *Recreation Vehicle Industry Association*)

Año, t	6	7	8	9	10	11
n	247.5	254.5	292.7	321.2	300.1	256.8
v	6.3	6.9	8.4	10.4	9.5	8.6

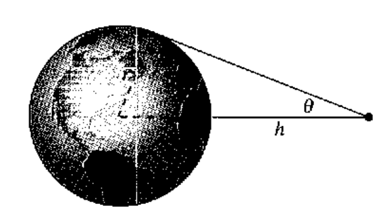
a) Utilizar una computadora para encontrar los modelos cúbicos para el número de caravanas vendidas $n(t)$ y su valor $v(t)$ correspondiente.

b) Representar gráficamente cada uno de los modelos desarrollados al responder el apartado *a*).

c) Encontrar $A = v(t)/n(t)$, para obtener la gráfica A. ¿Qué representa esta función?

d) Interpretar $A'(t)$ en el contexto de estos datos.

92. ***Satélites*** Cuando los satélites exploran la Tierra, sólo tienen alcance para una parte de su superficie. Algunos de ellos cuentan con sensores que pueden medir el ángulo θ que se muestra en la figura. Si h representa la distancia que hay entre el satélite y la superficie de la Tierra, y r al radio de esta última:



a) Demostrar que $h = r(\csc \theta - 1)$.

b) Encontrar el ritmo al que cambia h respecto a θ cuando $\theta = 30°$. (Suponer que $r = 3\,960$ millas.)

En los ejercicios 93 a 98, encontrar la segunda derivada de la función.

93. $f(x) = 4x^{3/2}$

94. $f(x) = x + 32x^{-2}$

95. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

96. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$

97. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$

98. $f(x) = \sec x$

En los ejercicios 99 a 102, encontrar la derivada de orden superior que se indica.

99. $f'(x) = x^2, \quad f''(x)$

100. $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, \quad f'''(x)$

101. $f'''(x) = 2\sqrt{x}, \quad f^{(4)}(x)$

102. $f^{(4)}(x) = 2x + 1, \quad f^{(6)}(x)$

Desarrollo de conceptos

103. Construir la gráfica de una función derivable f tal que $f(2) = 0$, $f' < 0$ para $-\infty < x < 2$ y $f' > 0$ para $2 < x < \infty$.

104. Construir la gráfica de una función derivable f tal que $f > 0$ y $f' < 0$ para todos los números reales.

En los ejercicios 105 a 108, utilizar la información dada para encontrar $f'(2)$.

$g(2) = 3$ y $g'(2) = -2$

$h(2) = -1$ y $h'(2) = 4$

105. $f(x) = 2g(x) + h(x)$

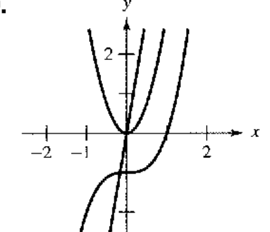
106. $f(x) = 4 - h(x)$

107. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

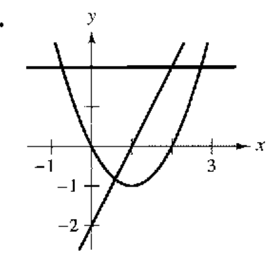
108. $f(x) = g(x)h(x)$

En los ejercicios 109 y 110 se muestran las gráficas de f, f' y f'' sobre el mismo plano cartesiano. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.

109.

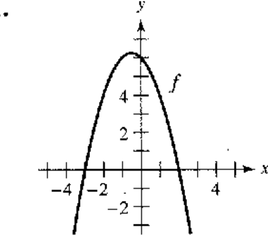


110.

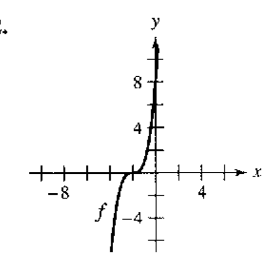


En los ejercicios 111 a 114 se muestra la gráfica de f. Construir las gráficas de f' y f''.

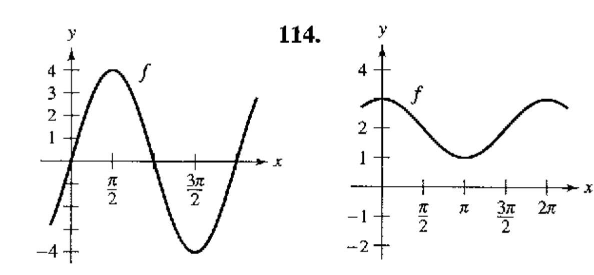
111.



112.



113. **114.**



115. ***Aceleración*** La velocidad, en *m/s*, de un objeto es $v(t) = 36 - t^2, 0 \le t \le 6$. Calcular su velocidad y su aceleración cuando $t = 3$. ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez del objeto cuando velocidad y aceleración tienen signos opuestos?

116. ***Aceleración*** La velocidad de un automóvil que parte del reposo es

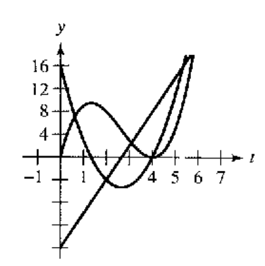
$$v(t) = \frac{100t}{2t + 15}$$

donde v se mide en pies por segundo. Calcular su aceleración en *a*) 5 segundos, *b*) 10 segundos y *c*) 20 segundos.

117. ***Distancia de frenado*** Al momento de aplicar los frenos, un vehículo viaja a 66 pies/s (45 millas por hora). La función posición del vehículo es $s(t) = -8.25t^2 + 66t$, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilizar esta función para completar la tabla y encontrar la velocidad media durante cada intervalo.

t	0	1	2	3	4
$s(t)$					
$v(t)$					
$a(t)$					

118. ***Movimiento de una partícula*** En la figura se muestran las gráficas de las funciones posición, velocidad y aceleración de una partícula.



a) Copiar las gráficas de las funciones. Identificar cada una de ellas. Explicar el razonamiento.

b) En la ilustración, identificar cuándo aumenta y disminuye la velocidad de la partícula. Explicar el razonamiento.

Búsqueda de un patrón **En los ejercicios 119 y 120, desarrolle una fórmula general para $f^{(n)}(x)$, dada $f(x)$.**

119. $f(x) = x^n$ **120.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

121. ***Búsqueda de un patrón*** Considerando la función $f(x) = g(x)h(x)$.

a) Utilizar la regla del producto para elaborar una regla general donde encontrar $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

b) Empleando los resultados del apartado *a*), confeccionar una regla general para $f^{(n)}(x)$.

122. ***Búsqueda de un patrón*** Desarrollar una fórmula general para $[xf(x)]^{(n)}$, donde f es una función derivable de x.

En los ejercicios 123 y 124, encontrar las derivadas de la función f para $n = 1, 2, 3$ y 4. Utilizar los resultados para elaborar una regla general para $f'(x)$ en términos de n.

123. $f(x) = x^n \operatorname{sen} x$ **124.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^n}$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 125 a 128, verificar que la función satisfaga la ecuación diferencial.**

	Función	*Ecuación diferencial*
125.	$y = \dfrac{1}{x}, x > 0$	$x^3 y'' + 2x^2 y' = 0$
126.	$y = 2x^3 - 6x + 10$	$-y''' - xy'' - 2y' = -24x^2$
127.	$y = 2 \operatorname{sen} x + 3$	$y'' + y = 3$
128.	$y = 3 \cos x + \operatorname{sen} x$	$y'' + y = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 134, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

129. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x)g'(x)$.

130. Si $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, entonces $d^5y/dx^5 = 0$.

131. Si $f'(c)$ y $g'(c)$ son cero y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

132. Si $f(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado, entonces $f^{(n+1)}(x) = 0$.

133. La segunda derivada representa el ritmo de cambio de la primera derivada.

134. Si la velocidad de un objeto es constante, entonces su aceleración es cero.

135. Encontrar un polinomio de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que su gráfica tenga una recta tangente con pendiente de 10 en el punto $(2, 7)$ y una intersección en x en $(1, 0)$.

136. Tomando en cuenta el siguiente polinomio de tercer grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0,$$

determinar las condiciones de a, b, c y d, si la gráfica de f: *a*) No tiene tangentes horizontales, *b*) Tiene exactamente una tangente horizontal, *c*) Tiene exactamente dos tangentes horizontales. Acompañar las respuestas con un ejemplo.

137. Calcular la derivada de $f(x) = x|x|$. ¿Existe $f''(0)$?

138. ***Para pensar*** Sean f y g funciones cuyas respectivas primera y segunda derivada existe dentro del intervalo I. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es verdadera?

a) $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$

b) $fg'' + f''g = (fg)''$

Sección 2.4 La regla de la cadena

- **Hallar la derivada de una función compuesta por la regla de la cadena.**
- **Hallar la derivada de una función por la regla general de las potencias.**
- **Simplificar la derivada de una función por técnicas algebraicas.**
- **Aplicar la regla de la cadena a funciones trigonométricas.**

La regla de la cadena

Ahora es tiempo de analizar una de las reglas de derivación más potentes: la **regla de la cadena**. Ésta se aplica a las funciones compuestas y añade versatilidad a las reglas analizadas en las dos secciones precedentes. Como ejemplo, comparar las funciones que se muestran a continuación; las de la izquierda se pueden derivar sin la regla de la cadena, mientras que a las de la derecha conviene aplicarles dicha regla.

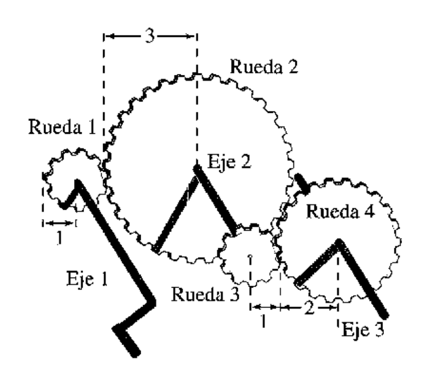
Sin la regla de la cadena	*Con la regla de la cadena*
$y = x^2 + 1$	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 6x$
$y = 3x + 2$	$y = (3x + 2)^5$
$y = x + \tan x$	$y = x + \tan x^2$

En esencia, la regla de la cadena establece que si y cambia dy/du veces más rápido que u, mientras que u cambia du/dx veces más rápido que x, entonces y cambia $(dy/du)(du/dx)$ veces más rápido que x.

EJEMPLO 1 La derivada de una función compuesta

Un juego de ruedas dentadas está construido, como muestra la figura 2.24, de forma que la segunda y la tercera giran sobre un eje común. Cuando la primera gira, impulsa a la segunda y ésta a su vez a la tercera. Sean y, u y x los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes. Encontrar dy/du, du/dx y dy/dx, y verificar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$



Eje 1: y revoluciones por minuto
Eje 2: u revoluciones por minuto
Eje 3: x revoluciones por minuto
Figura 2.24

Solución Puesto que la circunferencia de la segunda rueda es tres veces mayor que la de la primera, el primer eje debe dar tres vueltas para que el segundo complete una. Del mismo modo, el segundo eje ha de dar dos vueltas para que el tercero complete una y por tanto, escribir

$$\frac{dy}{du} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

Combinando ambos resultados, el primer eje debe dar seis vueltas para hacer girar una vez al tercer eje. De tal manera:

$$\frac{dy}{dx} = \text{Ritmo o velocidad de cambio del primer eje con respecto al segundo} \cdot \text{Ritmo o velocidad de cambio del segundo eje con respecto el tercero}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$= \text{Ritmo o velocidad de cambio del primer eje con respecto al tercero}.$$

En otras palabras, el ritmo de cambio de y respecto a x es igual al producto del ritmo de cambio de y con respecto a u multiplicado por el de u con respecto a x.

EXPLORACIÓN

Aplicación de la regla de la cadena Cada una de las funciones que se encuentran a continuación se pueden derivar utilizando las reglas de derivación estudiadas en las secciones 2.2 y 2.3. Calcular la derivada de cada función utilizando dichas reglas; luego encontrar la derivada utilizando la regla de la cadena. Comparar los resultados. ¿Cuál de los dos métodos es más sencillo?

a) $\dfrac{2}{3x+1}$

b) $(x+2)^3$

c) $\operatorname{sen} 2x$

El ejemplo 1 ilustra un caso simple de la regla de la cadena. Su enunciado general es el siguiente.

TEOREMA 2.10 La regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

Demostración Sean $h(x) = f(g(x))$. Usando la forma alternativa de la derivada, es necesario demostrar que, para $x = c$,

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de g cuando x tiende a c. Se presentan dificultades cuando existen valores de x, distintos de c, tales que $g(x) = g(c)$. En el apéndice A se explica cómo utilizar la derivabilidad de f y g para superar este problema. Por ahora, suponer que $g(x) \neq g(c)$ para valores de x distintos de c. En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente se sumó y restó una misma cantidad. Ahora se recurrirá a un truco similar, multiplicar y dividir por una misma cantidad (distinta de cero). Observar que, como g es derivable, también es continua, por lo que $g(x) \to g(c)$ cuando $x \to c$.

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right], \quad g(x) \neq g(c) \\ &= \left[\lim_{x\to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)}\right]\left[\lim_{x\to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right] \\ &= f'(g(c))g'(c) \end{aligned}$$

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta $f \circ g$ está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

EJEMPLO 2 Descomposición de una función compuesta

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a)	$y = \frac{1}{x+1}$	$u = x + 1$	$y = \frac{1}{u}$
b)	$y = \operatorname{sen} 2x$	$u = 2x$	$y = \operatorname{sen} u$
c)	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d)	$y = \tan^2 x$	$u = \tan x$	$y = u^2$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la cadena

Encontrar dy/dx para $y = (x^2 + 1)^3$.

AYUDA DE ESTUDIO El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, observa que

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y, por tanto,

$$y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x.$$

Comprobar que esta derivada es la misma que la del ejemplo 3. ¿Qué método sería preferible para encontrar

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{50}?$$

Solución Para esta función, considerar que la función interior es $u = x^2 + 1$. Por medio de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = 6x(x^2 + 1)^2.$$

La regla general de las potencias

La función del ejemplo 3 es uno de los tipos más comunes de funciones compuestas, $y = [u(x)]^n$. La regla para derivar tales funciones se llama **regla general de las potencias**, y no es sino un caso particular de la regla de la cadena.

TEOREMA 2.11 La regla general de las potencias

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'.$$

Demostración Puesto que $y = u^n$, aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx}.$$

Por medio de la regla (simple) de las potencias estudiada en la sección 2.2, se tiene $D_u[u^n] = nu^{n-1}$ y se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

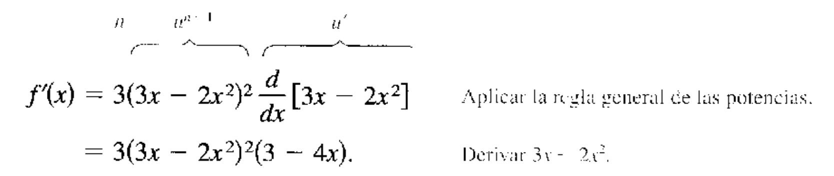
EJEMPLO 4 Aplicación de la regla general de las potencias

Encontrar la derivada de $f(x) = (3x - 2x^2)^3$.

Solución Sea $u = 3x - 2x^2$. Entonces

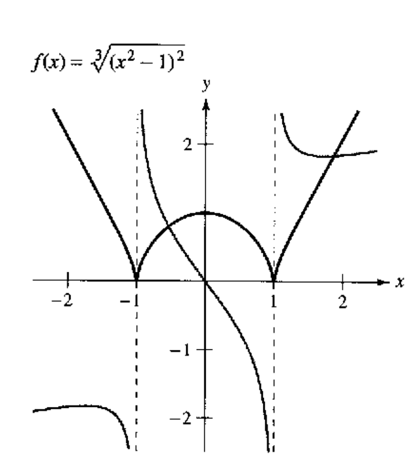
$$f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$$

y, mediante la regla general de las potencias, se deduce que



$$f'(x) = \overbrace{3}^{n}\overbrace{(3x - 2x^2)^2}^{u^{n-1}}\overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias.

$$= 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x).$$ Derivar $3x - 2x^2$.



$f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

La derivada de f es 0 en $x = 0$ y no está definida en $x = \pm 1$
Figura 2.25

EJEMPLO 5 Derivación de funciones con radicales

Encontrar los puntos de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no existe.

Solución Empezar de nuevo la función como

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}.$$

Aplicar ahora la regla general de las potencias (con $u = x^2 - 1$); se obtiene

$$f'(x) = \overbrace{\frac{2}{3}}^{n}\overbrace{(x^2 - 1)^{-1/3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2x)}^{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias.

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$ Expresar en forma radical.

De tal manera, $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $f'(x)$ no existe en $x = \pm 1$, como se muestra en la figura 2.25.

EJEMPLO 6 Derivación de cocientes con numeradores constantes

Derivar $g(t) = \dfrac{-7}{(2t - 3)^2}$.

Solución Para empezar, reescribir la función como

$$g(t) = -7(2t - 3)^{-2}.$$

Después, con la regla general de las potencias se tiene

$$g'(t) = \underbrace{(-7)}_{\text{Regla del múltiplo constante}}\overbrace{(-2)}^{n}\overbrace{(2t - 3)^{-3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2)}^{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias.

$$= 28(2t - 3)^{-3}$$ Simplificar.

$$= \frac{28}{(2t - 3)^3}.$$ Expresar con exponente positivo.

NOTA Derivar la función del ejemplo 6 usando la regla del cociente. El resultado será el mismo, pero el método es menos eficiente que la regla general de las potencias.

Simplificación de derivadas

Los siguientes tres ejemplos ponen de manifiesto algunas técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones.

EJEMPLO 7 Simplificación por factorización de la potencia mínima

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sqrt{1-x^2} && \text{Función original.}\\
&= x^2(1-x^2)^{1/2} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{1/2}] + (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}[x^2] && \text{Regla del producto.}\\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (1-x^2)^{1/2}(2x) && \text{Regla general de las potencias.}\\
&= -x^3(1-x^2)^{-1/2} + 2x(1-x^2)^{1/2} && \text{Simplificar.}\\
&= x(1-x^2)^{-1/2}[-x^2(1) + 2(1-x^2)] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 8 Simplificación de la derivada de un cociente

TECNOLOGÍA Las computadoras con derivación simbólica son capaces de derivar funciones muy complicadas. No obstante, suelen presentar el resultado en forma no simplificada. Si se cuenta con una de ese tipo, usarla para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9, y comparar después los resultados.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}} && \text{Función original.}\\
&= \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= \frac{(x^2+4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{(x^2+4)^{2/3}} && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{1}{3}(x^2+4)^{-2/3}\left[\frac{3(x^2+4) - (2x^2)(1)}{(x^2+4)^{2/3}}\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 9 Simplificación de la derivada de una potencia

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 && \text{Función original.}\\
y' &= \underbrace{2}_{n}\underbrace{\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)}_{u^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+3}\right]}_{u'} && \text{Regla general de las potencias.}\\
&= \left[\frac{2(3x-1)}{x^2+3}\right]\left[\frac{(x^2+3)(3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right] && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3} && \text{Multiplicar.}\\
&= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

A continuación se muestran las "versiones de la regla de la cadena" correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)\, u'$$

EJEMPLO 10 Aplicación de la regla de la cadena a funciones trigonométricas

a) $y = \operatorname{sen} \overbrace{2x}^{u}$ $\qquad y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u}\,\overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2\cos 2x$

b) $y = \cos(x-1)$ $\qquad y' = -\operatorname{sen}(x-1)$

c) $y = \tan 3x$ $\qquad y' = 3\sec^2 3x$

Hay que asegurarse de entender los convenios matemáticos que afectan a paréntesis y funciones trigonométricas. Así, en el ejemplo 10*a*, se escribe sen $2x$ que significa sen $(2x)$.

EJEMPLO 11 Paréntesis y funciones trigonométricas

a) $y = \cos 3x^2 = \cos(3x^2)$ $\qquad y' = (-\operatorname{sen} 3x^2)(6x) = -6x \operatorname{sen} 3x^2$

b) $y = (\cos 3)x^2$ $\qquad y' = (\cos 3)(2x) = 2x\cos 3$

c) $y = \cos(3x)^2 = \cos(9x^2)$ $\qquad y' = (-\operatorname{sen} 9x^2)(18x) = -18x \operatorname{sen} 9x^2$

d) $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$ $\qquad y' = 2(\cos x)(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$

e) $y = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$ $\qquad y' = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\operatorname{sen} x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

Para calcular la derivada de una función con la forma $k(x) = f(g(h(x)))$, es necesario aplicar la regla de la cadena dos veces, como se ilustra en el ejemplo 12.

EJEMPLO 12 Aplicación reiterada de la regla de la cadena

$f(t) = \operatorname{sen}^3 4t$ — Función original.

$= (\operatorname{sen} 4t)^3$ — Reescribir.

$f'(t) = 3(\operatorname{sen} 4t)^2 \frac{d}{dt}[\operatorname{sen} 4t]$ — Aplicar la regla de la cadena por primera vez.

$= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t)\frac{d}{dt}[4t]$ — Aplicar la regla de la cadena por segunda vez.

$= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t)(4)$

$= 12 \operatorname{sen}^2 4t \cos 4t$ — Simplificar.

EJEMPLO 13 Recta tangente a una función trigonométrica

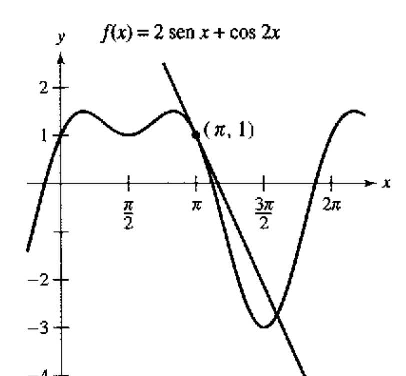


Figura 2.26

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$$

en el punto $(\pi, 1)$, como se muestra en la figura 2.26. A continuación determinar todos los valores de x en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de f tienen una tangente horizontal.

Solución Comenzar por encontrar $f'(x)$.

$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$ Función original.

$f'(x) = 2 \cos x + (-\operatorname{sen} 2x)(2)$ Aplicar la regla de la cadena a $\cos 2x$.

$= 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x$ Simplificar.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(\pi, 1)$, evaluar $f'(\pi)$.

$f'(\pi) = 2 \cos \pi - 2 \operatorname{sen} 2\pi$ Sustituir.

$= -2$ Pendiente de la gráfica en $(\pi, 1)$.

Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, escribir

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Forma punto-pendiente.

$y - 1 = -2(x - \pi)$ Sustituir y_1, m y x_1.

$y = 1 - 2x + 2\pi.$ Ecuación de la recta tangente en $(\pi, 1)$.

Se puede determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$. De tal modo, f tiene una tangente horizontal en $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, y $\frac{3\pi}{2}$.

AYUDA DE ESTUDIO Para adquirir mayor práctica en la derivación, se deben aprender todas las reglas. Como ayuda para la memoria, observar que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) tienen un signo negativo en sus derivadas.

Concluye esta sección con un compendio de las reglas de derivación estudiadas hasta este momento.

Compendio de reglas de derivación

Reglas generales de derivación Sean f, g y u funciones derivables de x.

Regla del múltiplo constante: $\frac{d}{dx}[cf] = cf'$

Regla de la suma o de la diferencia: $\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$

Regla del producto: $\frac{d}{dx}[fg] = fg' + gf'$

Regla del cociente: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

Derivadas de funciones algebraicas

Regla de la constante: $\frac{d}{dx}[c] = 0$

Regla simple de las potencias: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$

Derivadas de funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$ $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$ $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$ $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

Regla de la cadena

Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\, u'$

Regla general de las potencias: $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} u'$

Ejercicios de la sección 2.4

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla.

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (6x - 5)^4$		
2.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$		
3.	$y = \sqrt{x^2 - 1}$		
4.	$y = 3\tan(\pi x^2)$		
5.	$y = \csc^3 x$		
6.	$y = \cos\dfrac{3x}{2}$		

En los ejercicios 7 a 32, encontrar la derivada de la función.

7. $y = (2x - 7)^3$

8. $y = 3(4 - x^2)^5$

9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$

10. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$

11. $f(t) = \sqrt{1 - t}$

12. $g(x) = \sqrt{5 - 3x}$

13. $y = \sqrt[3]{9x^2 + 4}$

14. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

15. $y = 2\sqrt[4]{4 - x^2}$

16. $f(x) = -3\sqrt[4]{2 - 9x}$

17. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

18. $s(t) = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 1}$

19. $f(t) = \left(\dfrac{1}{t - 3}\right)^2$

20. $y = -\dfrac{5}{(t + 3)^3}$

21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

22. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$

23. $f(x) = x^2(x - 2)^4$

24. $f(x) = x(3x - 9)^3$

25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

26. $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{16 - x^2}$

27. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4}}$

29. $g(x) = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 2}\right)^2$

30. $h(t) = \left(\dfrac{t^2}{t^3 + 2}\right)^2$

31. $f(v) = \left(\dfrac{1 - 2v}{1 + v}\right)^3$

32. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right)^3$

En los ejercicios 33 a 38, utilizar un sistema informático de álgebra para encontrar la derivada de la función. Utilizar el mismo mecanismo para representar gráficamente la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponde a cualquier cero de la gráfica de la derivada.

33. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$

34. $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x + 1}}$

35. $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$

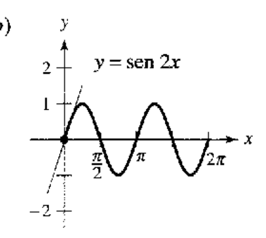
36. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$

37. $y = \dfrac{\cos \pi x + 1}{x}$

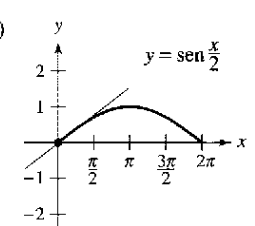
38. $y = x^2 \tan\dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 39 y 40, calcular la pendiente de la recta tangente a la función seno en el origen. Comparar este valor con el número de ciclos completos en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la conclusión respecto a la pendiente de una función sen ax en el origen?

39. *a)* *b)*



40. *a)* *b)*



En los ejercicios 41 a 58, encontrar la derivada de la función.

41. $y = \cos 3x$

42. $y = \operatorname{sen} \pi x$

43. $g(x) = 3\tan 4x$

44. $h(x) = \sec x^2$

45. $y = \operatorname{sen}(\pi x)^2$

46. $y = \cos(1 - 2x)^2$

47. $h(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

48. $g(\theta) = \sec\left(\frac{1}{2}\theta\right)\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

49. $f(x) = \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$

50. $g(v) = \dfrac{\cos v}{\csc v}$

51. $y = 4\sec^2 x$

52. $g(t) = 5\cos^2 \pi t$

53. $f(\theta) =$ [illegible] $\operatorname{sen}^2 2\theta$

54. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$

55. $f(t) = 3\sec^2(\pi t - 1)$

56. $y = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

57. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$

58. $y = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 59 a 66, evaluar la derivada de la función en el punto indicado. Utilizar una computadora para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
59.	$s(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 8}$	$(2, 4)$
60.	$y = \sqrt[5]{3x^3 + 4x}$	$(2, 2)$
61.	$f(x) = \dfrac{3}{x^3 - 4}$	$\left(-1, -\dfrac{3}{5}\right)$
62.	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$	$\left(4, \dfrac{1}{16}\right)$
63.	$f(t) = \dfrac{3t + 2}{t - 1}$	$(0, -2)$
64.	$f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$	$(2, 3)$
65.	$y = 37 - \sec^3(2x)$	$(0, 36)$
66.	$y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{\cos x}$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$

En los ejercicios 67 a 74, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que se indica, *b*) utilizar una computadora para representar gráficamente la función y la recta tangente en ese punto y *c*) verificar los resultados empleando la función *derivative* de su computadora.

	Función	*Punto*
67.	$f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$	$(3, 5)$
68.	$f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2 + 5}$	$(2, 2)$
69.	$y = (2x^3 + 1)^2$	$(-1, 1)$
70.	$f(x) = (9 - x^2)^{2/3}$	$(1, 4)$
71.	$f(x) = \operatorname{sen} 2x$	$(\pi, 0)$
72.	$y = \cos 3x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
73.	$f(x) = \tan^2 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
74.	$y = 2 \tan^3 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

En los ejercicios 75 a 78, *a*) utilizar una computadora para encontrar la derivada de la función del punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función del punto dado y *c*) utilizar la computadora para dibujar la gráfica de la función y su recta tangente en la misma ventana.

75. $g(t) = \dfrac{3t^2}{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

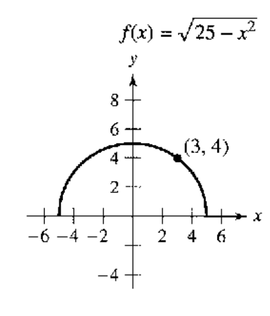
76. $f(x) = \sqrt{x}(2 - x)^2, \quad (4, 8)$

77. $s(t) = \dfrac{(4 - 2t)\sqrt{1 + t}}{3}, \quad \left(0, \frac{4}{3}\right)$

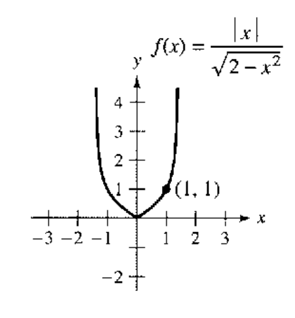
78. $y = (t^2 - 9)\sqrt{t + 2}, \quad (2, -10)$

Curvas famosas **En los ejercicios 79 y 80, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica del punto dado. Después utilizar una computadora para graficar la función y su recta tangente en la misma ventana.**

79. Semicírculo superior



80. Curva de bala



81. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de $f(x) = 2 \cos x + \operatorname{sen} 2x$ tiene una tangente horizontal.

82. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en el intervalo en los que la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 1}}$ tiene una tangente horizontal.

En los ejercicios 83 a 86, encontrar la segunda derivada de la función.

83. $f(x) = 2(x^2 - 1)^3$

84. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

85. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

86. $f(x) = \sec^2 \pi x$

En los ejercicios 87 a 90, evaluar la segunda derivada de la función en el punto dado. Utilizar una calculadora para verificar los resultados.

87. $h(x) = \frac{1}{9}(3x + 1)^3, \quad \left(1, \frac{64}{9}\right)$

88. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$

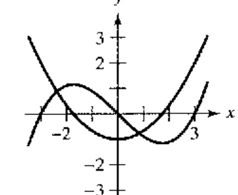
89. $f(x) = \cos(x^2), \quad (0, 1)$

90. $g(t) = \tan 2t, \quad \left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$

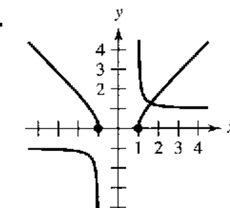
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 91 a 94, se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. Clasificar las gráficas según correspondan a f o f' y escribir en un breve párrafo los criterios utilizados para hacer la selección.

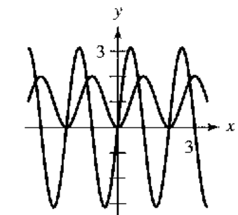
91.



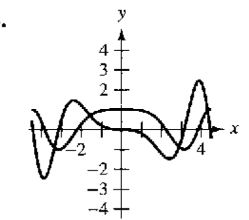
92.



93.



94.



En los ejercicios 95 y 96, se da la relación que existe entre f y g. Explicar la relación que existe entre f' y g'.

95. $g(x) = f(3x)$

96. $g(x) = f(x^2)$

97. Dado que $g(5) = -3$, $g'(5) = 6$, $h(5) = 3$ y $h'(5) = -2$, encontrar $f'(5)$ (si es posible) para cada una de las siguientes funciones. Si no es posible, establecer qué información adicional se requiere.

a) $f(x) = g(x)h(x)$

b) $f(x) = g(h(x))$

c) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

d) $f(x) = [g(x)]^3$

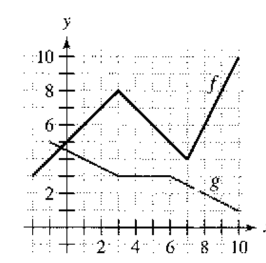
98. ***Para pensar*** La tabla muestra varios valores de la derivada de una función f desconocida. Completar la tabla encontrando, si es posible, la derivada de cada una de las siguientes transformaciones de f.

a) $g(x) = f(x) - 2$ *b*) $h(x) = 2f(x)$
c) $r(x) = f(-3x)$ *d*) $s(x) = f(x + 2)$

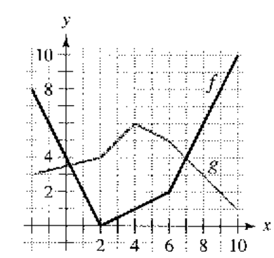
x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$g'(x)$						
$h'(x)$						
$r'(x)$						
$s'(x)$						

En los ejercicios 91 y 100 se muestran las gráficas de f y g. Sea $h(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$. Calcular las derivadas, si es que existen. Si las derivadas no existen, explicar por qué.

99. *a*) Encontrar $h'(1)$
b) Encontrar $s'(5)$



100. *a*) Encontrar $h'(3)$
b) Encontrar $s'(9)$

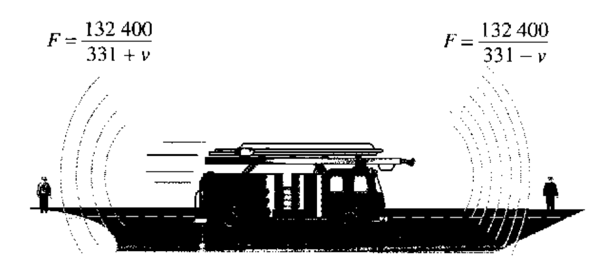


101. ***Efecto Doppler*** La frecuencia F de la sirena de un carro de bomberos oída por un observador en reposo está dada por

$$F = \frac{132\,400}{331 \pm v}$$

donde $\pm v$ representa la velocidad del carro de bomberos (observar la figura). Calcular el ritmo de cambio de F respecto de v cuando

a) el carro se acerca a una velocidad de 30 m/s (usar $-v$).
b) el carro se aleja a una velocidad de 30 m/s (usar $+v$).



102. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un muelle es

$$y = \tfrac{1}{3}\cos 12t - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,12t$$

donde y se mide en pies y t en segundos. Determinar la posición y la velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$.

103. ***Péndulo*** Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación $\theta = 0.2\cos 8t$, donde θ es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y t es el tiempo en segundos. Calcular el máximo desplazamiento angular y el ritmo de cambio de θ cuando $t = 35$.

104. ***Movimiento ondulatorio*** Una boya oscila con movimiento armónico simple dado por $y = A\cos \omega t$, mientras las olas pasan por ella. La boya se mueve verticalmente, desde el punto más bajo hasta el más alto, un total de 3.5 pies. Cada 10 segundos regresa a su punto de máxima altura.

a) Escribir una ecuación que explique el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando $t = 0$.
b) Calcular la velocidad de la boya en función de t.

105. ***Sistema circulatorio*** La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro en una arteria está dada por

$$S = C(R^2 - r^2)$$

donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s. Suponer que se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo dR/dt. A una distancia constante r, encontrar el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1.76 \times 10^5$, $R = 1.2 \times 10^{-2}$ y $dR/dt = 10^{-5}$.

106. ***Modelo matemático*** En la siguiente tabla se muestra la temperatura máxima promedio (en grados Fahrenheit) correspondiente a la ciudad de Denver, Colorado. (*Fuente: National Oceanic and Atmospheric Administration*)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Temperatura	43.2	47.2	53.7	60.9	70.5	82.1

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Temperatura	88.0	86.0	77.4	66.0	51.5	44.1

a) Utilizar una computadora para dibujar la gráfica de los datos y encontrar un modelo para esos datos con la forma

$$T(t) = a + b\,\text{sen}\,(\pi t/6 - c)$$

donde T es la temperatura y t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente al mes de enero.
b) Representar el modelo en la computadora. ¿Ajusta bien a los datos?
c) Encontrar T' y utilizar la computadora para dibujar la gráfica de la derivada.
d) Con base en la gráfica de la derivada, ¿cuándo cambia la temperatura de manera más rápida? ¿Y más lenta? ¿Coinciden las respuestas con las observaciones experimentales? Explicar la respuesta.

107. ***Modelo matemático*** El costo de producción de x unidades de un artículo es $C = 60x + 1\,350$. Durante una semana, la gerencia observó el número de unidades producidas a lo largo de t horas en un turno de 8 horas. En la tabla se muestran los valores promedio de x para una semana.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	16	60	130	205	271	336	384	392

a) Utilizar una computadora para ajustar un modelo cúbico para los datos.

b) Usar la regla de la cadena para encontrar dC/dt.

c) Explicar por qué la función de costo no se incrementa con un ritmo constante durante el turno de 8 horas.

108. ***Búsqueda de un patrón*** Sea $f(x) = \operatorname{sen} \beta x$, donde β es una constante.

a) Calcular las cuatro primeras derivadas de la función.

b) Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.

c) Utilizar los resultados del apartado *a*) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar.

$$f^{(2k)}(x) \text{ y } f^{(2k-1)}(x).$$

[*Sugerencia:* $(-1)^k$ es positivo si k es par y negativo si k es impar.]

109. ***Conjetura*** Sea f una función derivable de periodo p.

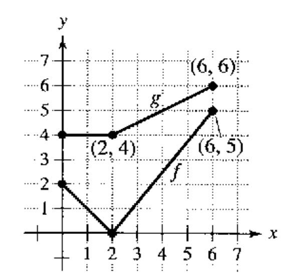
a) La función f' ¿es periódica? Verificar la respuesta.

b) Considerando la función $g(x) = f(2x)$, la función $g'(x)$ ¿es periódica? Verificar la respuesta.

110. ***Para pensar*** Sean $r(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$, con f y g tales como muestra la figura adjunta. Calcular

a) $r'(1)$

b) $s'(4)$



111. *a*) Encontrar la derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ de dos maneras distintas.

b) Para $f(x) = \sec^2 x$ y $g(x) = \tan^2 x$, demostrar que $f'(x) = g'(x)$.

112. *a*) Demostrar que la derivada de una función impar es par. Esto es, si $f(-x) = -f(x)$, entonces $f'(-x) = f'(x)$.

b) Demostrar que la derivada de una función par es impar. Es decir, si $f(-x) = f(x)$, entonces $f'(-x) = -f'(x)$.

113. Sea u una función derivable de x. Considerar que $|u| = \sqrt{u^2}$ para demostrar que

$$\frac{d}{dx}[|u|] = u'\frac{u}{|u|}, \quad u \neq 0.$$

En los ejercicios 114 a 117, utilizar el resultado del ejercicio 113 para encontrar la derivada de la función.

114. $g(x) = |2x - 3|$

115. $f(x) = |x^2 - 4|$

116. $h(x) = |x| \cos x$

117. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

Aproximaciones lineal y cuadrática **Las aproximaciones lineal y cuadrática de una función f en $x = a$ son**

$$P_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ y}$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + f'(a)(x - a) + f(a).$$

En los ejercicios 118 y 119 *a*) calcular las aproximaciones lineal y cuadrática de f que se especifican, *b*) utilizar una computadora para dibujar la gráfica de f y sus aproximaciones, *c*) determinar cuál de las dos, P_1 o P_2, es mejor aproximación y *d*) establecer cómo varía la precisión a medida que se aleja de $x = a$.

118. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{4}$, $a = 1$

119. $f(x) = \sec 2x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 120 a 122, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

120. Si $y = (1 - x)^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}(1 - x)^{-1/2}$.

121. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$, entonces $f'(x) = 2(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)$.

122. Si y es una función derivable de u, u es una función derivable de v, y v es una función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}.$$

Preparación del examen Putnam

123. Sea $F(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y n es un número entero positivo. Dado que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$, para todo x real, demostrar que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

124. Sea k un número entero positivo fijo. La n-ésima derivada de $\dfrac{1}{x^k - 1}$ tiene la forma

$$\frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio. Encontrar $P_n(1)$.

Sección 2.5 Derivación implícita

- **Distinguir entre funciones explícitas e implícitas.**
- **Hallar la derivada de una función por derivación implícita.**

Funciones explícitas e implícitas

Hasta este punto, la mayoría de las funciones estudiadas en el texto se enunciaron de **forma explícita**. Por ejemplo, en la ecuación

$$y = 3x^2 - 5 \qquad \text{Forma explícita.}$$

la variable y está escrita explícitamente como función de x. Sin embargo, algunas funciones sólo se enuncian de manera implícita en una ecuación. Así, la función $y = 1/x$ viene definida **implícitamente** por la ecuación $xy = 1$. Supongamos que se pide calcular la derivada dy/dx para esta ecuación. Podemos escribir y como función explícita de x, y luego derivar.

Forma implícita	*Forma explícita*	*Derivada*
$xy = 1$	$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Esta estrategia funciona siempre que se pueda despejar y como función de x en la ecuación, de lo contrario, este método no es viable. Por ejemplo, ¿cómo encontrar dy/dx para la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x? En tales situaciones se debe usar la llamada **derivación implícita**.

Para comprender esta técnica, es preciso tener en cuenta que la derivación se efectúa *con respecto a x*. Esto quiere decir que cuando se tenga que derivar términos que sólo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando haya que derivar un término donde aparezca y, será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que se está suponiendo que y está definida implícitamente como función derivable de x.

Representación gráfica de una ecuación implícita

¿Cómo se podría utilizar una calculadora para construir la gráfica de

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2?$$

He aquí dos procedimientos posibles:

a) Despejar x en la ecuación. Intercambiar los papeles de x y y, y dibujar la gráfica de las dos ecuaciones resultantes. Las gráficas combinadas presentarán una rotación de 90° con respecto a la gráfica de la ecuación original.

b) Configurar la calculadora en modo *paramétrico* y representar gráficamente las ecuaciones

$$x = -\sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t$$

y

$$x = \sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t.$$

A partir de cualquiera de estos métodos, ¿se puede decidir si la gráfica tiene una recta tangente en el punto (0, 1)? Explicar el razonamiento.

EJEMPLO 1 Derivación respecto de x

a) $\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$ — Las variables coinciden: usar la regla simple de las potencias.

Las variables coinciden

b) $\frac{d}{dx}[\overbrace{y^3}^{u^n}] = \overbrace{3y^2}^{nu^{n-1}}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{u'}$ — Las variables no coinciden: usar la regla de la cadena.

Las variables no coinciden

c) $\frac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\frac{dy}{dx}$ — Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}[3y] = 3y'$.

d)

$$\frac{d}{dx}[xy^2] = x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$= x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1) \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$= 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 \qquad \text{Simplificar.}$$

Derivación implícita

Estrategias para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de x*.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx.

EJEMPLO 2 Derivación implícita

Encontrar dy/dx dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Solución

NOTA Observar que en el ejemplo 2 la derivación implícita puede producir una expresión para dy/dx en la que aparezcan a la vez x y y.

1. Derivar los dos miembros de la ecuación respecto de x.

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupar los términos con dy/dx en la parte izquierda y pasar todos los demás al lado derecho.

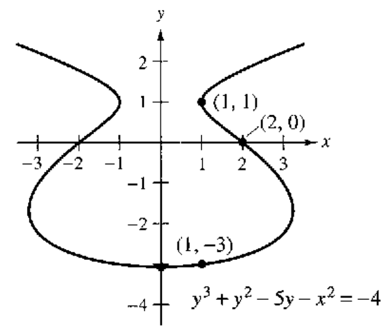
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

3. Factorizar dy/dx en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despejar dy/dx dividiendo entre $(3y^2 + 2y - 5)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$



Puntos en la gráfica	*Pendiente de la gráfica*
(2, 0)	$-\frac{4}{5}$
(1, −3)	$\frac{1}{8}$
$x = 0$	0
(1, 1)	No definida

La ecuación implícita

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

tiene la derivada

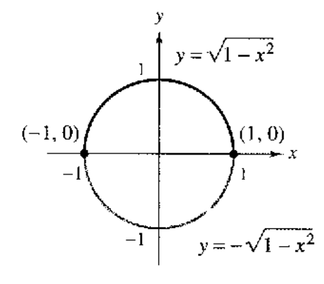
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Figura 2.27

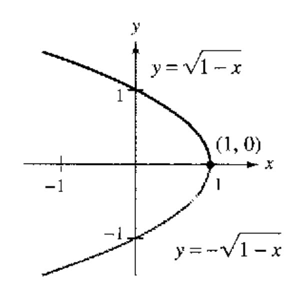
Para ver cómo usar la *derivación implícita*, considerar la gráfica de la figura 2.27. En ella se puede observar que y no es una función de x. A pesar de ello, la derivada determinada en el ejemplo 2 proporciona una fórmula para la pendiente de la recta tangente en un punto de esta gráfica. Debajo de la gráfica se muestran las pendientes en varios puntos de la gráfica.

TECNOLOGÍA Con la mayoría de las computadoras es fácil representar gráficamente una ecuación que expresa de manera explícita a y en función de x. Por el contrario, representar las gráficas asociadas a otras ecuaciones requiere cierto ingenio. Por ejemplo, tratar de representar la gráfica de la ecuación empleada en el ejemplo 2 configurando la calculadora en modo *paramétrico*, a fin de elaborar la gráfica de las representaciones paramétricas $x = \sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$ y $x = -\sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$, para $-5 \le t \le 5$. ¿Cómo se compara el resultado con la gráfica que se muestra en la figura 2.27?

a)



b)



c)

Algunos segmentos de curva pueden representarse por medio de funciones derivables
Figura 2.28

En una ecuación que no tiene puntos solución, por ejemplo, $x^2 + y^2 = -4$, no tiene sentido despejar dy/dx. Sin embargo, si una porción de una gráfica puede representarse mediante una función derivable, dy/dx tendrá sentido como pendiente en cada punto de esa porción. Recordar que una función no es derivable en *a)* los puntos con tangente vertical y *b)* los puntos en los que la función no es continua.

EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante funciones derivables

Si es posible, representar y como función derivable de x.

a) $x^2 + y^2 = 0$ *b)* $x^2 + y^2 = 1$ *c)* $x + y^2 = 1$

Solución

a) La gráfica de esta ecuación se compone de un solo punto. Por tanto, no define y como función derivable de x. Ver la figura 2.28*a*.

b) La gráfica de esta ecuación es la circunferencia unidad, centrado en (0, 0). La semicircunferencia superior está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

En los puntos (−1, 0) y (1, 0), la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*b*.

c) La mitad superior de esta parábola está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1-x}, \quad x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1-x}, \quad x < 1.$$

En el punto (1, 0) la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*c*.

EJEMPLO 4 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$. Ver la figura 2.29

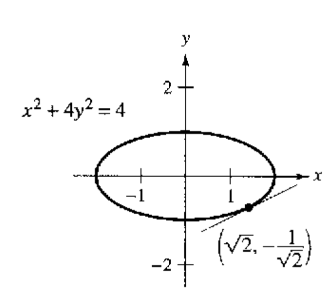


Figura 2.29

Solución

$$x^2 + 4y^2 = 4$$ Ecuación original.

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$ Derivar respecto a x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$$ Despejar términos con $\frac{dy}{dx}$.

Por tanto, en $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$ Evaluar $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = \sqrt{2}$, y $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

NOTA Para observar las ventajas de la derivación implícita, intentar rehacer el ejemplo 4 manejando la función explícita $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.

EJEMPLO 5 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto (3, 1).

Solución

$$\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx}[100xy]$$

$$3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right]$$

$$12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}$$

$3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$

Lemniscata
Figura 2.30

En el punto (3, 1), la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la figura 2.30. Esta gráfica se denomina **lemniscata**.

EJEMPLO 6 Determinación de una función derivable

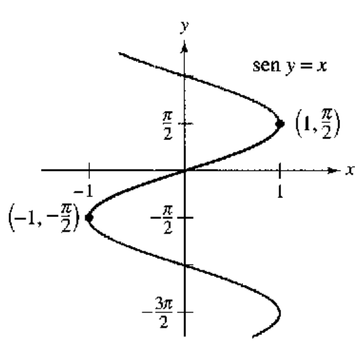
Encontrar dy/dx implícitamente para la ecuación sen $y = x$. A continuación, determinar el mayor intervalo de la forma $-a < y < a$ en el que y es una función derivable de x (ver la figura 2.31).

Solución

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$



La derivada es $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
Figura 2.31

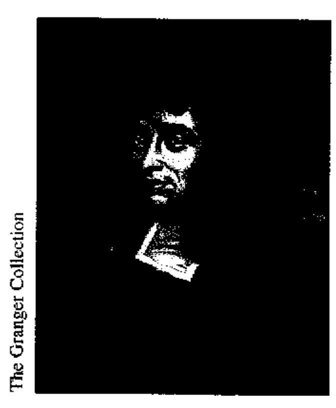
El intervalo más grande cercano al origen en el que y es derivable respecto a x es $-\pi/2 < y < \pi/2$. Para verlo, observar que cos y es positivo en ese intervalo y 0 en sus extremos. Si se restringe a ese intervalo, es posible escribir dy/dx explícitamente como función de x. Para ello, usar

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

y concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



The Granger Collection

ISAAC BARROW (1630-1677)
La gráfica de la figura 2.32 se conoce como la curva kappa debido a su semejanza con la letra griega kappa, κ. La solución general para la recta tangente a esta curva fue descubierta por el matemático inglés Isaac Barrow. Newton fue su alumno y con frecuencia intercambiaron correspondencia relacionada con su trabajo en el entonces incipiente desarrollo del cálculo.

Al usar la derivación implícita, con frecuencia es posible simplificar la forma de la derivada (como en el ejemplo 6) utilizando de manera apropiada la ecuación *original.* Se puede emplear una técnica semejante para encontrar y simplificar las derivadas de orden superior obtenidas de forma implícita.

EJEMPLO 7 Cálculo implícito de la segunda derivada

Dada $x^2 + y^2 = 25$, encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Solución Derivando ambos términos respecto de x se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Derivando otra vez respecto de x vemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y)(1) - (x)(dy/dx)}{y^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

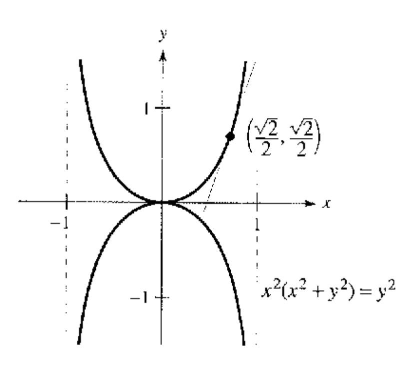
$$= -\frac{y - (x)(-x/y)}{y^2} \qquad \text{Sustituir } -x/y \text{ por } dy/dx.$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= -\frac{25}{y^3}. \qquad \text{Sustituir 25 por } x^2 + y^2.$$

EJEMPLO 8 Recta tangente a una gráfica

Encontrar la recta tangente a la gráfica dada por $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, como muestra la figura 2.32.



La curva kappa
Figura 2.32

Solución Reescribiendo y derivando implícitamente, resulta

$$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$$

$$4x^3 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}.$$

En el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

y la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y = 3x - \sqrt{2}.$$

Ejercicios de la sección 2.5

En los ejercicios 1 a 16, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $x^2 - y^2 = 16$
3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 9$
4. $x^3 + y^3 = 8$
5. $x^3 - xy + y^2 = 4$
6. $x^2y + y^2x = -2$
7. $x^3y^3 - y = x$
8. $\sqrt{xy} = x - 2y$
9. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$
10. $2 \operatorname{sen} x \cos y = 1$
11. $\operatorname{sen} x + 2\cos 2y = 1$
12. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$
13. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$
14. $\cot y = x - y$
15. $y = \operatorname{sen}(xy)$
16. $x = \sec \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 17 a 20, *a*) encontrar dos funciones explícitas despejando *y* en términos de *x*, *b*) construir la gráfica de la ecuación y clasificar las partes dadas por las respectivas funciones explícitas, *c*) derivar las funciones explícitas y *d*) encontrar dy/dx y demostrar que el resultado es equivalente al del apartado *c*).

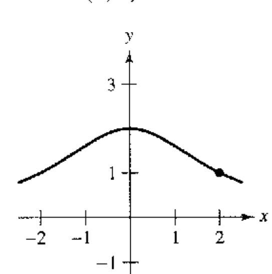
17. $x^2 + y^2 = 16$
18. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
19. $9x^2 + 16y^2 = 144$
20. $9y^2 - x^2 = 9$

En los ejercicios 21 a 28, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado.

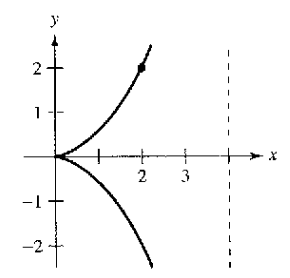
21. $xy = 4, \quad (-4, -1)$
22. $x^2 - y^3 = 0, \quad (1, 1)$
23. $y^2 = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad (2, 0)$
24. $(x + y)^3 = x^3 + y^3, \quad (-1, 1)$
25. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5, \quad (8, 1)$
26. $x^3 + y^3 = 4xy + 1, \quad (2, 1)$
27. $\tan(x + y) = x, \quad (0, 0)$
28. $x \cos y = 1, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 29 a 32, calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.**

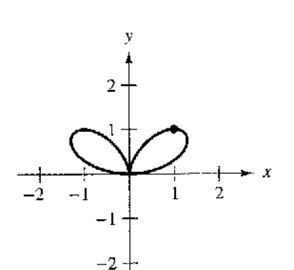
29. Bruja de Agnesi:
$(x^2 + 4)y = 8$
Punto: $(2, 1)$



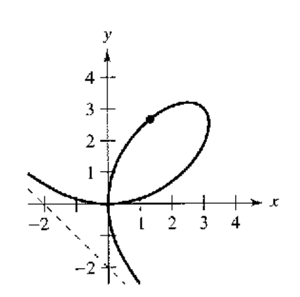
30. Cisoide:
$(4 - x)y^2 = x^3$
Punto: $(2, 2)$



31. Bifolio:
$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$
Punto: $(1, 1)$

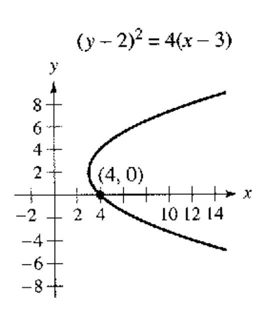


32. Folio de Descartes:
$x^3 + y^3 - 6xy = 0$
Punto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

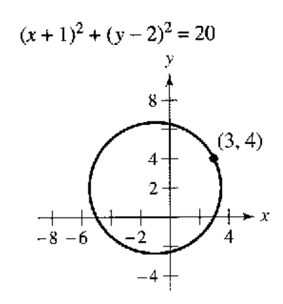


Curvas famosas **En los ejercicios 33 a 40, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.**

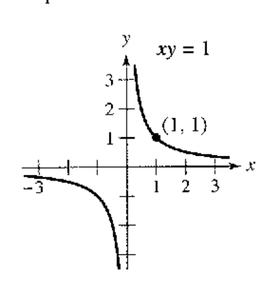
33. Parábola



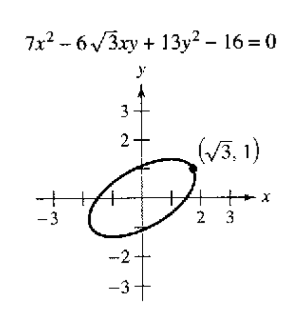
34. Circunferencia



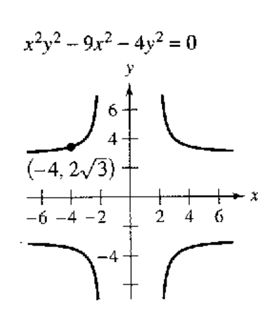
35. Hipérbola rotada



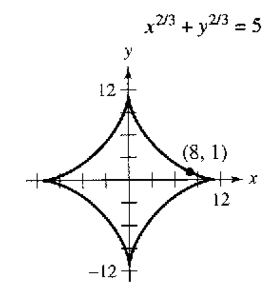
36. Elipse rotada



37. Cruciforme



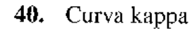
38. Astroide



39. Lemniscata

$3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$

40. Curva kappa



$y^2(x^2 + y^2) = 2x^2$

41. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ en $(1, 2)$.

b) Demostrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

42. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ en $(3, -2)$.

b) Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

En los ejercicios 43 y 44, calcular dy/dx de manera implícita y encontrar el mayor intervalo con la forma $-a < y < a$ o $0 < y < a$ tal que y sea una función derivable de x. Expresar dy/dx en función de x.

43. $\tan y = x$ **44.** $\cos y = x$

En los ejercicios 45 a 50, encontrar d^2y/dx^2 en términos de x y y.

45. $x^2 + y^2 = 36$ **46.** $x^2y^2 - 2x = 3$

47. $x^2 - y^2 = 16$ **48.** $1 - xy = x - y$

49. $y^2 = x^3$ **50.** $y^2 = 4x$

En los ejercicios 51 y 52 usar una computadora para representar gráficamente la ecuación. Encontrar la ecuación de la recta tangente en la gráfica obtenida en el punto y la gráfica en la recta tangente.

51. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \quad (9, 1)$ **52.** $y^2 = \frac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto indicado (la *recta normal* en un punto es perpendicular a la tangente en ese punto). Utilizar una computadora para representar gráficamente la ecuación, la recta tangente y la normal.

53. $x^2 + y^2 = 25$
$(4, 3), (-3, 4)$

54. $x^2 + y^2 = 9$
$(0, 3), (2, \sqrt{5})$

55. Demostrar que la recta normal a cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pasa por el origen.

56. Dos circunferencias de radio 4 son tangentes a la gráfica de $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$. Encontrar las ecuaciones de esas dos circunferencias.

En los ejercicios 57 y 58, localizar los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical.

57. $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$

58. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 59 a 62, utilizar computadora para construir las gráficas de las ecuaciones y probar que en sus intersecciones son ortogonales. (Dos gráficas son *ortogonales* en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.)**

59. $2x^2 + y^2 = 6$
$y^2 = 4x$

60. $y^2 = x^3$
$2x^2 + 3y^2 = 5$

61. $x + y = 0$
$x = \operatorname{sen} y$

62. $x^3 = 3(y - 1)$
$x(3y - 29) = 3$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 63 y 64, verificar que las dos familias de curvas son ortogonales, siendo C y K números reales. Utilizar una computadora para representar gráficamente ambas familias con dos valores de C y dos valores de K.**

63. $xy = C, x^2 - y^2 = K$ **64.** $x^2 + y^2 = C^2, y = Kx$

En los ejercicios 65 a 68, derivar: *a*) respecto a x (y es una función de x) y *b*) respecto a t (x y y son funciones de t).

65. $2x^2 - 3y^4 = 0$ **66.** $x^2 - 3xy^2 + y^3 = 10$

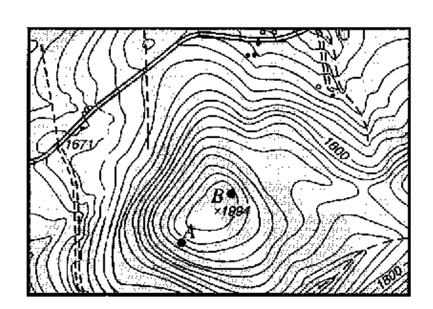
67. $\cos \pi y - 3 \operatorname{sen} \pi x = 1$ **68.** $4 \operatorname{sen} x \cos y = 1$

Desarrollo de conceptos

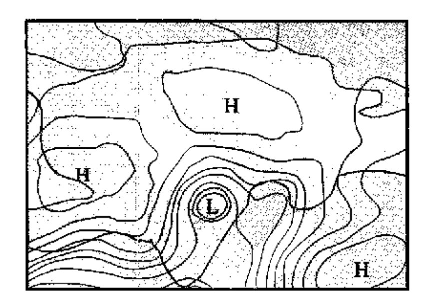
69. Describir la diferencia que existe entre la forma explícita de una ecuación y una ecuación implícita. Elaborar un ejemplo de cada una.

70. Con sus propias palabras, establezca las estrategias a seguir en la derivación implícita.

71. ***Trayectorias ortogonales*** En la siguiente figura se muestra un mapa topográfico realizado por un grupo de excursionistas. Ellos se encuentran en el área boscosa que está en la parte superior de la colina que se muestra en el mapa y deciden seguir la ruta de descenso menos empinada (trayectorias ortogonales a los contornos del mapa). Dibujar la ruta que deben seguir si parten desde el punto A y si lo hacen desde el punto B. Si su objetivo es llegar a la carretera que pasa por la parte superior del mapa, ¿cuál de esos puntos de partida deben utilizar?



72. ***Mapa climático*** El siguiente mapa climático muestra varias curvas *isobáricas* (curvas que representan áreas con presión constante de aire); tres de alta presión H y una de baja presión L. Puesto que la velocidad del viento es mayor a lo largo de las trayectorias ortogonales de las curvas isobáricas, utilizar el mapa para determinar las áreas con mayor velocidad del viento.



73. Considerando la ecuación $x^4 = 4(4x^2 - y^2)$:
   a) Utilizar una computadora para representar gráficamente.
   b) Encontrar y representar gráficamente las cuatro rectas tangentes a la curva en $y = 3$.
   c) Calcular las coordenadas exactas del punto de intersección de las dos rectas tangentes en el primer cuadrante.

74. Sea L una recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$. Demostrar que la suma de las intersecciones de L en los ejes x y y es c.

75. Demostrar (teorema 2.3) que:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

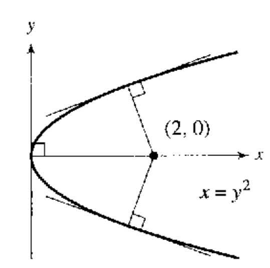
para el caso donde n es un número racional. (*Sugerencia*: Escribir $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivar de forma implícita. Suponer que p y q son enteros, con $q > 0$.)

76. ***Pendiente*** Encontrar todos los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ donde la pendiente es igual a $\frac{3}{4}$.

77. ***Tangente horizontal*** Determinar el (los) punto(s) en el (los) que la gráfica de $y^4 = y^2 - x^2$ tiene una tangente horizontal.

78. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ que pasa por el punto $(4, 0)$.

79. ***Normales a una parábola*** En la grafica se mostraron las rectas normales desde el punto $(2, 0)$ a la gráfica de la parábola $x = y^2$. Encontrar cuántas rectas normales existen desde el punto $(x_0, 0)$ a la gráfica de la parábola si *a)* $x_0 = \frac{1}{4}$, *b)* $x_0 = \frac{1}{2}$ y *c)* $x_0 = 1$ ¿Para qué valor de x_0 existen dos rectas normales perpendiculares entre sí?



80. ***Rectas normales*** *a)* Encontrar la ecuación de la recta normal a la elipse

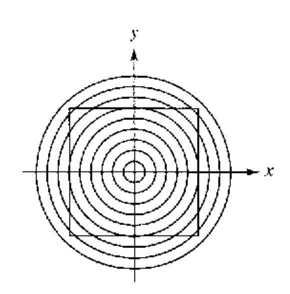
$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$$

en el punto $(4, 2)$. *b)* Utilizar una computadora para representar gráficamente la elipse y la recta normal. *c)* ¿En qué otros puntos interseca esta recta normal a la elipse?

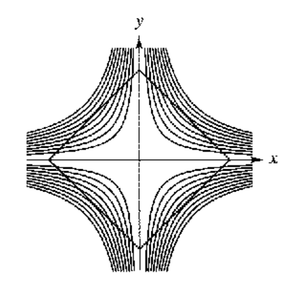
Proyecto de trabajo: Ilusiones ópticas

En cada una de las siguientes gráficas se genera una ilusión óptica por intersecciones de rectas con una familia de curvas. En todos los casos, las rectas parecen estar curvadas. Encontrar el valor de dy/dx para los valores de x y y.

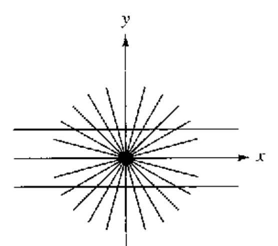
a) Círculos: $x^2 + y^2 = C^2$
$x = 3, y = 4, C = 5$



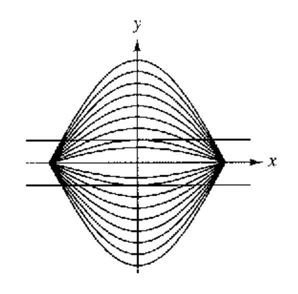
b) Hipérbolas: $xy = C$
$x = 1, y = 4, C = 4$



c) Rectas: $ax = by$
$x = \sqrt{3}, y = 3,$
$a = \sqrt{3}, b = 1$



d) Curvas coseno: $y = C \cos x$
$x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas de las ilusiones ópticas, leer el artículo "Descriptive Models for Perception of Optical Illusions", de David A. Smith, en *The UMAP Journal*.

Sección 2.6 Ritmos o velocidades relacionados

- **Hallar un ritmo o velocidad relacionado.**
- **Resolver problemas de la vida real con ritmos o velocidades relacionados.**

Cálculo de ritmos o relacionados

Ya se sabe cómo usar la regla de la cadena para encontrar dy/dx de manera implícita. Otra aplicación relevante de la regla de la cadena consiste en encontrar ritmos o velocidades de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando respecto al *tiempo*.

Por ejemplo, sale agua de un depósito cónico (figura 2.33), el volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua son funciones de t. Sabiendo que estas magnitudes variables se relacionan mediante la ecuación

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad \text{Ecuación original.}$$

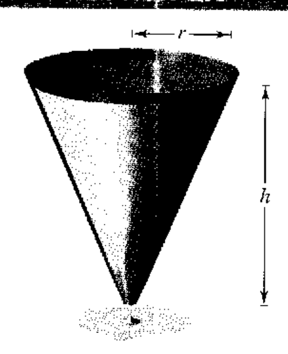
se puede derivar implícitamente con respecto a t a fin de obtener la ecuación de **ritmos relacionados**

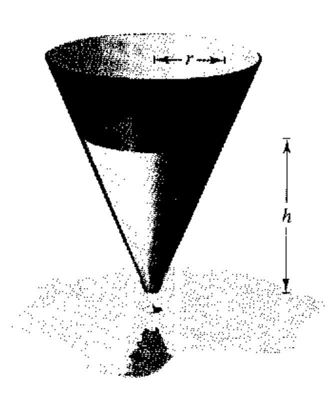
$$\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{3} r^2 h\right)$$

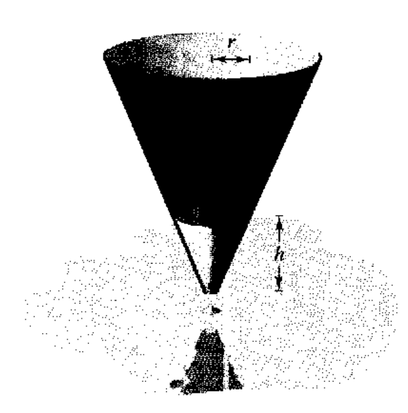
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2 \frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right] \qquad \text{Diferenciar con respecto a } t.$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right).$$

Para esta ecuación se puede ver que el ritmo de cambio de V está relacionado con el ritmo de cambio de h y r.







El volumen está relacionado con el radio y con la altura
Figura 2.33

EXPLORACIÓN

Cálculo de un ritmo relacionado Suponer que en el tanque cónico que se muestra en la figura 2.33, la altura está cambiando a un ritmo de -0.2 pies por minuto y el radio lo está haciendo a un ritmo de -0.1 pies por minuto. ¿Cuál es el ritmo de cambio del volumen cuando el radio es $r = 1$ pie y la altura es $h = 2$ pies? ¿El ritmo de cambio del volumen depende de los valores de r y h? Explicar la respuesta.

EJEMPLO 1 Dos ritmos o velocidades de cambio relacionados

Sean x y y dos funciones derivables de t, y relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$. Calcular dy/dx para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ para $x = 1$.

Solución Derivar ambos lados *con respecto a t*, utilizando la regla de la cadena.

$$y = x^2 + 3 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre la historia de los problemas de ritmos relacionados, ver el artículo "The Lengthening Shadow: The Story of Related Rates", de Bill Austin, Don Barry y David Berman, en *Mathematics Magazine*.

Solución de problemas con ritmos o velocidades relacionados

En el ejemplo 1 se *dio* la ecuación que relaciona las variables x y y, y se pedía hallar el ritmo de cambio de y para $x = 1$.

Ecuación: $y = x^2 + 3$

Ritmo dado: $\frac{dx}{dt} = 2$ cuando $x = 1$

Hallar: $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$

En los ejemplos restantes de esta sección debe crear un modelo matemático a partir de una descripción verbal.

EJEMPLO 2 Ondas en un lago

En un lago en calma se deja caer una piedra, lo que provoca ondas circulares, como se muestra en la figura 2.34. El radio r del círculo exterior está creciendo a un ritmo constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué ritmo está cambiando el área A de la región circular perturbada?

El área total se incrementa a medida que lo hace el radio del círculo exterior
Figura 2.34

Solución Las variables r y A están relacionadas por $A = \pi r^2$. El ritmo o velocidad de cambio del radio r es $dr/dt = 1$.

Ecuación: $A = \pi r^2$

Ritmo dado: $\frac{dr}{dt} = 1$

Hallar: $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 4$

Con esta información, proceder como en el ejemplo 1.

$$\frac{d}{dt}[A] = \frac{d}{dt}[\pi r^2] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(1) = 8\pi \qquad \text{Sustituir 4 por } r \text{ y 1 por } dr/dt.$$

Cuando el radio es de 4 pies, el área cambia a razón de 8π pies^2/s.

Estrategia para la solución de problemas de ritmos o velocidades relacionados

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y *por determinar*. Hacer un esbozo y clasificarlas.
2. Escribir una ecuación que incluya las variables cuyos ritmos de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse.
3. Utilizando la regla de la cadena, derivar de manera implícita ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo t*.
4. *Después* de terminar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus ritmos de cambio. Luego se despeja el ritmo de cambio requerido.

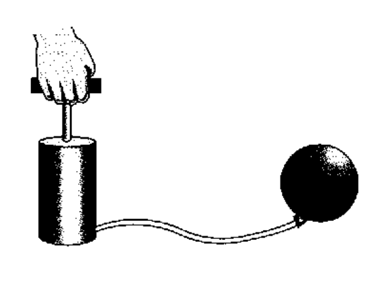
NOTA Al utilizar esta estrategia, debe cerciorarse de que el paso 4 no se realiza hasta que el paso 3 esté terminado. Sustituir los valores conocidos de las variables antes de derivarla tendría como resultado final una derivada inapropiada.

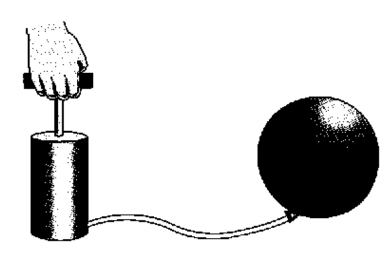
La tabla siguiente contiene varios ejemplos de modelos matemáticos que incluyen ritmos de cambio. Por ejemplo, el ritmo de cambio del primer ejemplo es la velocidad del automóvil.

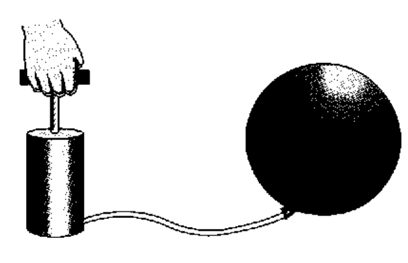
Enunciado verbal	**Modelo matemático**
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas por hora.	x = distancia recorrida $\frac{dx}{dt} = 50$ cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora.	V = volumen de agua en la piscina $\frac{dV}{dt} = 10 \text{ m}^3/\text{h}$
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 revolución = 2π radianes).	θ = ángulo de giro $\frac{d\theta}{dt} = 25(2\pi)$ rad/min

EJEMPLO 3 Inflado de un globo

Se bombea aire en el interior de un globo esférico (ver la figura 2.35) a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto. Calcular el ritmo de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 pies.

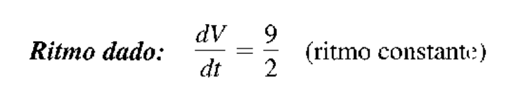






Inflando un globo
Figura 2.35

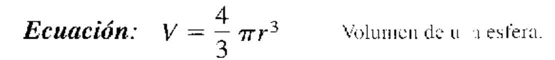
Solución Sea V el volumen del globo y r su radio. Puesto que el volumen está creciendo a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto, se sabe que en el instante t el ritmo de cambio del volumen es $dV/dt = \frac{9}{2}$. De tal modo el problema se puede formular de la siguiente manera:



Ritmo dado: $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$ (ritmo constante)

Calcular: $\frac{dr}{dt}$ cuando $r = 2$

Para encontrar el ritmo de cambio del radio, encontrar una ecuación que relacione el radio r con el volumen V.



Ecuación: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Volumen de una esfera.

Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a t, para obtener:

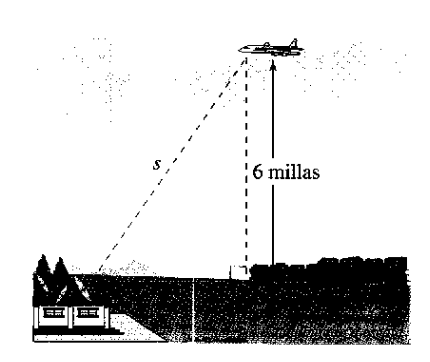
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$ Derivar con respecto a t.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dV}{dt}\right).$$ Despejar dr/dt.

Por último, cuando $r = 2$ el ritmo de cambio del radio resulta ser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{9}{2}\right) \approx 0.09 \text{ pies por minuto.}$$

Observar que en el ejemplo 3 el volumen está creciendo a ritmo *constante*, pero el radio cambia a ritmo *variable*. El hecho de que dos ritmos estén relacionados no implica que sean proporcionales. En este caso en particular, el radio crece más y más lentamente con el paso del tiempo. ¿Por qué?



Un avión vuela a 6 millas de altura y dista s millas de la estación de radar
Figura 2.36

EJEMPLO 4 Velocidad de un avión detectado por radar

Un avión recorre una ruta de vuelo que le llevará directamente sobre una estación de radar, como se muestra en la figura 2.36. Si s está decreciendo a razón de 400 millas por hora cuando $s = 10$ millas, ¿cuál es la velocidad del avión?

Solución Sea x la distancia horizontal al radar, como se ilustra en la figura 2.36. Observar que cuando $s = 10$, $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$.

Ritmo dado: $ds/dt = -400$ cuando $s = 10$

Encontrar: dx/dt cuando $s = 10$ y $x = 8$

Encontrar la velocidad del avión de la siguiente manera:

Ecuación: $x^2 + 6^2 = s^2$ Teorema de Pitágoras.

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$ Derivar con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$ Despejar dx/dt.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}(-400)$$ Sustituir s, x y ds/dt.

$$= -500 \text{ millas por hora}$$ Simplificar.

Puesto que la velocidad es de -500 millas por hora, la *rapidez* (o "velocidad" en sentido coloquial) es 500 millas/h.

EJEMPLO 5 Ángulo de elevación variable

Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara que se muestra en la figura 2.37, diez segundos después del despegue.

Solución Sea θ el ángulo de elevación, como se muestra en la figura 2.37. Cuando $t = 10$, la altura s del cohete es $s = 50t^2 = 50(100) = 5\,000$ pies.

Ritmo dado: $ds/dt = 100t$ = velocidad del cohete

Encontrar: $d\theta/dt$ cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$

Utilizando la figura 2.37, relacionar s y θ mediante la ecuación $\tan\theta = s/2\,000$.

Ecuación: $$\tan\theta = \frac{s}{2\,000}$$ Ver la figura 2.37.

$$(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\,000}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$ Derivar con respecto a t.

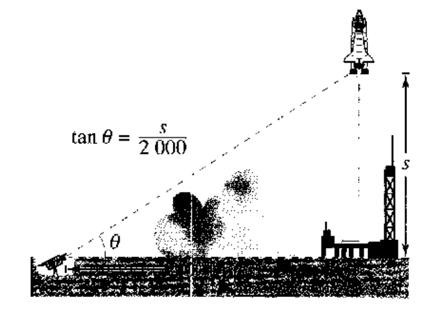
$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta\,\frac{100t}{2\,000}$$ Sustituir $100t$ por ds/dt.

$$= \left(\frac{2\,000}{\sqrt{s^2 + 2\,000^2}}\right)^2 \frac{100t}{2\,000}$$ $\cos\theta = 2\,000/\sqrt{s^2 + 2\,000^2}$.

Cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000(100)(10)}{5\,000^2 + 2\,000^2} = \frac{2}{29} \text{ radianes por segundo.}$$

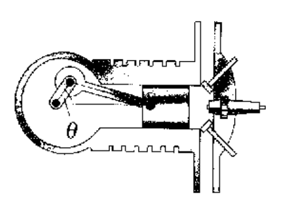
De tal modo, cuando $t = 10$, θ cambia a razón de $\frac{2}{29}$ radianes por segundo.

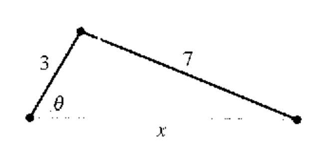


Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue del transbordador espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación de posición $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara está a 2 000 pies de la plataforma de lanzamiento
Figura 2.37

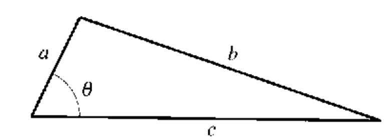
EJEMPLO 6 Velocidad de un pistón

En el motor que se muestra en la figura 2.38, una varilla de 7 pulgadas está conectada a un cigüeñal de 3 pulgadas de radio, que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a 200 revoluciones por minuto. Calcular la velocidad del pistón cuando $\theta = \pi/3$.





La velocidad de un pistón está relacionada con el ángulo del cigüeñal
Figura 2.38



Ley de los cosenos:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$
Figura 2.39

Solución Nombrar las distancias como se muestra en la figura 2.38. Puesto que una revolución completa equivale a 2π radianes, se sigue que $d\theta/dt = 200(2\pi) = 400\pi$ radianes por minuto.

Ritmo dado: $\frac{d\theta}{dt} = 400\pi$ (ritmo constante)

Encontrar: $\frac{dx}{dt}$ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$

Usar la ley de los cosenos (figura 2.39) para encontrar una ecuación que relacione a x y a θ.

Ecuación:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos \theta$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 6\left(-x \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{dx}{dt}\right)$$

$$(6 \cos \theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x \operatorname{sen} \theta}{6 \cos \theta - 2x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se puede despejar x de la siguiente manera:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos \frac{\pi}{3}$$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$0 = x^2 - 3x - 40$$

$$0 = (x - 8)(x + 5)$$

$$x = 8$$

De esta manera, cuando $x = 8$ y $\theta = \pi/3$ la velocidad del pistón es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)(\sqrt{3}/2)}{6(1/2) - 16}(400\pi)$$

$$= \frac{9\,600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

$$\approx -4\,018 \text{ pulgadas por minuto}$$

NOTA Observar que la velocidad en el ejemplo 6 es negativa porque x representa una distancia que está decreciendo.

Ejercicios de la sección 2.6

En los ejercicios 1 a 4, suponer que x y y son funciones derivables de t y encontrar los valores señalados de dy/dt y dx/dt.

	Ecuación		*Encontrar*	*Dado*
1.	$y = \sqrt{x}$	*a)*	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\frac{dx}{dt} = 3$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\frac{dy}{dt} = 2$
2.	$y = 2(x^2 - 3x)$	*a)*	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\frac{dx}{dt} = 2$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = 5$
3.	$xy = 4$	*a)*	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\frac{dx}{dt} = 10$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = -6$
4.	$x^2 + y^2 = 25$	*a)*	$\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3, y = 4$	$\frac{dx}{dt} = 8$
		b)	$\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 4, y = 3$	$\frac{dy}{dt} = -2$

En los ejercicios 5 a 8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función, de modo que dx/dt es 2 cm/s. Calcular dy/dt para los valores de x que se indican.

5. $y = x^2 + 1$ *a)* $x = -1$ *b)* $x = 0$ *c)* $x = 1$

6. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ *a)* $x = -2$ *b)* $x = 0$ *c)* $x = 2$

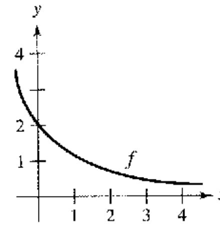
7. $y = \tan x$ *a)* $x = -\frac{\pi}{3}$ *b)* $x = -\frac{\pi}{4}$ *c)* $x = 0$

8. $y = \operatorname{sen} x$ *a)* $x = \frac{\pi}{6}$ *b)* $x = \frac{\pi}{4}$ *c)* $x = \frac{\pi}{3}$

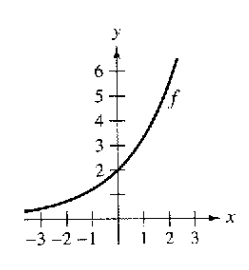
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 9 y 10, utilizar la gráfica de f para *a)* determinar si dy/dt es positivo o negativo dado que dx/dt es negativo y *b)* establecer si dx/dt es positivo o negativo, dado que dy/dt es positivo.

9.



10.



11. Considerando la función lineal $y = ax + b$, ¿si x cambia con ritmo constante, y también lo hace a ritmo constante? De ser así, ¿lo hace con el mismo ritmo que x? Explicar la respuesta.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

12. Con sus propias palabras, mencione la estrategia para resolver problemas de ritmos relacionados.

13. Encontrar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve por la gráfica de $y = x^2 + 1$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

14. Encontrar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

15. ***Área*** El radio r de un círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcular el ritmo de cambio del área cuando *a)* $r = 6$ cm y *b)* $r = 24$ cm.

16. ***Área*** Sea A el área de un círculo con un radio r variable con el tiempo. Si dr/dt es constante, ¿es constante dA/dt? Explicar la respuesta.

17. ***Área*** El ángulo entre los dos lados iguales, con longitud s, de un triángulo isósceles es θ.

a) Demostrar que el área del triángulo se obtiene mediante $A = \frac{1}{2}s^2 \operatorname{sen} \theta$.

b) Si θ está creciendo a razón de $\frac{1}{2}$ radián por minuto, encontrar el ritmo de cambio del área cuando $\theta = \pi/6$ y cuando $\theta = \pi/3$.

c) Explicar por qué el ritmo de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que $d\theta/dt$ es constante.

18. ***Volumen*** El radio r de una esfera está creciendo a razón de 2 pulgadas por minuto.

a) Calcular el ritmo de cambio del volumen cuando $r = 6$ y cuando $r = 24$ pulgadas.

b) Explicar por qué el ritmo de cambio del volumen de la esfera no es constante, a pesar de que dr/dt es constante.

19. ***Volumen*** Se infla un globo esférico con gas a razón de 800 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué ritmo está aumentando su radio en el momento en el que éste está *a)* 30 centímetros y *b)* 60 centímetros?

20. ***Volumen*** Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo está aumentando el volumen cuando cada arista mide *a)* 1 cm y *b)* 10 cm?

21. ***Superficie*** Bajo las condiciones del problema anterior, determinar el ritmo al que cambia el *área de la superficie* cuando cada arista mide *a)* 1 cm y *b)* 10 cm.

22. ***Volumen*** La fórmula para calcular el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Encontrar el ritmo de cambio del volumen si dr/dt es de 2 pulgadas por minuto y $h = 3r$, cuando *a)* $r = 6$ pulgadas y *b)* $r = 24$ pulgadas.

23. ***Volumen*** En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué ritmo cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

24. ***Profundidad*** Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de ancho en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se le vierte agua a razón de 10 pies^3 por minuto, calcular el ritmo de cambio de la profundidad del agua cuando ésta es de 8 pies.

25. ***Profundidad*** Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho y una profundidad que oscila desde 1 hasta 3 m (ver la figura). Se bombea agua en ella a razón de $\frac{1}{4}$ de metro cúbico por minuto y ya hay 1 m de agua en el extremo más profundo.

a) ¿Qué porcentaje de la piscina está lleno?
b) ¿A qué ritmo se eleva el nivel del agua?

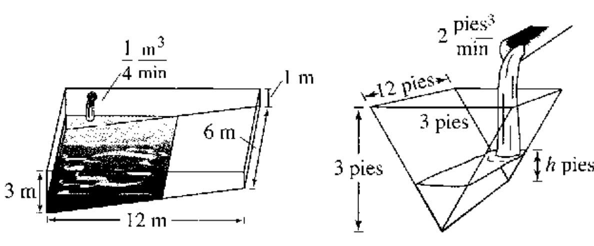


Figura para 25 **Figura para 26**

26. ***Profundidad*** Una artesa tiene 12 pies de largo y 3 de ancho en su parte superior (ver la figura), sus extremos tienen forma de triángulo isósceles con una altura de 3 pies.

a) Si se vierte agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué ritmo sube el nivel del agua cuando hay 1 pie de profundidad de agua?
b) Si el agua sube a un ritmo de $\frac{3}{8}$ de pulgada por minuto cuando $h = 2$, determinar el ritmo al que se está vertiendo agua en la artesa.

27. ***Escalera deslizante*** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (ver la figura). Su base se desliza por la pared a razón de 2 pies por segundo.

a) ¿A qué ritmo está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7, 15 y 24 pies de la pared?
b) Determinar el ritmo al que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base de la primera está a 7 pies de la pared.
c) Calcular el ritmo de cambio del ángulo formado por la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies de la pared.

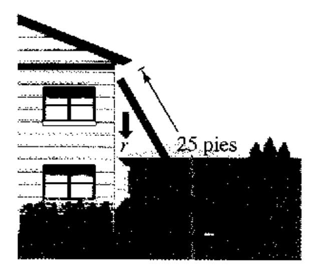


Figura para 27

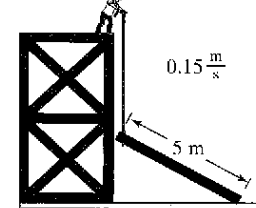


Figura para 28

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas relativas a las escaleras deslizantes, ver el artículo "The Falling Ladder Paradox", de Paul Scholten y Andrew Simoson, en *The College Mathematics Journal*.

28. ***Construcción*** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón de cinco metros hasta lo alto de un edificio en construcción (ver la figura). Suponer que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0.15 m/s. ¿A qué ritmo desliza por el suelo el extremo cuando está a 2.5 m de la pared?

29. ***Construcción*** Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta un tubo de la misma longitud hasta colocarlo en posición vertical, como se muestra en la figura. La polea recoge la cuerda a razón de 20.2 m/s. Calcular los ritmos de cambio vertical y horizontal del extremo del tubo cuando $y = 6$.

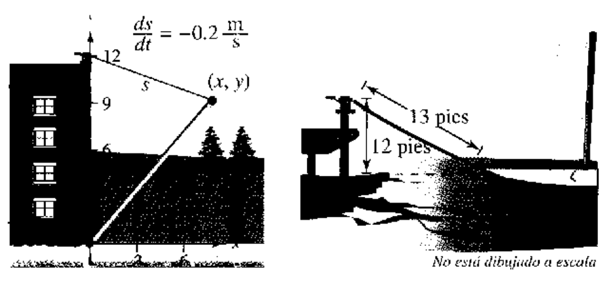


Figura para 29 **Figura para 30**

30. ***Navegación*** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de una polea situada a una altura de 12 pies por encima de la quilla del barco (ver la figura).

a) Si la cuerda se recoge a razón de 4 pies por segundo, determinar la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero a medida que el barco se acerca más al muelle?
b) Suponiendo que el bote se mueve a un ritmo constante de 4 pies por segundo, determinar la velocidad a la que la polea recoge la cuerda cuando quedan 13 pies de ella por recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad de la polea a medida que el barco se acerca más al muelle?

31. ***Control de tráfico aéreo*** Un controlador detecta que dos aviones que vuelan a la misma altura tienen trayectorias perpendiculares y convergen en un punto (ver figura). Uno de ellos está a 150 millas de dicho punto y vuela a 450 millas por hora. El otro está a 200 millas y se desplaza a 600 millas/h.

a) ¿A qué ritmo se reduce la distancia entre ellos?
b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la ruta de alguno de ellos?

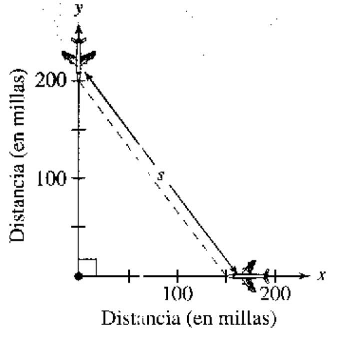


Figura para 31

Figura para 32

32. ***Control de tráfico aéreo*** Un avión vuela a 5 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (ver figura en la página anterior). Cuando el avión está a 10 millas ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?

33. ***Deportes*** Un campo de béisbol tiene forma de un cuadrado con lados de 90 pies (vea la figura). Si un jugador corre de segunda a tercera a 28 pies por segundo y se encuentra a 30 pies de la tercera base, ¿a qué ritmo está cambiando su distancia s respecto a *home*?

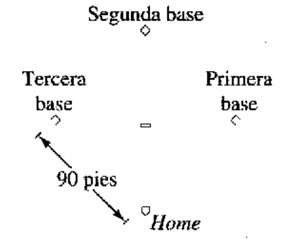


Figura para 33 y 34

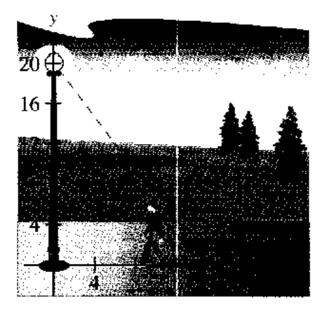
Figura para 35

34. ***Deportes*** En el campo de béisbol del ejercicio anterior, suponer que el jugador corre desde primera hasta segunda base a 28 pies por segundo. Calcular el ritmo de cambio de su distancia respecto a *home* cuando se encuentra a 30 pies de la segunda base.

35. ***Longitud de una sombra*** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo alejándose de una luz que está a 15 pies de altura sobre el suelo (ver figura). Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:

a) ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?
b) ¿a qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?

36. ***Longitud de una sombra*** Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que el hombre camina *hacia* la luz y que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura (ver figura).



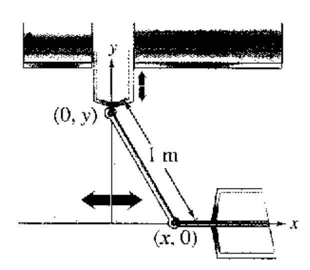


Figura para 36

Figura para 37

37. ***Diseño de máquinas*** Los extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ (ver figura). La posición del extremo que se apoya en el eje x es

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$$

donde t se mide en segundos.

a) Calcular la duración de un ciclo completo de la varilla.
b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el extremo de la varilla que está en el eje y?
c) Encontrar la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro está en $(\frac{1}{4}, 0)$.

38. ***Diseño de máquinas*** Repetir el ejercicio anterior para una función de posición $x(t) = \frac{3}{5}$ sen πt. Utilizar el punto $(\frac{3}{10}, 0)$ para el apartado *c*).

39. ***Evaporación*** Al caer, una gota esférica alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial ($S = 4\pi r^2$). Demostrar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

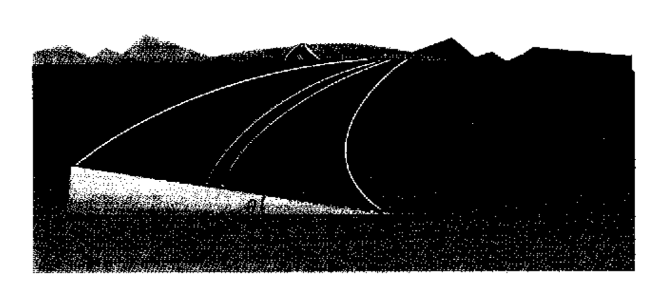
40. ***Electricidad*** La resistencia eléctrica combinada R de R_1 y R_2, conectadas en paralelo, es dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde R, R_1 y R_2 se miden en ohmios. R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1 y 1.5 ohmios por segundo, respectivamente. ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 50$ y $R_2 = 75$ ohmios?

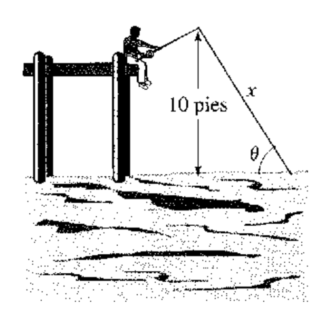
41. ***Expansión adiabática*** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y su volumen V satisfacen la ecuación $pV^{1.3} = k$, donde k es una constante. Encontrar la relación que existe entre los ritmos dp/dt y dV/dt.

42. ***Diseño de autopistas*** En cierta autopista, la trayectoria de los automóviles es un arco circular de radio r. Con el fin de no depender totalmente de la fricción para compensar la fuerza centrífuga, se construye un peralte con un ángulo de inclinación θ sobre la horizontal (ver figura). Este ángulo satisface la ecuación $rg \tan \theta = v^2$, donde v es la velocidad de los automóviles y $g = 32$ pies por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encontrar la relación que existe entre los ritmos relacionados dv/dt y $d\theta/dt$.

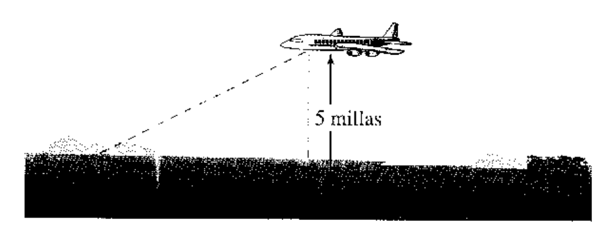


43. ***Ángulo de elevación*** Un globo asciende a 3 metros por segundo desde un punto del suelo a 30 m de un observador. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a 30 metros de altura.

44. ***Ángulo de elevación*** El pescador de la figura recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua (ver figura). ¿A qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?



45. ***Ángulo de elevación*** Un avión vuela a 5 millas de altitud y a una velocidad de 600 millas por hora, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (ver figura). ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo de elevación θ cuando el ángulo es *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 75°$?



46. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** La patrulla de la figura está estacionada a 50 pies de un largo almacén. La luz de su torreta gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 70°$?

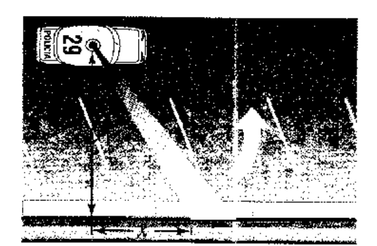


Figura para 46 **Figura para 47**

47. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta un punto *P* en su borde (ver figura).

a) Encontrar dx/dt como función de θ.

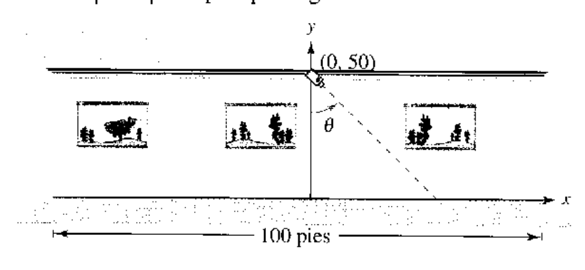
b) Utilizar una computadora para representar gráficamente la función del apartado *a*).

c) ¿Cuándo es mayor el valor absoluto del ritmo de cambio de x?, ¿y el menor?

d) Calcular dx/dt cuando $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.

48. ***Control de vuelo*** Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 240 millas por hora. Si asciende con un ángulo de 22°, calcular el ritmo al que está ganando altura.

49. ***Cámara de vigilancia*** Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (ver figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Encontrar un modelo para el ritmo variable de rotación adecuado si $|dx/dt| = 2$ pies por segundo.



50. ***Para pensar*** Describir la relación que existe entre el ritmo de cambio de y y el de x en los casos siguientes. Suponer que todas las variables y derivadas son positivas.

a) $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$ *b*) $\frac{dy}{dt} = x(L - x)\frac{dx}{dt}, \quad 0 \leq x \leq L$

Aceleración **En los ejercicios 51 y 52, calcular la aceleración del objeto especificado. (*Sugerencia:* Recordar que si una variable cambia a ritmo constante, su aceleración es nula.)**

51. Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera del ejercicio 27 cuando su base está a 7 pies de la pared.

52. Calcular la aceleración del velero del ejercicio 30*a* cuando faltan por recoger 13 pies de cuerda.

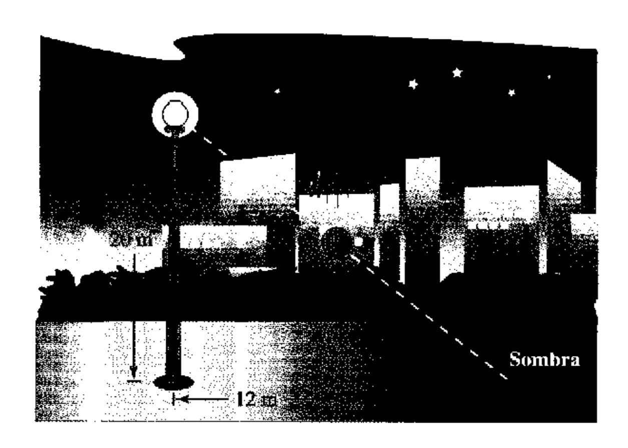
53. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el número de mujeres solteras s (nunca casadas) y casadas m (en millones) en el mundo laboral estadounidense desde 1993 hasta 2001. (*Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics*)

Año	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
s	15.0	15.3	15.5	15.8	16.5	17.1	17.6	17.8	18.0
m	32.0	32.9	33.4	33.6	33.8	33.9	34.4	34.6	34.7

a) Utilizar las funciones de regresión de su computadora para encontrar un modelo de la forma $m(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ para esos datos, donde t es el tiempo en años, siendo $t = 3$ el año 1993.

b) Encontrar dm/dt. Después utilizar ese modelo para estimar dm/dt para $t = 10$ supuesto que el número de mujeres solteras s que forman parte de la fuerza de trabajo va a crecer a razón de 0.75 millones al año.

54. ***Sombra en movimiento*** Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m, a una distancia de 12 m de una lámpara (ver figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? (*Enviado por Dennis Gittinger, St. Philips College, San Antonio, TX*)



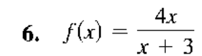
Ejercicios de repaso del capítulo 2

En los ejercicios 1 a 4, encontrar la derivada de la función usando la propia definición de derivada.

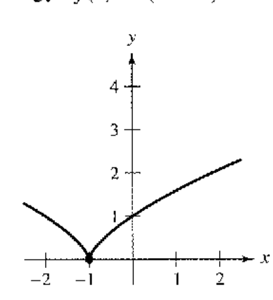
1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
2. $f(x) = \sqrt{x} + 1$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

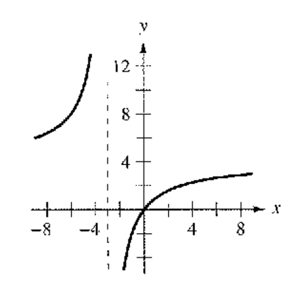
En los ejercicios 5 y 6, buscar los valores de x en los que f es derivable.

5. $f(x) = (x+1)^{2/3}$



6. $f(x) = \dfrac{4x}{x+3}$





7. Construir la gráfica de $f(x) = 4 - |x - 2|$.
   a) ¿f es continua en $x = 2$?
   b) ¿f es derivable en $x = 2$? Explicar la respuesta.
8. Construir la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2, & x < -2 \\ 1 - 4x - x^2, & x \geq -2. \end{cases}$
   a) ¿f es continua en $x = -2$?
   b) ¿f es derivable en $x = -2$? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 9 y 10, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

9. $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{x}{6}, \quad \left(-1, \dfrac{5}{6}\right)$
10. $h(x) = \dfrac{3x}{8} - 2x^2, \quad \left(-2, -\dfrac{35}{4}\right)$

En los ejercicios 11 y 12, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado, *b*) utilizar una computadora para representar gráficamente la función y su tangente en el punto y *c*) usar la función *derivative* de una computadora para confirmar sus resultados.

11. $f(x) = x^3 - 1, \quad (-1, -2)$
12. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \quad (0, 2)$

En los ejercicios 13 y 14, utilizar la forma alternativa de la derivada para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

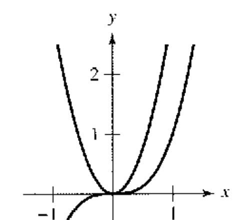
13. $g(x) = x^2(x - 1), \quad c = 2$
14. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad c = 2$

En los ejercicios 15 a 30, encontrar la derivada de la función.

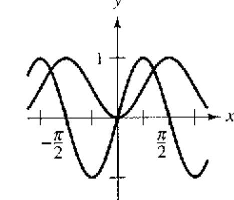
15. $y = 25$
16. $y = -12$
17. $f(x) = x^8$
18. $g(x) = x^{12}$
19. $h(t) = 3t^4$
20. $f(t) = -8t^5$
21. $f(x) = x^3 - 3x^2$
22. $g(s) = 4s^4 - 5s^2$
23. $h(x) = 6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$
24. $f(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$
25. $g(t) = \dfrac{2}{3t^2}$
26. $h(x) = \dfrac{2}{(3x)^2}$
27. $f(\theta) = 2\theta - 3 \operatorname{sen} \theta$
28. $g(\alpha) = 4 \cos \alpha + 6$
29. $f(\theta) = 3 \cos \theta - \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{4}$
30. $g(\alpha) = \dfrac{5 \operatorname{sen} \alpha}{3} - 2\alpha$

Redacción **En los ejercicios 31 y 32, en la figura se muestran las gráficas de una función y su derivada. Nombrar las gráficas como f y f' y escribir un pequeño párrafo estableciendo los criterios utilizados al hacer la selección.**

31.



32.



33. ***Cuerda vibrante*** Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra, ésta vibra con una frecuencia $F = 200\sqrt{T}$, donde F se mide en vibraciones por segundo y la tensión T se mide en libras. Encontrar los ritmos de cambio en F cuando *a*) $T = 4$ y *b*) $T = 9$.
34. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una pelota desde una altura de 100 pies. Un segundo después, se deja caer otra pelota desde una altura de 75 pies. ¿Cuál de ellas llega primero el suelo?
35. ***Movimiento vertical*** Para estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte superior a una piscina que se encuentra a nivel del suelo. ¿Qué altura tiene el edificio si el impacto en el agua ocurre 9.2 segundos después de lanzada la piedra?
36. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una bomba desde un aeroplano que vuela a una altura de 14 400 pies. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba en llegar al suelo? (Debido al movimiento del avión, la caída no será vertical, pero el tiempo será el mismo.) Si el avión viaja a 600 millas por hora ¿cuánto se moverá la bomba de manera horizontal después de soltarla?
37. ***Movimiento de un proyectil*** Se lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0.02x^2$.
    a) Construir la gráfica de la trayectoria.
    b) Encontrar la distancia horizontal total de la pelota.
    c) ¿En qué valor de x alcanzará la pelota la altura máxima? (Utilizar la simetría de la ruta.)
    d) Encontrar la ecuación que sirve para calcular el ritmo de cambio instantáneo para la altura de la pelota con respecto al cambio horizontal. Evaluar la ecuación en $x = 0, 10, 25, 30$ y 50.
    e) ¿Cuál es el ritmo de cambio instantáneo de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

38. ***Movimiento de un proyectil*** La trayectoria de un proyectil lanzado con un ángulo de 45° grados con respecto al piso es

$$y = x - \frac{32}{v_0^2}(x^2)$$

donde la velocidad inicial es v_0 pies por segundo.

a) Encontrar la coordenada x del punto donde el proyectil golpea al suelo. Utilizar la simetría de la trayectoria del proyectil para localizar la coordenada x del punto en el que alcanza su altura máxima.

b) ¿Cuál es el ritmo de cambio instantáneo de la altura cuando el proyectil se encuentra a su altura máxima?

c) Demostrar que duplicar la velocidad inicial del proyectil multiplicaría por 4 la altura máxima y el alcance.

d) Calcular la altura máxima y el alcance de un proyectil lanzado con una velocidad inicial de 70 pies por segundo. Utilizar una computadora para representar gráficamente la trayectoria del proyectil.

39. ***Movimiento horizontal*** La función de posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es:

$x(t) = t^2 - 3t + 2$ para $-\infty < t < \infty$.

a) Calcular la velocidad de la partícula.

b) Encontrar el o los intervalos t abiertos en los que la partícula se mueve hacia la izquierda.

c) Determinar la posición de la partícula cuando la velocidad es 0.

d) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la posición es 0.

40. ***Modelo matemático*** En la siguiente tabla se muestra la velocidad de un automóvil en millas por hora y la distancia de frenado en pies:

Velocidad, x	20	30	40	50	60
Distancia de frenado, y	25	55	105	188	300

a) Utilizar las funciones de regresión de la computadora para encontrar un modelo cuadrático para los datos.

b) Utilizar una computadora para representar gráficamente los datos y trazar el modelo.

c) Utilizar una computadora para representar gráficamente dy/dx.

d) Utilizar el modelo para aproximar la distancia de frenado para una velocidad de 65 millas por hora.

e) Utilizar la gráfica de los apartados *b)* y *c)* para explicar el cambio en la distancia de frenado a medida que aumenta la velocidad.

En los ejercicios 41 a 54, encontrar la derivada de la función.

41. $f(x) = (3x^2 + 7)(x^2 - 2x + 3)$

42. $g(x) = (x^3 - 3x)(x + 2)$

43. $h(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$ **44.** $f(t) = t^3 \cos t$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ **46.** $f(x) = \dfrac{6x - 5}{x^2 + 1}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{4 - 3x^2}$ **48.** $f(x) = \dfrac{9}{3x^2 - 2x}$

49. $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$ **50.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

51. $y = 3x^2 \sec x$ **52.** $y = 2x - x^2 \tan x$

53. $y = x \cos x - \operatorname{sen} x$ **54.** $g(x) = 3x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

En los ejercicios 55 a 58, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado.

55. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$, $(1, 1)$ **56.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $\left(\dfrac{1}{2}, -3\right)$

57. $f(x) = -x \tan x$, $(0, 0)$ **58.** $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$, $(\pi, 1)$

59. ***Aceleración*** La velocidad de un objeto es $v(t) = 36 - t^2$, $0 \leq t \leq 6$, en metros por segundo. Calcular la velocidad y aceleración del objeto cuando $t = 4$.

60. ***Aceleración*** La velocidad inicial de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{90t}{4t + 10}$$

donde v se mide en pies por segundo. Calcular la velocidad y aceleración del vehículo una vez transcurridos los siguientes tiempos:

a) 1 segundo *b)* 5 segundos *c)* 10 segundos

En los ejercicios 61 a 64, calcular la segunda derivada de la función.

61. $g(t) = t^3 - 3t + 2$ **62.** $f(x) = 12\sqrt[4]{x}$

63. $f(\theta) = 3 \tan \theta$ **64.** $h(t) = 4 \operatorname{sen} t - 5 \cos t$

En los ejercicios 65 y 66, demostrar la función que satisface la ecuación.

	Función	*Ecuación*
65.	$y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$	$y'' + y = 0$
66.	$y = \dfrac{10 - \cos x}{x}$	$xy' + y = \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 67 a 78, encontrar la derivada de la función.

67. $h(x) = \left(\dfrac{x - 3}{x^2 + 1}\right)^2$ **68.** $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^5$

69. $f(s) = (s^2 - 1)^{5/2}(s^3 + 5)$ **70.** $h(\theta) = \dfrac{\theta}{(1 - \theta)^3}$

71. $y = 3 \cos(3x + 1)$ **72.** $y = 1 - \cos 2x + 2 \cos^2 x$

73. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4}$ **74.** $y = \dfrac{\sec^7 x}{7} - \dfrac{\sec^5 x}{5}$

75. $y = \dfrac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2} x - \dfrac{2}{7} \operatorname{sen}^{7/2} x$ **76.** $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

77. $y = \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x + 2}$ **78.** $y = \dfrac{\cos(x - 1)}{x - 1}$

En los ejercicios 79 a 82, encontrar la derivada de la función en el punto dado.

79. $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$, $(-2, 3)$

80. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $(3, 2)$

81. $y = \frac{1}{2}\csc 2x, \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

82. $y = \csc 3x + \cot 3x, \quad \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$

En los ejercicios 83 a 86, utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la derivada de la función. Utilizar la computadora para representar gráficamente la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponda a todo cero de la gráfica de la derivada.

83. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$ **84.** $f(x) = [(x-2)(x+4)]^2$

85. $f(t) = \sqrt{t+1}\,\sqrt[3]{t+1}$ **86.** $y = \sqrt{3x}\,(x+2)^3$

En los ejercicios 87 a 90, *a*) utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la derivada de la función en el punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto y *c*) representar gráficamente la función y su recta tangente en el mismo plano cartesiano.

87. $f(t) = t^2(t-1)^5, \quad (2, 4)$

88. $g(x) = x\sqrt{x^2+1}, \quad \left(3, 3\sqrt{10}\right)$

89. $y = \tan\sqrt{1-x}, \quad \left(-2, \tan\sqrt{3}\right)$

90. $y = 2\csc^3\left(\sqrt{x}\right), \quad (1, 2\csc^3 1)$

En los ejercicios 91 a 94, encontrar la segunda derivada de la función.

91. $y = 2x^2 + \operatorname{sen} 2x$ **92.** $y = \dfrac{1}{x} + \tan x$

93. $f(x) = \cot x$ **94.** $y = \operatorname{sen}^2 x$

En los ejercicios 95 a 98, utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la segunda derivada de la función.

95. $f(t) = \dfrac{t}{(1-t)^2}$ **96.** $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^2+1}$

97. $g(\theta) = \tan 3\theta - \operatorname{sen}(\theta - 1)$ **98.** $h(x) = x\sqrt{x^2-1}$

99. ***Refrigeración*** La temperatura T de los alimentos colocados en un congelador es

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

donde t es el tiempo en horas. Calcular el ritmo de cambio de T con respecto a t en cada uno de los siguientes tiempos:

a) $t = 1$ *b*) $t = 3$ *c*) $t = 5$ *d*) $t = 10$

100. ***Flujo de fluidos*** La velocidad de salida v de un líquido que fluye por el orificio que se encuentra en la parte inferior de un tanque está dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad (32 pies por segundo al cuadrado) y h es la profundidad del líquido dentro del tanque. Encontrar el ritmo de cambio de v con respecto a h cuando *a*) $h = 9$ y *b*) $h = 4$. (Observar que $g = +32$ pies por segundo al cuadrado. El signo g depende de cómo se modele el problema. En este caso, considerar una g negativa produciría un valor imaginario para v.)

En los ejercicios 101 a 106, utilizar la derivación implícita para encontrar *dy/dx*.

101. $x^2 + 3xy + y^3 = 10$ **102.** $x^2 + 9y^2 - 4x + 3y = 0$

103. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 16$ **104.** $y^2 = (x-y)(x^2+y)$

105. $x \operatorname{sen} y = y \cos x$ **106.** $\cos(x+y) = x$

En los ejercicios 107 y 108, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Utilizar una computadora para representar gráficamente la ecuación, la recta tangente y la normal.

107. $x^2 + y^2 = 20, \quad (2, 4)$ **108.** $x^2 - y^2 = 16, \quad (5, 3)$

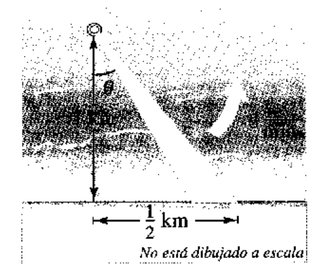
109. Un punto se mueve sobre la curva $y = \sqrt{x}$ de manera tal que el valor en y aumenta con un ritmo de dos unidades por segundo. ¿A qué ritmo cambia x en cada uno de los siguientes valores?

a) $x = \frac{1}{2}$ *b*) $x = 1$ *c*) $x = 4$

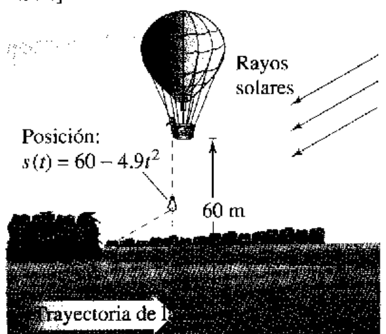
110. ***Superficie*** Las aristas de un cubo se expanden a un ritmo de 5 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo cambia el área de su superficie cuando sus aristas tienen 4.5 centímetros?

111. ***Profundidad*** La sección transversal de un canal de 5 metros es un trapezoide isósceles con base menor de dos metros, base mayor de tres metros y una altura de dos metros. El agua corre por el canal a un ritmo de un metro cúbico por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el nivel del agua cuando ésta tiene un metro de profundidad?

112. ***Velocidad lineal y angular*** Un faro giratorio se localiza a 1 kilómetro en línea recta de una playa (ver figura). Si el faro gira a un ritmo de tres revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad parece moverse el haz de luz (en kilómetros por hora) para un espectador que se encuentra a medio kilómetro sobre la playa?



113. ***Sombra en movimiento*** Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de 30 grados (vea la figura). Encontrar el ritmo al que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros. [*Sugerencia:* La posición del costal está dada por $s(t) = 60 - 4.9t^2$.]



SP Solución de problemas

1. Tomando en cuenta la gráfica de la parábola $y = x^2$:

   a) Encuentre el radio r del círculo más grande posible centrado sobre el eje x que es tangente a la parábola en el origen, como se muestra en la figura. Este círculo se denomina el **círculo de curvatura** (ver la sección 12.5). Encontrar la ecuación de este círculo. Utilizar una calculadora para representar gráficamente el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

   b) Encontrar el centro $(0, b)$ del círculo con radio 1 centrado sobre el eje y que es tangente a la parábola en dos puntos, como se muestra en la figura. Encontrar la ecuación de este círculo. Utilizar una computadora para representar gráficamente el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

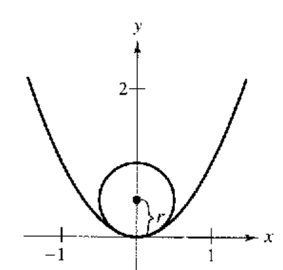


Figura para 1*a*

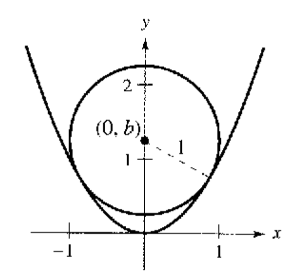


Figura para 1*b*

2. Representar gráficamente las dos parábolas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 5$ en el mismo plano cartesiano. Encontrar las ecuaciones de las dos rectas igualmente tangentes a ambas parábolas.

3. *a)* Encontrar el polinomio $P_1(x) = a_0 + a_1x$ cuyo valor y pendiente concuerdan con el valor y la pendiente de $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$.

   b) Encontrar el polinomio $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ cuyo valor y primeras dos derivadas concuerdan con el valor y las dos primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$. Este polinomio se denomina **polinomio de Taylor** de segundo grado de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$.

   c) Completar la tabla comparando los valores de f y P_2. ¿Qué es lo que se observa?

x	−1.0	−0.1	−0.001	0	0.001	0.1	1.0
$\cos x$							
$P_2(x)$							

   d) Encontrar el polinomio de Taylor de tercer grado de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.

4. *a)* Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

   b) Encontrar la ecuación de la recta normal a $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$. (La recta normal es perpendicular a la tangente.) ¿Dónde corta esta recta a la parábola por segunda vez?

   c) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $y = x^2$ en el punto $(0, 0)$.

   d) Demostrar que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$ sobre la parábola $y = x^2$, la recta normal corta a la gráfica una segunda vez.

5. Encontrar un polinomio de tercer grado $p(x)$ tangente a la recta $y = 14x - 13$ en el punto $(1, 1)$, y tangente a la recta $y = -2x - 5$ en el punto $(-1, -3)$.

6. Encontrar la función de la forma $f(x) = a + b \cos cx$ tangente a la recta $y = 1$ en el punto $(0, 1)$ y tangente a la recta

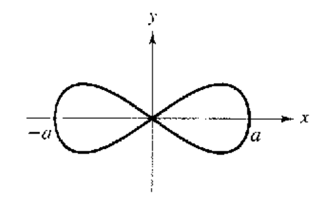
$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

7. La gráfica de la **curva ocho**, en forma de pera,

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2),\ a \neq 0,$$

es la siguiente



   a) Explicar cómo podría utilizar una computadora para representar gráficamente esta curva.

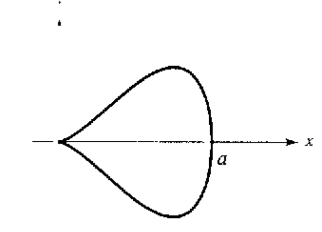
   b) Utilizar una computadora para representar gráficamente la curva para diversos valores de la constante a. Describir cómo influye en la forma de la curva.

   c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

8. La gráfica de la **curva cuártica**, en forma de pera,

$$b^2y^2 = x^3(a - x),\ a, b > 0,$$

es la siguiente



   a) Explicar cómo podría utilizar una computadora para representar gráficamente esta curva.

   b) Utilizar una computadora para representar gráficamente la curva para diversos valores de las constantes a y b. Describir cómo influyen en la forma de la curva.

   c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

9. Un hombre que mide seis pies de estatura camina a un ritmo de 5 pies por segundo hacia una farola del alumbrado público que tiene 30 pies de altura (ver figura). Su hijo, que mide 3 pies, le sigue a la misma velocidad pero 10 pies detrás de él. Por momentos, la sombra que queda detrás del niño es la producida por el hombre, y en otros, es la del niño.

a) Suponiendo que el hombre está a 90 pies de la farola, demostrar que su sombra se proyecta tras del niño.

b) Suponiendo que el hombre está a 60 pies de la farola, demostrar que la sombra del niño se extiende más allá de la del hombre.

c) Determinar la distancia d desde el hombre hasta la farola en la que los bordes de ambas sombras están exactamente a la misma distancia de la farola.

d) Determinar a qué velocidad se mueve el borde de la sombra en función de x, la distancia entre el hombre y la farola. Analizar la continuidad de esta función de velocidad de la sombra.

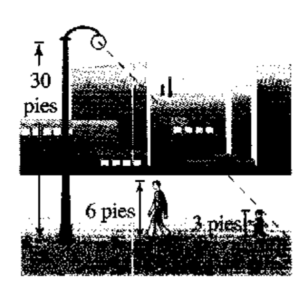


Figura para 9

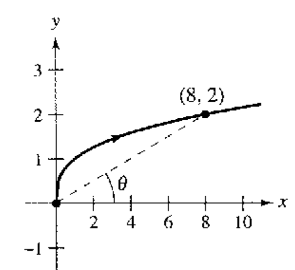


Figura para 10

10. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ (ver figura). Cuando $x = 8$, la componente y de su posición aumenta con un ritmo de un centímetro por segundo.

a) ¿A qué velocidad se modifica la componente x en este momento?

b) ¿A qué velocidad se modifica la distancia desde el origen en este momento?

c) ¿A qué velocidad cambia el ángulo de inclinación θ en este momento?

11. Sea L una función derivable para todo x. Demostrar que si $L(a + b) = L(a) + L(b)$ para todo a y b, entonces $L'(x) = L'(0)$ para todo x. ¿A qué se parece la gráfica de L?

12. Sea E una función que satisface $E(0) = E'(0) = 1$. Demostrar que si $E(a + b) = E(a)E(b)$ para todo a y b, entonces E es derivable y $E'(x) = E(x)$ para todo x. Encontrar un ejemplo de una función que satisfaga $E(a + b) = E(a)E(b)$.

13. El límite fundamental $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ supone que x se mide en radianes. ¿Qué sucede si x se midió en grados en vez de radianes?

a) Configurar su computadora en modo *degree* y completar la tabla.

z (en grados)	0.1	0.01	0.0001
$\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$			

b) Utilizar la tabla para estimar

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

para z en grados. ¿Cuál es el valor exacto de este límite? (*Sugerencia:* $180° = \pi$ radianes).

c) Utilizar la definición por límite de la derivada para encontrar

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z$$

para z en grados.

d) Definir las nuevas funciones $S(z) = \operatorname{sen}(cz)$ y $C(z) = \cos(cz)$, donde $c = \pi/180°$. Encontrar $S(90)$ y $C(180)$. Utilizar la regla de la cadena para calcular

$$\frac{d}{dz} S(z).$$

e) Explicar por qué el cálculo es más sencillo utilizando radianes en lugar de grados.

14. Un astronauta que está en la Luna lanza una roca. El peso de dicha roca es

$$s = -\frac{27}{10}t^2 + 27t + 6$$

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) Encontrar expresiones para la velocidad y aceleración de la roca.

b) Encontrar el tiempo en que la roca está en su punto más alto calculando el tiempo en el que la velocidad es igual a 0. ¿Cuál es la altura de la roca en este momento?

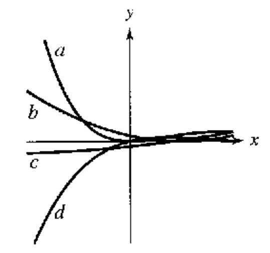
c) ¿Cómo se compara la aceleración de la roca con la aceleración de la gravedad de la Tierra?

15. Si a es la aceleración de objeto, la *variación de la aceleración* j se define como $j = a'(t)$.

a) Utilizar esta definición para elaborar una interpretación física de j.

b) Encontrar j para el vehículo que se menciona en el ejercicio 117 de la sección 2.3 e interpretar el resultado.

c) En la figura se muestra la gráfica de las funciones de posición, velocidad, aceleración y variación de la aceleración de un vehículo. Identificar cada gráfica y explicar el razonamiento.



Aplicaciones de la derivada

Cuando un soplador de vidrio saca una "gota" incandescente de vidrio fundido de un horno, la temperatura de la misma es casi de 1 700° F. Al principio, el vidrio fundido se enfría con rapidez. Luego, conforme la temperatura del vidrio se acerca a la temperatura ambiente, el enfriamiento es más y más lento. La temperatura del vidrio ¿se hará realmente igual a la del ambiente? ¿Por qué?

www.shawnolson.net/a/507

Sección 3.1 Extremos en un intervalo

- **Entender la definición de extremos de una función en un intervalo.**
- **Entender la definición de extremos relativos de una función en un intervalo abierto.**
- **Encontrar los extremos en un intervalo cerrado.**

Extremos de una función

En el cálculo, se dedica mucho esfuerzo para determinar el comportamiento de una función f sobre un intervalo f. ¿f tiene un valor máximo en f? ¿Tiene un valor mínimo? ¿Dónde es creciente la función? ¿Dónde es decreciente? En este capítulo se verá cómo las derivadas se utilizan para responder estas preguntas. También por qué los planteamientos anteriores son importantes en las aplicaciones de la vida real.

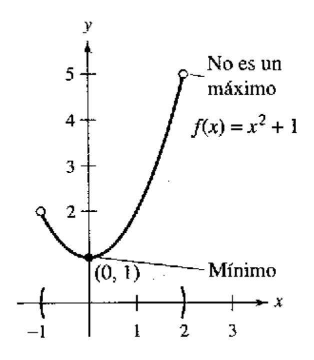
a) f es continua, $[-1, 2]$ es cerrado

Definición de extremos

Sea f definida sobre un intervalo f que contiene a c.

1. $f(c)$ es el **mínimo de f en I** si $f(c) \le f(x)$ para toda x en I.
2. $f(c)$ es el **máximo de f en I** si $f(c) \ge f(x)$ para toda x en I.

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **valores extremos** o simplemente **extremos**, de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** en el intervalo.

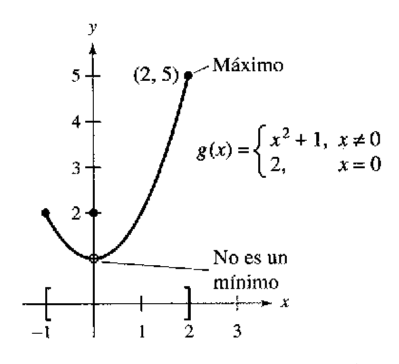


b) f es continua, $(-1, 2)$ es abierto

Una función no siempre tiene un mínimo o un máximo en un intervalo. Por ejemplo, en la figura 3.1*a* y *b*, es posible ver que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo cerrado $[-1, 2]$, pero no tiene un máximo en el intervalo abierto $(-1, 2)$. Además, en la figura 3.1*c* se observa que la continuidad (o la falta de la misma) puede afectar a la existencia de un extremo en un intervalo. Esto sugiere el siguiente teorema. (Aunque el teorema de los valores extremos es intuitivamente plausible, la prueba del mismo no se encuentra dentro del objetivo de este libro.)

TEOREMA 3.1 El teorema del valor extremo

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.



c) g no es continua, $[-1, 2]$ es cerrado.

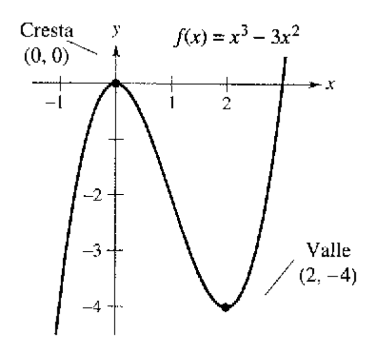
Los extremos pueden encontrarse en puntos interiores o en puntos terminales de un intervalo. Los extremos que se presentan en puntos terminales se denominan **extremos terminales**

Figura 3.1

Determinación de los valores mínimo y máximo El teorema del valor extremo (al igual que el teorema del valor intermedio) es un *teorema de existencia* porque indica la existencia de valores mínimo y máximo, pero no muestra cómo determinarlos. Emplear la función para valores extremos de una herramienta gráfica con el fin de encontrar los valores mínimo y máximo de cada una de las siguientes funciones. En cada caso, ¿los valores de x son exactos o aproximados? Explicar.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$



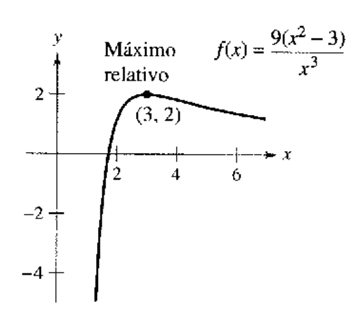
f tiene un máximo relativo en (0, 0) y un mínimo relativo en (2, −4)
Figura 3.2

Extremos relativos y puntos o números críticos

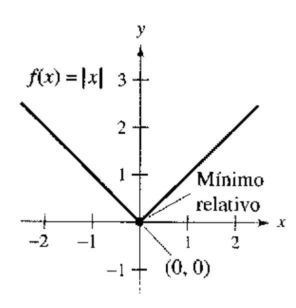
En la figura 3.2, la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$ tiene un **máximo relativo** en el punto (0, 0) y un **mínimo relativo** en el punto (2, −4). De manera informal, es posible que se piense que un máximo relativo ocurre en una "cima" de la gráfica. Y que un mínimo relativo se presenta en un "valle" en la gráfica. Tales cimas y valles pueden ocurrir de dos maneras. Si la cima (o valle) es suave y redondeada, la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto alto (o punto bajo). Si la cima (o valle) es angosta y picuda, la gráfica representa una función que no es diferenciable en el punto alto (o punto bajo).

Definición de extremos relativos

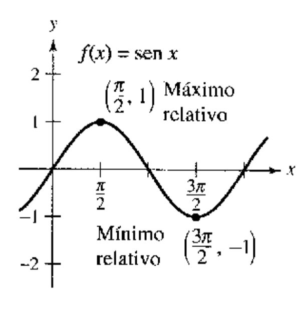
1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **máximo relativo en $(c, f(c))$.**
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **mínimo relativo en $(c, f(c))$.**



a) $f(3) = 0$



b) $f'(0)$ no existe



c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
Figura 3.3

El ejemplo 1 examina las derivadas de una función en extremos relativos *dados*. (Se habla bastante acerca de la *determinación* de los extremos relativos de una función en la sección 3.3.)

EJEMPLO 1 El valor de la derivada en los extremos relativos

Encontrar el valor de la derivada en cada uno de los extremos relativos que se ilustran en la figura 3.3.

Solución

a) La derivada de $f(x) = \dfrac{9(x^2-3)}{x^3}$ es

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - (9)(x^2-3)(3x^2)}{(x^3)^2} \qquad \text{Derivar utilizando la regla del cociente.}$$

$$= \frac{9(9-x^2)}{x^4}. \qquad \text{Simplificar}$$

En el punto (3, 2), el valor de la derivada es $f'(3) = 0$) [ver la figura 3.3*a*].

b) En $x = 0$, la derivada de $f(x) = |x|$ *no existe* debido a que difieren los siguientes límites unilaterales [ver la figura 3.3*b*].

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{Límite desde la izquierda.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{Límite desde la derecha.}$$

c) La derivada de $f(x) = \text{sen } x$ es

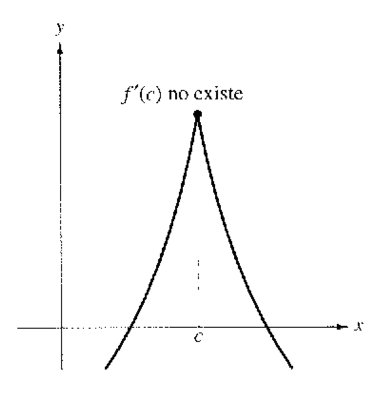
$$f'(x) = \cos x.$$

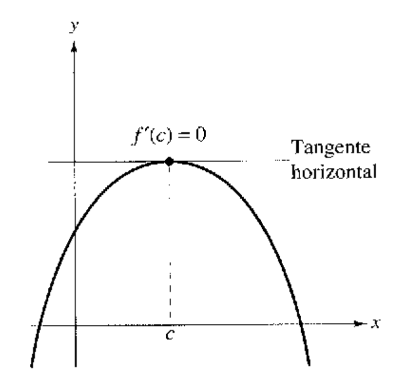
En el punto $(\pi/2, 1)$, el valor de la derivada es $f'(\pi/2,) = \cos(\pi/2) = 0$. En el punto $(3\pi/2, -1)$, el valor de la derivada es $f'(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$ [ver la figura 3.3*c*].

Nótese que en el ejemplo 1 en los extremos relativos la derivada es cero o no existe. Los valores de x en estos puntos especiales reciben el nombre de **puntos críticos**. La figura 3.4 ilustra los dos tipos de números críticos.

Definición de un número o punto crítico

Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un **punto crítico** de f.1





c es un punto crítico de f
Figura 3.4

TEOREMA 3.2 Los extremos relativos ocurren sólo en números o puntos críticos

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

PIERRE DE FERMAT (1601-1665)

Para Fermat, que estudió abogacía, las matemáticas eran más una afición que una profesión. Sin embargo, Fermat realizó muchas contribuciones a la geometría analítica, la teoría de números, el cálculo y la probabilidad. En cartas a sus amigos, escribió muchas de las ideas fundamentales del cálculo, bastante antes de Newton o Leibniz. Por ejemplo, el teorema a la derecha algunas veces se atribuye a Fermat.

Demostración

Caso 1: Si f *no* es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema es válido.

Caso 2: Si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c)$ debe ser positiva, negativa o 0. Suponer que $f'(c)$ es positiva. Entonces

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

lo cual implica que existe un intervalo (a, b) que contiene a c de modo tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \text{ para todo } x \neq c \text{ en } (a, b).$$ [Véase ejercicio 72*b* sección 1.2.]

Como este cociente es positivo, los signos en el denominador y el numerador deben coincidir. Lo anterior produce las siguientes desigualdades para los valores de x en el intervalo (a, b).

Izquierda de c: $x < c$ y $f(x) < f(c)$ $\Rightarrow$ $f(c)$ no es un mínimo relativo

Derecha de c: $x > c$ y $f(x) > f(c)$ $\Rightarrow$ $f(c)$ no es un máximo relativo

De tal modo, la suposición de que $f'(c) > 0$ contradice la hipótesis de que $f(c)$ es un extremo relativo. Suponiendo que $f'(c) < 0$ produce una contradicción similar, sólo queda una posibilidad, a saber, $f'(c) = 0$. En consecuencia, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema resulta válido. ∎

Determinación de extremos en un intervalo cerrado

El teorema 3.2 señala que los extremos relativos de una función *sólo* pueden ocurrir en los puntos críticos de la función. Sabiendo lo anterior, se pueden utilizar las siguientes estrategias para determinar los extremos en un intervalo cerrado.

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado

Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b).
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b).
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$.
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Los siguientes tres ejemplos muestran cómo aplicar estas estrategias. Asegurarse de ver que la determinación de los puntos críticos de la función sólo es una parte del procedimiento. La evaluación de la función en los puntos críticos y los puntos extremos o terminales corresponden a la otra parte.

EJEMPLO 2 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

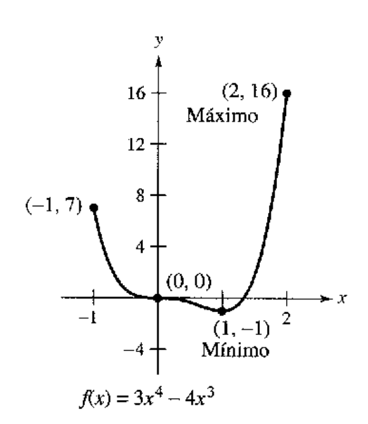
Determinar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución Se empieza derivando la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \qquad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \qquad \text{Derivar.}$$

Para determinar los puntos críticos de f, se necesitan encontrar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ y todos los valores de x para los cuales $f'(x)$ no existe.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$12x^2(x - 1) = 0 \qquad \text{Factor.}$$
$$x = 0, 1 \qquad \text{Números críticos.}$$

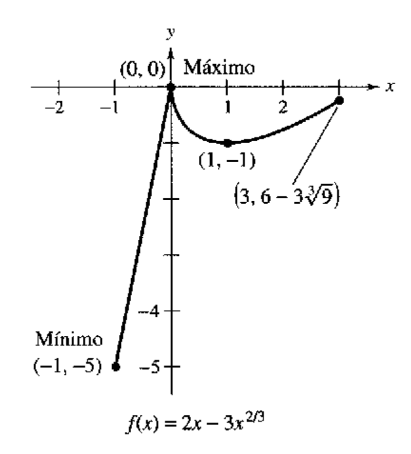


En el intervalo cerrado $[-1, 2]$, f tiene un mínimo en $(1, -1)$ y un máximo en $(2, 16)$
Figura 3.5

Debido a que f' se define para todo x, es posible concluir que estos números son los únicos puntos críticos de f. Al evaluar f en estos dos puntos críticos y en los puntos extremos de $[-1, 2]$, es posible determinar que el máximo es $f(2) = 16$ y el mínimo corresponde a $f(1) = -1$, como se muestra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.5.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$ Mínimo	$f(2) = 16$ Máximo

En la figura 3.5 nótese que el punto crítico $x = 0$ no produce un mínimo relativo o un máximo relativo. Esto indica que el recíproco del teorema 3.2 no es válido. En otras palabras, *los números críticos de una función no necesitan producir extremos relativos.*



En el intervalo cerrado $[-1, 3]$, f tiene un mínimo en $(-1, -5)$ y un máximo en $(0, 0)$
Figura 3.6

EJEMPLO 3 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos de $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 3]$.

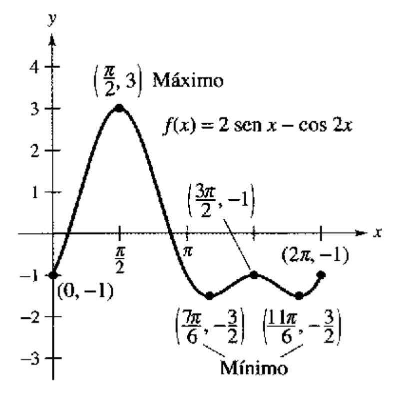
Solución Se empieza diferenciando la función.

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = 2\left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

A partir de esta derivada, es posible advertir que la función tiene dos puntos críticos en el intervalo $[-1, 3]$. El número 1 es crítico porque $f'(1) = 0$, y el punto 0 es un punto crítico debido a que $f'(0)$ no existe. Al evaluar f en estos dos números y en los puntos extremos del intervalo, se puede concluir que el mínimo es $f(-1) = -5$ y el máximo, $f(0) = 0$, como se indica en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.6.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$



En el intervalo cerrado, $[0, 2\pi]$, f tiene dos mínimos en $(7\pi/6, -3/2)$ y $(11\pi/6, -3/2)$ y un máximo en $(\pi/2, 3)$
Figura 3.7

EJEMPLO 4 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos de $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución Esta función es derivable para todo x real, por lo que es posible determinar todos los puntos críticos derivándola e igualando $f'(x)$ a cero, como se indica.

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$2 \cos x + 4 \cos x \operatorname{sen} x = 0 \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \cos x \operatorname{sen} x.$$

$$2(\cos x)(1 + 2 \operatorname{sen} x) = 0 \qquad \text{Factor.}$$

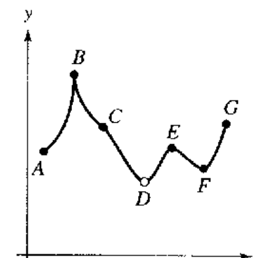
En el intervalo $[0, 2\pi]$, el factor $\cos x$ es cero cuando $x = \pi/2$ y cuando $x = 3\pi/2$. El factor $(1 + 2 \operatorname{sen} x)$ es cero cuando $x = 7\pi/6$ y cuando $x = 11\pi/6$. Al evaluar f en estos cuatro números críticos y en los puntos extremos del intervalo, se concluye que el máximo es $f(\pi/2) = 3$ y que el mínimo se presenta en *dos* puntos, $f(7\pi/6) = -3/2$ y $f(11\pi/6) = -3/2$, como se indica en la tabla. La gráfica se muestra en la figura 3.7.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(0) = -1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ Máximo	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f(2\pi) = -1$

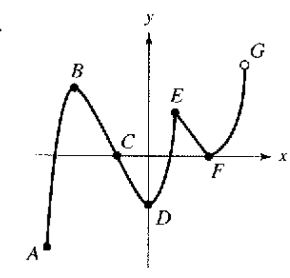
Ejercicios de la sección 3.1

En los ejercicios 1 y 2, decidir si cada punto indicado es un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo relativo o cualesquiera de los dos.

1.

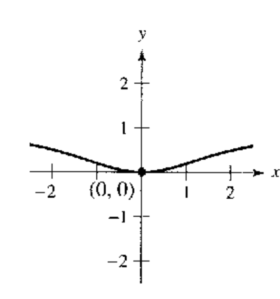


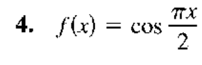
2.

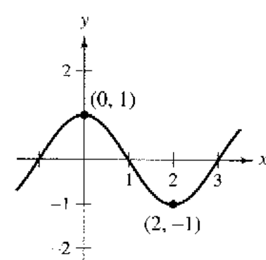


En los ejercicios 3 a 8, determinar el valor de la derivada (si ésta existe) en cada extremo indicado.

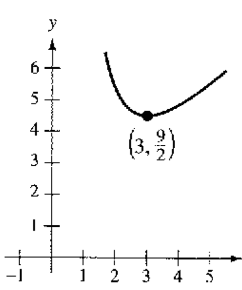
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

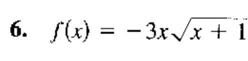


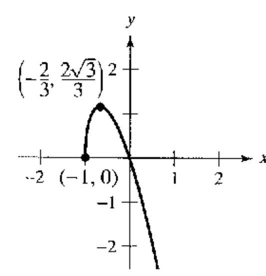
4.  $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$



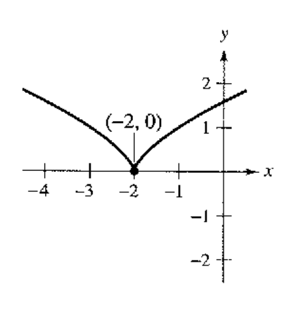
5. $f(x) = x + \dfrac{27}{2x^2}$



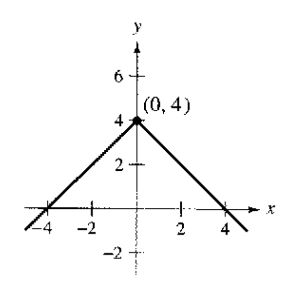
6.  $f(x) = -3x\sqrt{x+1}$



7. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

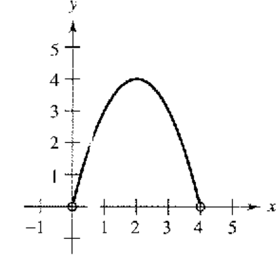


8. $f(x) = 4 - |x|$

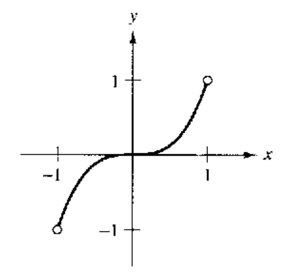


En los ejercicios 9 a 12, aproximar los puntos críticos de la función que se muestra en la gráfica. Determinar si la función tiene un máximo relativo, mínimo relativo, máximo absoluto, mínimo absoluto o ninguno de éstos en cada número crítico sobre el intervalo indicado.

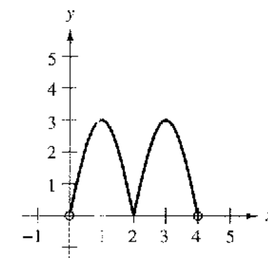
9.



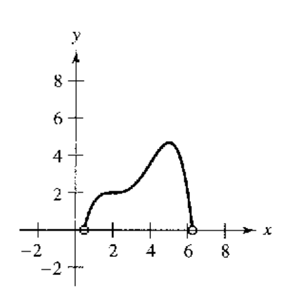
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 18, determinar cualesquiera de los puntos críticos de la función.

13. $f(x) = x^2(x - 3)$

14. $g(x) = x^2(x^2 - 4)$

15. $g(t) = t\sqrt{4 - t}, \ t < 3$

16. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

17. $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$
$0 < x < 2\pi$

18. $f(\theta) = 2 \sec \theta + \tan \theta$
$0 < \theta < 2\pi$

En los ejercicios 19 a 36, ubicar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado.

19. $f(x) = 2(3 - x), \ [-1, 2]$

20. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{3}, \ [0, 5]$

21. $f(x) = -x^2 + 3x, \ [0, 3]$

22. $f(x) = x^2 + 2x - 4, \ [-1, 1]$

23. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2, \ [-1, 2]$

24. $f(x) = x^3 - 12x, \ [0, 4]$

25. $y = 3x^{2/3} - 2x, \ [-1, 1]$

26. $g(x) = \sqrt[3]{x}, \ [-1, 1]$

27. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3}, \ [-1, 1]$

28. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \ [-2, 2]$

29. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2}, \ [0, 1]$

30. $h(t) = \dfrac{t}{t - 2}, \ [3, 5]$

31. $y = 3 - |t - 3|, [-1, 5]$

32. $f(x) = [\![x]\!], [-2, 2]$

33. $f(x) = \cos \pi x, \ \left[0, \dfrac{1}{6}\right]$

34. $g(x) = \sec x, \ \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

35. $y = \dfrac{4}{x} + \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right), \ [1, 2]$

36. $y = x^2 - 2 - \cos x, \ [-1, 3]$

En los ejercicios 37 a 40, localizar los extremos absolutos de la función (si existen) sobre cada intervalo.

37. $f(x) = 2x - 3$
 a) $[0, 2]$ b) $[0, 2)$
 c) $(0, 2]$ d) $(0, 2)$

38. $f(x) = 5 - x$
 a) $[1, 4]$ b) $[1, 4)$
 c) $(1, 4]$ d) $(1, 4)$

39. $f(x) = x^2 - 2x$
 a) $[-1, 2]$ b) $(1, 3]$
 c) $(0, 2)$ d) $[1, 4)$

40. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
 a) $[-2, 2]$ b) $[-2, 0)$
 c) $(-2, 2)$ d) $[1, 2)$

En los ejercicios 41 a 44, dibujar la gráfica de la función. Luego localizar los extremos absolutos de la misma sobre el intervalo indicado.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2, & 1 < x \le 3 \end{cases}$, $[0, 3]$

42. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & 1 \le x < 3 \\ 2 - 3x, & 3 \le x \le 5 \end{cases}$, $[1, 5]$

43. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$, $(1, 4]$

44. $f(x) = \dfrac{2}{2 - x}$, $[0, 2)$

En los ejercicios 45 y 46, utilizar una calculadora para representar gráficamente la función. Localizar después los extremos absolutos de la función sobre el intervalo dado.

45. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1$, $[-1, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{x} + \cos\dfrac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$

En los ejercicios 47 y 48, *a*) usar un sistema de álgebra por computadora para representar la función y aproximar cualesquiera extremos absolutos sobre el intervalo dado. *b*) Utilizar la calculadora para determinar cualesquiera puntos críticos y emplear éstos para encontrar todos los extremos absolutos no ubicados en los puntos extremos o terminales. Comparar los resultados con los del apartado *a*).

47. $f(x) = 3.2x^5 + 5x^3 - 3.5x$, $[0, 1]$

48. $f(x) = \dfrac{4}{3}x\sqrt{3 - x}$, $[0, 3]$

En los ejercicios 49 y 50, utilizar un sistema de álgebra por computadora para encontrar el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo cerrado. (Este valor se usa en la estimación del error para la regla del trapecio, como se explica en la sección 4.6.)

49. $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$, $[0, 2]$

50. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$

En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema de álgebra por computadora para determinar el valor máximo de $|f^4(x)|$ en el intervalo cerrado. (Este valor se emplea en la estimación del error correspondiente a la regla de Simpson, como se explica en la sección 4.6.)

51. $f(x) = (x + 1)^{2/3}$, $[0, 2]$

52. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $[-1, 1]$

Desarrollo de conceptos

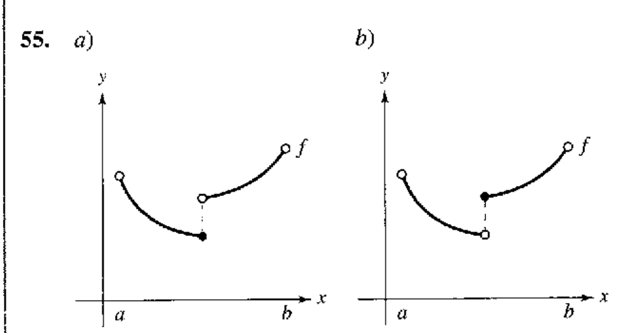
En los ejercicios 53 y 54, la gráfica de una función sobre el intervalo $[-2, 5]$ tiene las siguientes características.

53. Máximo absoluto en $x = -2$, mínimo absoluto en $x = 1$, máximo relativo en $x = 3$

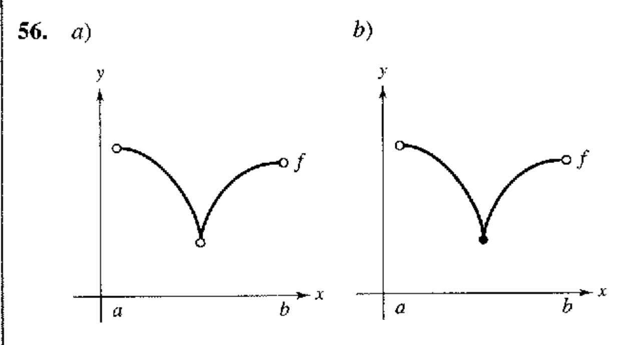
54. Mínimo relativo en $x = -1$, número crítico en $x = 0$, pero ningún extremo, máximo absoluto en $x = 2$, mínimo absoluto en $x = 5$

En los ejercicios 55 a 58, determinar a partir de la gráfica si *f* tiene un mínimo en el intervalo abierto (a, b).

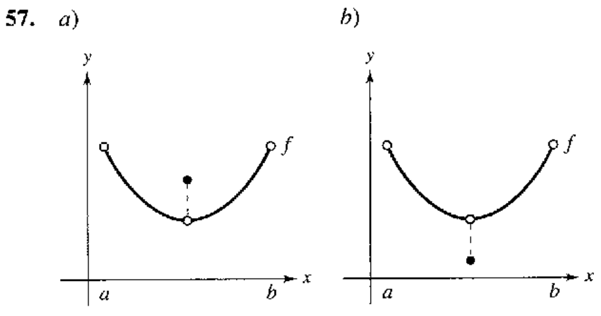
55. a) b)



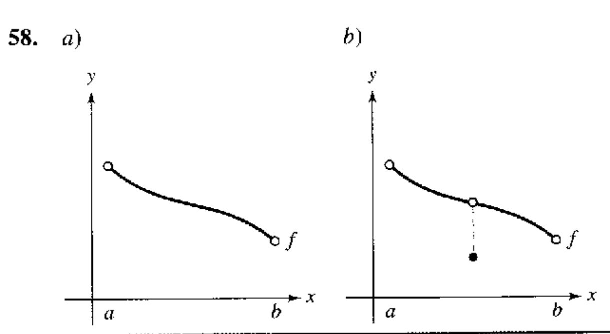
56. a) b)



57. a) b)



58. a) b)



59. ***Potencia*** La fórmula para la salida de potencia P de una batería es $P = VI - RI^2$, donde V es la fuerza electromotriz en volts. R es la resistencia e I es la corriente. Determinar la corriente (medida en amperes) que corresponde a un valor máximo de P en una batería para la cual $V = 12$ volts y $R = 0.5$ ohms. Suponer que un fusible de 15 amperes enlaza la salida en el intervalo $0 \leq I \leq 15$. ¿Podría aumentarse la salida de potencia sustituyendo el fusible de 15 amperes por uno de 20 amperes? Explicar.

60. ***Costo del inventario*** Un minorista ha determinado que el costo C de compra y almacenamiento de x unidades de un producto es

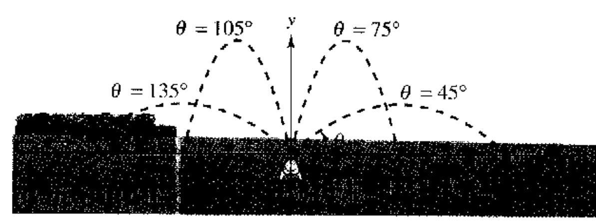
$$C = 2x + \frac{300\,000}{x}, \quad 1 \leq x \leq 300.$$

El camión repartidor puede llevar a lo sumo 300 unidades por pedido. Determinar el tamaño del pedido que minimizará el costo. ¿Podría disminuirse el costo si el camión se sustituyera por uno que pudiera llevar como máximo 400 unidades? Explicar.

61. ***Aspersor giratorio para césped*** Un aspersor giratorio para césped se construye de manera tal que $d\theta/dt$ es constante, donde θ varía entre 45° y 135° (ver la figura). La distancia que el agua recorre horizontalmente es

$$x = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}, \quad 45° \leq \theta \leq 135°$$

donde v es la velocidad del agua. Determinar dx/dt y explicar por qué este aspersor no rocía de manera uniforme. ¿Qué parte del césped recibe la mayor cantidad de agua?



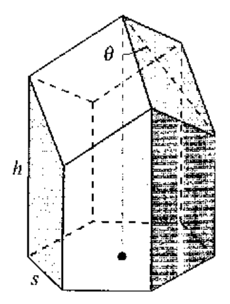
Aspersor de agua: $45° \leq \theta \leq 135°$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de "cálculo de un aspersor de riego para césped" consultar el artículo "Design of an Oscillating Sprinkler" de Bart Braden en *Mathematics Magazine*.

62. ***Panal*** El área de la superficie de una celda de un panal es

$$S = 6hs + \frac{3s^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

donde h y s son constantes positivas y θ es el ángulo al cual las caras superiores alcanzan la altura de la celda (ver la figura).



Encontrar el ángulo θ $(\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2)$ que minimiza el área superficial S.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de la estructura geométrica de una celda de un panal, consultar el artículo "The Design of Honeycombs" de Anthony L. Peressini en UMAP Módulo 502, publicado por COMAP, Inc., Suite 210, 57 Bedford Street, Lexington, M.A.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 66, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre la falsedad.**

63. El máximo de una función que es continua en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores diferentes en el intervalo.

64. Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces debe tener un mínimo en el intervalo.

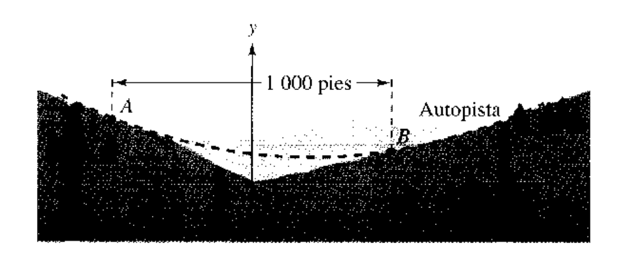
65. Si $x = c$ es un punto crítico de la función f, entonces también es un número crítico de la función $g(x) = f(x) + k$, donde k es una constante.

66. Si $x = c$ es un punto crítico de la función f, entonces también es un número crítico de la función $g(x) = f(x - k)$, donde k es una constante.

67. Sea la función f derivable en un intervalo I que contiene c. Si f tiene un valor máximo en $x = c$, demostrar que $-f$ tiene un valor mínimo en $x = c$.

68. Considerar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$. Demostrar que f puede tener uno, dos o ningún punto crítico y dar un ejemplo de cada caso.

69. ***Diseño de una autopista*** Para construir una autopista, es necesario rellenar una parte de un valle donde los declives (pendientes) son de 9 y 6% (ver la figura). La parte superior de la región rellenada tendrá la forma de un arco parabólico que es tangente a las dos pendientes en los puntos A y B. La distancia horizontal entre los puntos A y B es 1 000 pies.



a) Determinar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $-500 \leq x \leq 500$ que describa la parte superior de la región rellenada.

b) Construir una tabla en la que se indiquen las profundidades del relleno para $x = -500, -400, -300, -200, -100, 0, 100, 200, 300, 400$ y 500.

c) ¿Cuál será el punto más bajo de la autopista terminada? ¿Estará directamente sobre el punto donde se juntan los dos declives?

Sección 3.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio

- **Comprender el uso del teorema de Rolle.**
- **Comprender el uso del teorema del valor medio.**

Teorema de Rolle

El teorema del valor extremo (sección 3.1) establece que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe tener tanto un mínimo como un máximo en el intervalo. Ambos valores, sin embargo, pueden ocurrir en los puntos extremos. El **teorema de Rolle**, nombrado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), proporciona las condiciones que garantizan la existencia de un valor extremo en el *interior* de un intervalo cerrado.

TEOREMA DE ROLLE
Michel Rolle, matemático francés, fue el primero en publicar en 1691 el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, antes de ese tiempo Rolle fue uno de los más severos críticos del cálculo, señalando que éste proporcionaba resultados erróneos y se basaba en razonamientos infundados. Posteriormente Rolle se dio cuenta de la utilidad del cálculo.

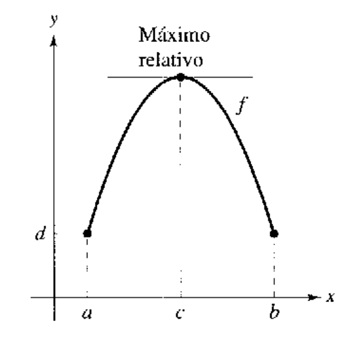
Valores extremos en un intervalo cerrado **Dibujar un plano de coordenadas rectangular en un pedazo de papel. Marcar los puntos (1, 3) y (5, 3). Utilizando un lápiz o una pluma, dibujar la gráfica de una función derivable f que empieza en (1, 3) y termina en (5, 3). ¿Existe al menos un punto sobre la gráfica para el cual la derivada sea cero? ¿Sería posible dibujar la gráfica de manera que no hubiera un punto para el cual la derivada es cero? Explicar el razonamiento.**

TEOREMA 3.3 Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si

$$f(a) = f(b)$$

entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



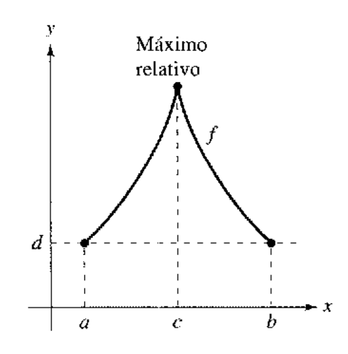
a) f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

Demostración Sea $f(a) = d = f(b)$.

Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en el intervalo y, por el teorema 2.2, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Caso 2: Suponer que $f(x) > d$ para algún x en (a, b). Por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo en algún punto c en el intervalo. Además, como $f(c) > d$, este máximo no puede estar en los puntos terminales. De tal modo, f tiene un máximo en el intervalo *abierto* (a, b). Esto implica que $f(c)$ es un máximo *relativo* y por el teorema 3.2, c es un número crítico de f. Por último, como f es derivable en c, es posible concluir que $f'(c) = 0$.

Caso 3: Si $f(x) < d$ para algún x en (a, b), se puede utilizar un argumento similar al del caso 2, pero implicando el mínimo en vez del máximo.



b) f es continua en $[a, b]$
Figura 3.8

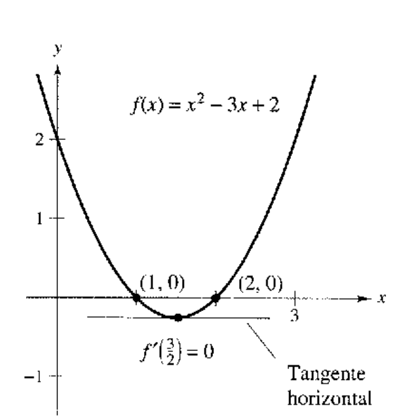
De acuerdo con el teorema de Rolle, puede verse que si una función f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, debe existir al menos un valor x entre a y b en el cual la gráfica de f tiene una tangente horizontal, como se muestra en la figura 3.8*a*. Si se elimina el requerimiento de derivabilidad del teorema de Rolle, f seguirá teniendo un número crítico en (a, b), pero quizá no produzca una tangente horizontal. Un caso de este tipo se presenta en la figura 3.8*b*.

EJEMPLO 1 Ilustración del teorema de Rolle

Encontrar las dos intersecciones en x de

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones en x.



El valor de x para el cual $f'(x) = 0$ está entre las dos intersecciones con el eje x
Figura 3.9

Solución Advertir que f es derivable en toda la recta real. Igualando a 0 $f(x)$ se obtiene

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a cero.}$$
$$(x - 1)(x - 2) = 0. \qquad \text{Factor.}$$

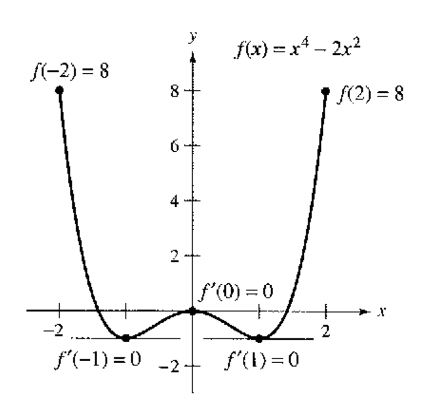
De tal modo, $f(1) = f(2) = 0$, y de acuerdo con el teorema de Rolle se sabe que *existe* al menos una c en el intervalo $(1, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Para *determinar* una c de este tipo, es factible resolver la ecuación

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

y determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{3}{2}$. Advertir que el valor de x se encuentra en el intervalo abierto $(1, 2)$, como se indica en la figura 3.9.

El teorema de Rolle establece que si f satisface las condiciones del teorema, debe haber *al menos* un punto entre a y b en el cual la derivada es 0. Es posible que exista más de un punto de estas características, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Ilustración del teorema de Rolle



$f'(x) = 0$ para más de un valor de x en el intervalo $(-2, 2)$
Figura 3.10

Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Determinar todos los valores de c en el intervalo $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solución Para empezar, advertir que la función satisface las condiciones del teorema de Rolle. Esto es, f es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el intervalo $(-2, 2)$. Además, debido a que $f(-2) = f(2) = 8$, es posible concluir que existe al menos una c en $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Igualando a 0 la derivada, se obtiene

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$4x(x - 1)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factor.}$$
$$x = 0, 1, -1. \qquad \text{Valores de } x \text{ para los cuales } f'(x) \text{ es igual a cero.}$$

De tal modo, en el intervalo $(-2, 2)$, la derivada es cero en valores diferentes de x, como se indica en la figura 3.10.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Una herramienta gráfica puede utilizarse para indicar si los puntos sobre las gráficas de los ejemplos 1 y 2 son mínimos o máximos relativos de las funciones. Sin embargo, al usar una calculadora, se debe tener presente que es posible obtener imágenes o gráficas equivocadas. Por ejemplo, usar una calculadora para graficar

$$f(x) = 1 - (x-1)^2 - \frac{1}{1\,000(x-1)^{1/7} + 1}.$$

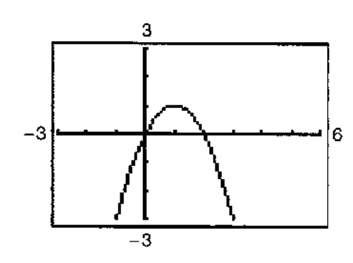


Figura 3.11

Con la mayoría de las ventanas de visión, parece ser que la función tiene un máximo de 1 cuando $x = 1$ (ver la figura 3.11). No obstante al evaluar la función en $x = 1$, se observará que $f(1) = 0$. Para determinar el comportamiento de esta función cerca de $x = 1$, es necesario examinar la gráfica de manera analítica para obtener la imagen completa.

El teorema del valor medio

El teorema de Rolle puede utilizarse para probar otro teorema: el **teorema del valor medio**.

TEOREMA 3.4 El teorema del valor medio

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

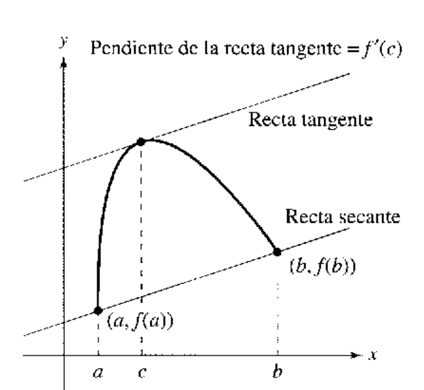


Figura 3.12

Demostración Hacemos refererencia a la figura 3.12. La ecuación de la recta secante que contiene los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$y = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a).$$

Sea $g(x)$ la diferencia entre $f(x)$ y y. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a). \end{aligned}$$

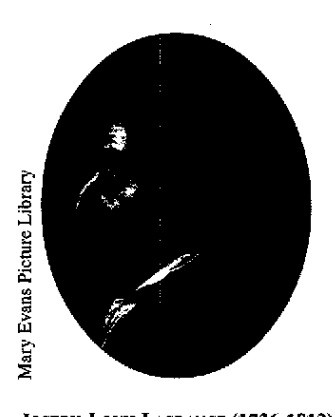
Evaluando g en a y b, se observa que $g(a) = 0 = g(b)$. Como f es continua en $[a, b]$ se sigue que g también es continua en $[a, b]$. Además, en virtud de que f es derivable, g también lo es, y resulta posible aplicar el teorema de Rolle a la función g. Así, existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= g'(c) \\ &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

De tal modo, existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

NOTA El término "medio" en el teorema del valor medio se refiere al ritmo de cambio medio (o promedio) de f en el intervalo $[a, b]$.

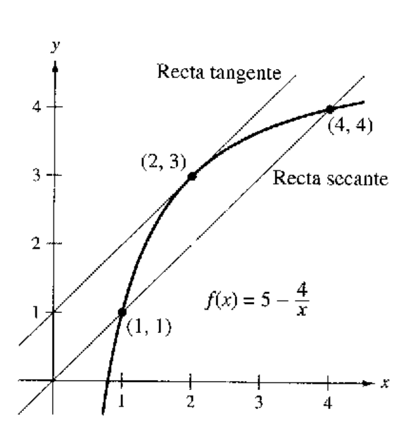


JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)
El teorema del valor medio fue demostrado por primera vez por el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange. Nacido en Italia, Lagrange formó parte de la corte de Federico El Grande en Berlín durante 20 años. Después, se trasladó a Francia, donde se reunió con el emperador Napoleón Bonaparte, quien dijo lo siguiente: "Lagrange es la cúspide de las ciencias matemáticas."

Aunque es posible utilizar el teorema del valor medio de manera directa en la solución de problemas, se usa más a menudo para demostrar otros teoremas. De hecho, algunas personas consideran que éste es el teorema más importante en el cálculo (se relaciona estrechamente con el teorema fundamental del cálculo explicado en el capítulo 4). Por ahora, es posible obtener una idea de la versatilidad de este teorema considerando los resultados planteados en los ejercicios 77-85 de esta sección.

El teorema del valor medio tiene implicaciones para ambas interpretaciones básicas de la derivada. Geométricamente, el teorema garantiza la existencia de una recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, como se indica en la figura 3.12. El ejemplo 3 ilustra esta interpretación geométrica del teorema del valor medio. En términos del ritmo o velocidad de cambio, el teorema del valor medio implica que debe haber un punto en el intervalo abierto (a, b) en el cual el ritmo o velocidad de cambio instantánea es igual al ritmo o velocidad de cambio promedio sobre el intervalo $[a, b]$. Esto se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 3 Determinación de una recta tangente



La recta tangente en (2, 3) es paralela a la línea secante que pasa por (1, 1) y (4, 4)
Figura 3.13

Dada $f(x) = 5 - (4/x)$, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto $(1, 4)$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}.$$

Solución La pendiente de la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$ es

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1.$$

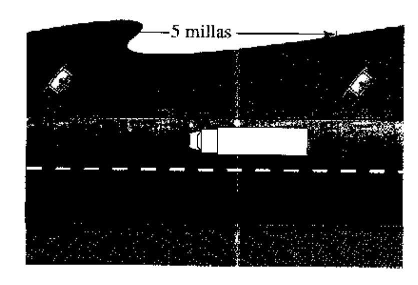
Como f satisface las condiciones del teorema del valor medio, existe al menos un número c en $(1, 4)$ tal que $f'(c) = 1$. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 1$, se obtiene

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} = 1$$

que implica $x = \pm 2$. De tal modo, en el intervalo $(1, 4)$, se puede concluir que $c = 2$, como se indica en la figura 3.13.

EJEMPLO 4 Determinación del ritmo de cambio instantáneo

Dos patrullas estacionadas equipadas con radar se encuentran a 5 millas de distancia sobre una autopista, como se indica en la figura 3.14. Cuando pasa un camión al lado de la primera patrulla, la velocidad de éste se registra en un valor de 55 millas por hora. Cuatro minutos después, cuando el camión pasa al lado de la segunda patrulla, el registro de velocidad corresponde a 50 millas por hora. Demostrar que el camión ha excedido el límite de velocidad (de 55 millas por hora) en algún momento dentro del intervalo de los 4 minutos señalados.



En algún tiempo t, la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio durante los 4 minutos
Figura 3.14

Solución Sea $t = 0$ el tiempo (en horas) cuando el camión pasa al lado de la primera patrulla. El tiempo en el que el camión pasa al lado de la segunda patrulla es

$$t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \text{ hora.}$$

Si $s(t)$ represente la distancia (en millas) recorridas por el camión, se tiene que $s(0) =$ y $s(\frac{1}{15}) = 5$. Por tanto, la velocidad promedio del camión sobre el trecho de cinco millas de autopista es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0}$$
$$= \frac{5}{1/15} = 75 \text{ millas por hora.}$$

Suponiendo que la función de posición es derivable, es posible aplicar el teorema del valor medio para concluir que el camión debe haber estado viajando a razón de 75 millas por hora en algún momento durante los 4 minutos.

Una forma alternativa útil del teorema del valor medio es como sigue: si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

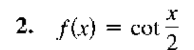
$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$ Forma alternativa del teorema del valor medio.

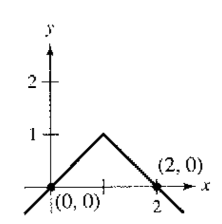
NOTA Al realizar los ejercicios de esta sección tener presente que las funciones polinómicas, las racionales y las trigonométricas son derivables en todos los puntos en sus dominios.

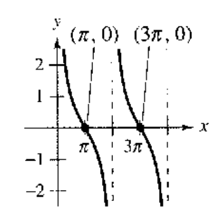
Ejercicios de la sección 3.2

En los ejercicios 1 a 4, explicar por qué el teorema de Rolle no se aplica a la función aun cuando existan a y b tales que $f(a) = f(b)$.

1. $f(x) = 1 - |x - 1|$

2. 
$f(x) = \cot \frac{x}{2}$





3. $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, $[-1, 1]$

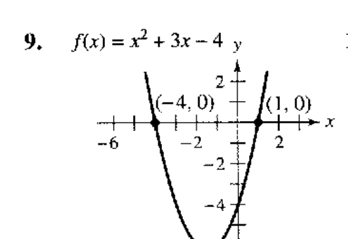
4. $f(x) = \sqrt{(2 - x^{2/3})^3}$, $[-1, 1]$

En los ejercicios 5 a 8, determinar dos intersecciones con el eje x de la función f y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones.

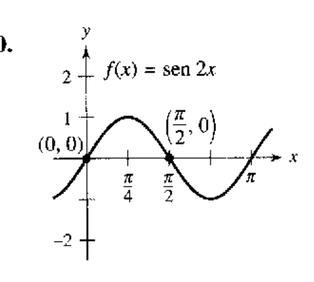
5. $f(x) = x^2 - x - 2$
6. $f(x) = x(x - 3)$
7. $f(x) = x\sqrt{x + 4}$
8. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$

Teorema de Rolle **En los ejercicios 9 y 10, se muestra la gráfica de f. Aplicar el teorema de Rolle y determinar todos los valores de c tales que $f'(c) = 0$ en algún punto entre las intersecciones marcadas.**

9. $f(x) = x^2 + 3x - 4$



10.



En los ejercicios 11 a 24, determinar si es posible aplicar el teorema de Rolle a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si se puede aplicar el teorema de Rolle, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$.

11. $f(x) = x^2 - 2x, [0, 2]$
12. $f(x) = x^2 - 5x + 4, [1, 4]$
13. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3), [1, 3]$
14. $f(x) = (x - 3)(x + 1)^2, [-1, 3]$
15. $f(x) = x^{2/3} - 1, [-8, 8]$
16. $f(x) = 3 - |x - 3|, [0, 6]$
17. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}, [-1, 3]$
18. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, [-1, 1]$
19. $f(x) = \operatorname{sen} x, [0, 2\pi]$
20. $f(x) = \cos x, [0, 2\pi]$
21. $f(x) = \frac{6x}{\pi} - 4 \operatorname{sen}^2 x, \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$
22. $f(x) = \cos 2x, \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$
23. $f(x) = \tan x, [0, \pi]$
24. $f(x) = \sec x, \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

En los ejercicios 25 a 28, utilizar una calculadora para representar gráficamente la función en el intervalo cerrado $[a, b]$. Determinar si el teorema de Rolle puede aplicarse a f en el intervalo y, si es así, encontrar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$.

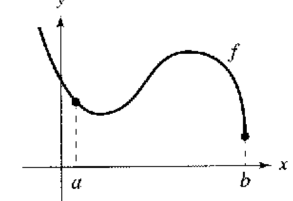
25. $f(x) = |x| - 1, [-1, 1]$
26. $f(x) = x - x^{1/3}, [0, 1]$
27. $f(x) = 4x - \tan \pi x, \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$
28. $f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{6}, [-1, 0]$

29. ***Movimiento vertical*** La altura de una pelota t segundos después de que se lanzó hacia arriba a partir de una altura de 32 pies y con una velocidad inicial de 48 pies por segundo es $f(t) = -16t^2 + 48t + 32$.
   a) Verificar que $f(1) = f(2)$.
   b) De acuerdo con el teorema de Rolle, ¿cuál debe ser la velocidad en algún tiempo en el intervalo $(1, 2)$? Determinar ese tiempo.

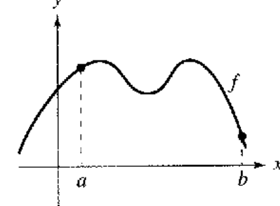
30. ***Costos de nuevos pedidos*** El costo de pedido y transporte C para componentes utilizados en un proceso de manufactura se aproxima mediante $C(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x + 3}\right)$, donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos.
   a) Verificar que $C(3) = C(6)$.
   b) De acuerdo con el teorema de Rolle, el ritmo de cambio del costo debe ser 0 para algún tamaño de pedido en el intervalo $(3, 6)$. Determinar ese tamaño de pedido.

En los ejercicios 31 y 32, copiar la gráfica y dibujar la recta secante a la misma a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Después dibujar cualquier recta tangente a la gráfica para cada valor de c garantizada por el teorema del valor medio.

31.

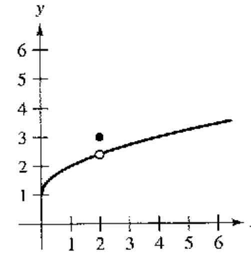


32.

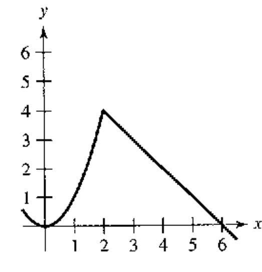


Comentario **En los ejercicios 33 a 36 explicar por qué el teorema de valor medio no se aplica a la función f en el intervalo $[0, 6]$.**

33.



34.



35. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

36. $f(x) = |x - 3|$

37. ***Teorema del valor medio*** Considerar la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$. *a)* Determinar la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$. *b)* Utilizar el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-1, 2)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante. *c)* Encontrar la ecuación de la recta tangente que pasa por c. *d)* Utilizar después una calculadora para representar gráficamente f, la recta secante y la recta tangente.

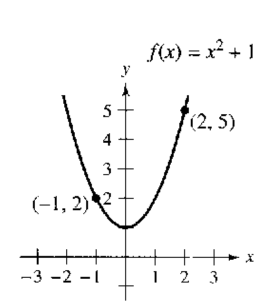


Figura para 37

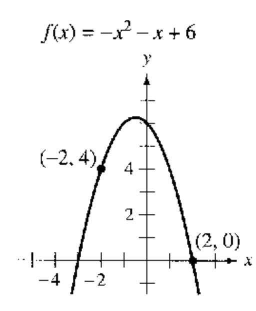


Figura para 38

38. ***Teorema del valor medio*** Considerar la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$. *a)*. Encontrar la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-2, 4)$ y $(2, 0)$. *b)* Emplear el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-2, 2)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante. *c)* Determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por c. *d)* Utilizar después una calculadora para representar gráficamente f, la recta secante y la recta tangente.

En los ejercicios 39 a 46, determinar si el teorema del valor medio puede aplicarse a f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Si el teorema del valor medio puede aplicarse, encontrar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

39. $f(x) = x^2,\ [-2, 1]$

40. $f(x) = x(x^2 - x - 2),\ [-1, 1]$

41. $f(x) = x^{2/3},\ [0, 1]$

42. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x},\ \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

43. $f(x) = \sqrt{2 - x},\ [-7, 2]$

44. $f(x) = x^3,\ [0, 1]$

45. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ [0, \pi]$

46. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x,\ [0, \pi]$

En los ejercicios 47 a 50, utilizar una calculadora para *a)* representar gráficamente la función f sobre el intervalo, *b)* encontrar y representar gráficamente la recta secante que pasa por los puntos sobre la gráfica de f en los puntos terminales del intervalo dado y *c)* encontrar y representar gráficamente cualesquiera rectas tangentes a la gráfica de f que sean paralelas a la recta secante.

47. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1},\ \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

48. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x,\ [-\pi, \pi]$

49. $f(x) = \sqrt{x},\ [1, 9]$

50. $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 5,\ [0, 5]$

51. ***Movimiento vertical*** La altura de un objeto tres segundos después de que se deja caer desde una altura de 500 metros es $s(t) = -4.9t^2 + 500$.

a) Encontrar la velocidad promedio del objeto durante los primeros tres segundos.

b) Utilizar el teorema del valor medio para verificar que en algún momento durante los primeros tres segundos de la caída la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio. Determinar ese momento.

52. ***Ventas*** Una compañía introduce un nuevo producto para el cual el número de unidades vendidas S es

$$S(t) = 200\left(5 - \frac{9}{2 + t}\right)$$

donde t es el tiempo en meses.

a) Encontrar el valor promedio de $S(t)$ durante el primer año.

b) ¿Durante qué mes $S'(t)$ es igual al valor promedio durante el primer año?

Desarrollo de conceptos

53. Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si existe c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$, ¿se concluye que $f(a) = f(b)$? Explicar.

54. Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Además, suponer que $f(a) = f(b)$ y que c es un número real en el intervalo tal que $f'(c) = 0$. Encontrar un intervalo para la función g sobre la cual pueda aplicarse el teorema de Rolle y determinar el punto crítico correspondiente de g (k es una constante)

a) $g(x) = f(x) + k$ *b)* $g(x) = f(x - k)$

c) $g(x) = f(kx)$

55. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

es derivable en $(0, 1)$ y satisface $f(0) = f(1)$. Sin embargo, su derivada nunca es cero en $(0, 1)$. ¿Contradice lo anterior al teorema de Rolle? Explicar.

56. ¿Es posible encontrar una función f tal que $f(-2) = -2$, $f(2) = 6$ y $f'(x) < 1$ para todo x. ¿Por qué sí o por qué no?

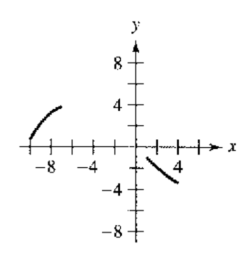
57. ***Velocidad*** Un avión despega a las 2:00 p.m. en un vuelo de 2 500 millas. El avión llega a su destino a las 7:30 p.m. Explicar por qué hay al menos dos momentos durante el vuelo en los que la velocidad del avión es de 400 millas por hora.

58. ***Temperatura*** Cuando se saca un objeto del horno y se pone a temperatura ambiente constante de 90° F la temperatura de su núcleo es de 1 500° F. Cinco horas después la temperatura del núcleo corresponde a 390° F. Explicar por qué debe existir un momento (o instante) en el intervalo en el que la temperatura disminuye a un ritmo o tasa de 222° F por hora.

59. ***Velocidad*** Dos ciclistas empiezan una carrera a las 8:00 a.m. Ambos terminan la carrera 2 horas y 15 minutos después. Demostrar en qué momento de la carrera, los ciclistas viajan a la misma velocidad.

60. ***Aceleración*** A las 9:13 a.m., un automóvil deportivo viaja a 35 millas por hora. Dos minutos después se desplaza a 85 millas por hora. Demostrar que en algún momento durante este intervalo, la aceleración del automóvil es exactamente igual a 1 500 millas por hora al cuadrado.

61. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra dos partes de la gráfica de una función derivable continua f en $[-10, 4]$. La derivada f' también es continua.



a) Explicar por qué f debe tener al menos un cero en $[-10, 4]$.

b) Explicar por qué f' debe tener también al menos un cero en el intervalo $[-10, 4]$. ¿Cómo se llaman estos ceros?

c) Realizar un posible dibujo de la función con un cero con f' en el intervalo $[-10, 4]$.

d) Realizar un posible dibujo de la función con dos ceros de f' en el intervalo $[-10, 4]$.

e) ¿Fueron necesarias las condiciones de continuidad de f y f' para efectuar las partes de la *a*) a la *d*)? Explicar.

62. Considerar la función $f(x) = 3\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

a) Utilizar una calculadora para representar gráficamente f y f'.

b) ¿Es f una función continua? ¿Es f' una función continua?

c) ¿Se aplica el teorema de Rolle al intervalo $[-1, 1]$? ¿Se aplica al intervalo $[1, 2]$? Explicar.

d) Evaluar si es posible, $\lim_{x\to 3^-} f'(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f'(x)$.

Para pensar **En los ejercicios 63 y 64, dibujar la gráfica de una función arbitraria *f* que satisface la condición dada pero que no cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[-5, 5]$.**

63. f es continua en $[-5, 5]$.

64. f no es continua en $[-5, 5]$.

En los ejercicios 65 y 66, usar el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación tiene exactamente una solución real.

65. $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ **66.** $2x - 2 - \cos x = 0$

67. Determinar los valores a, b y c tales que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ ax + b, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

68. Determinar los valores a, b, c y d de manera que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = -1 \\ 2, & -1 < x \leq 0 \\ bx^2 + c, & 0 < x \leq 1 \\ dx + 4, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 69 a 72, encontrar una función *f* que tiene la derivada $f'(x)$ y cuya gráfica pasa por el punto dado. Explicar el razonamiento.**

69. $f'(x) = 0, \quad (2, 5)$ **70.** $f'(x) = 4, \quad (0, 1)$

71. $f'(x) = 2x, \quad (1, 0)$ **72.** $f'(x) = 2x + 3, \quad (1, 0)$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 73-76, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

73. El teorema del valor medio puede aplicarse a $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

74. Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.

75. Si la gráfica de una función polinómica tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.

76. Si $f'(x) = 0$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una función constante.

77. Demostrar que si $a > 0$ y n es cualquier entero positivo, entonces la función polinómica $p(x) = x^{2n-1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales.

78. Demostrar que si $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

79. Sea $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Demostrar que para cualquier intervalo $[a, b]$, el valor c garantizado por el teorema del valor medio es el punto medio del intervalo.

80. *a*) Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^3 = x^2 + 3x + 2$. Entonces $f(-1) = g(-1)$ y $f(2) = g(2)$. Demostrar que hay al menos un valor c en el intervalo $(-1, 2)$ donde la recta tangente a f en $(c, f(c))$ es paralela a la recta tangente g en $(c, g(c))$. Identificar c.

b) Sea f y g la función derivable en $[a, b]$ donde $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demostrar que hay al menos un valor c en el intervalo (a, b) donde la recta tangente f en $(c, f(c))$ es paralela a la recta tangente a g en $(c, g(c))$.

81. Demostrar que si f es derivable en $(-\infty, \infty)$ y $f'(x) < 1$ para todo número real, entonces f tiene al menos un punto fijo. Un punto fijo para una función f es un número real c tal que $f(c) = c$.

82. Usar el resultado del ejercicio 81 para demostrar que $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ tiene al menos un punto fijo.

83. Demostrar que $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ para toda a y b.

84. Demostrar que $|\text{sen}\, a - \text{sen}\, b| \leq |a = b|$ para toda a y b.

85. Sea $0 < a < b$. Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b - a}{2\sqrt{a}}.$$

Sección 3.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada

- **Determinar los intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente.**
- **Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de una función.**

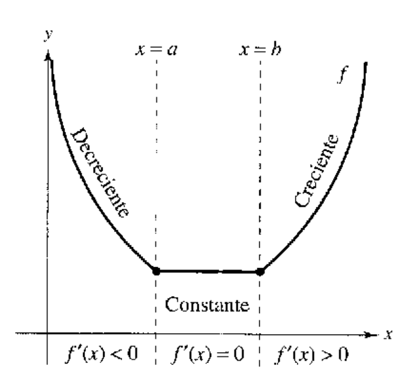
Funciones crecientes y decrecientes

En esta sección se verá cómo se pueden utilizar las derivadas para *clasificar* extremos relativos ya sea como mínimos o como máximos relativos. En primer término, es importante definir las funciones crecientes y decrecientes.

Definición de funciones crecientes y decrecientes

Una función f es **creciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2, en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.



La derivada se relaciona con la pendiente de una función
Figura 3.15

Una función es creciente si, *cuando x se mueve hacia la derecha*, su gráfica asciende, y es decreciente si su gráfica desciende. Por ejemplo, la función en la figura 3.15 es decreciente en el intervalo $(-\infty, a)$, es constante en el intervalo (a, b), y creciente en el intervalo (b, ∞). Como se muestra en el teorema 3.5, una derivada positiva implica que la función es creciente; una derivada negativa implica que la función es decreciente; y una derivada cero en todo el intervalo implica que la función es constante en ese intervalo.

TEOREMA 3.5 Criterio para las funciones crecientes y decrecientes

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración Para probar el primer caso, supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x en el intervalo (a, b) y sean $x_1 < x_2$ cualesquiera dos puntos en el intervalo. Mediante el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c tal que $x_1 < c < x_2$, y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, se sabe que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

lo cual implica que $f(x_1) < f(x_2)$. De tal modo, f es creciente en el intervalo. El segundo caso tiene una demostración similar (ver el ejercicio 101), y el tercer caso se dio en el ejercicio 78 en la sección 3.2.

NOTA Las conclusiones en los primeros dos casos del teorema 3.5 son válidas incluso si $f'(x) = 0$ es un número finito de valores de x en (a, b).

EJEMPLO 1 Intervalos sobre los cuales *f* es creciente y decreciente

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Solución Nótese que f es derivable en toda la recta de los números reales. Para determinar los puntos críticos de f, igualar a cero $f'(x)$.

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \qquad \text{Derivar e igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$3(x)(x-1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x = 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

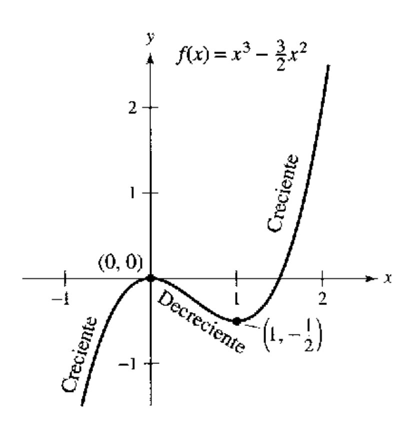
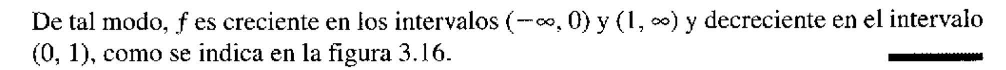


Figura 3.16

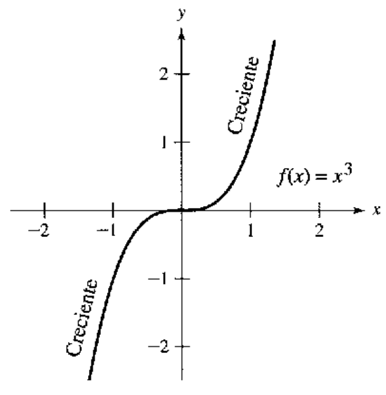
Como no hay puntos para los cuales f' no exista, es posible concluir que $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos puntos críticos. La tabla siguiente resume la prueba de los tres intervalos determinados por estos dos puntos críticos.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

De tal modo, f es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, como se indica en la figura 3.16.



El ejemplo 1 muestra cómo determinar intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente. La guía siguiente resume los pasos que se siguen en el ejemplo.



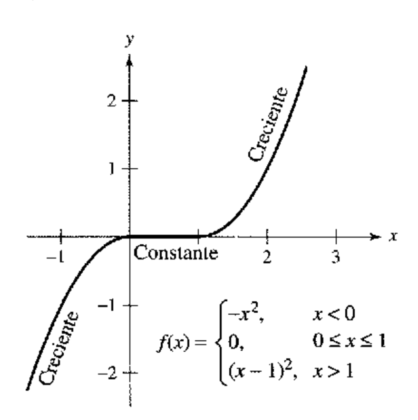
a) Función estrictamente monótona

Estrategias para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente

Sea f continua en el intervalo (a, b). Para encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales f es creciente o decreciente, hay que seguir los siguientes pasos.

1. Localizar los puntos críticos de f en (a, b), y utilizarlos para determinar intervalos de prueba.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Recurrir al teorema 3.5 para determinar si f es creciente o decreciente para cada intervalo.

Estas estrategias también son válidas si el intervalo (a, b) se sustituye por un intervalo de la forma $(-\infty, b)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.



b) No estrictamente monótona
Figura 3.17

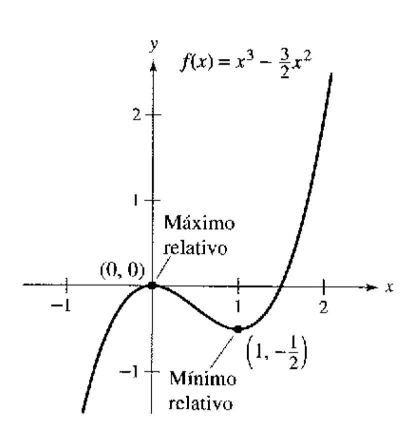
Una función es **estrictamente monótona** sobre un intervalo si es creciente o decreciente en todo el intervalo. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es creciente siempre sobre ella, como se indica en la figura 3.17*a*. La función que se muestra en la figura 3.17*b* no es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es constante en el intervalo $[0, 1]$.

Criterio de la primera derivada

Una vez que se han determinado los intervalos de crecimiento o decrecimiento, es fácil localizar los extremos relativos de la función. Por ejemplo, en la figura 3.18 (del ejemplo 1), la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

tiene un máximo relativo en el punto (0, 0) porque f es creciente inmediatamente a la izquierda de $x = 0$ y decreciente inmediatamente a la derecha de $x = 0$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -\frac{1}{2})$ debido a que f decrece de inmediato a la izquierda de $x = 1$ y crece de inmediato a la derecha de $x = 1$. El siguiente teorema, denominado prueba o criterio de la primera derivada, precisa más esta observación.

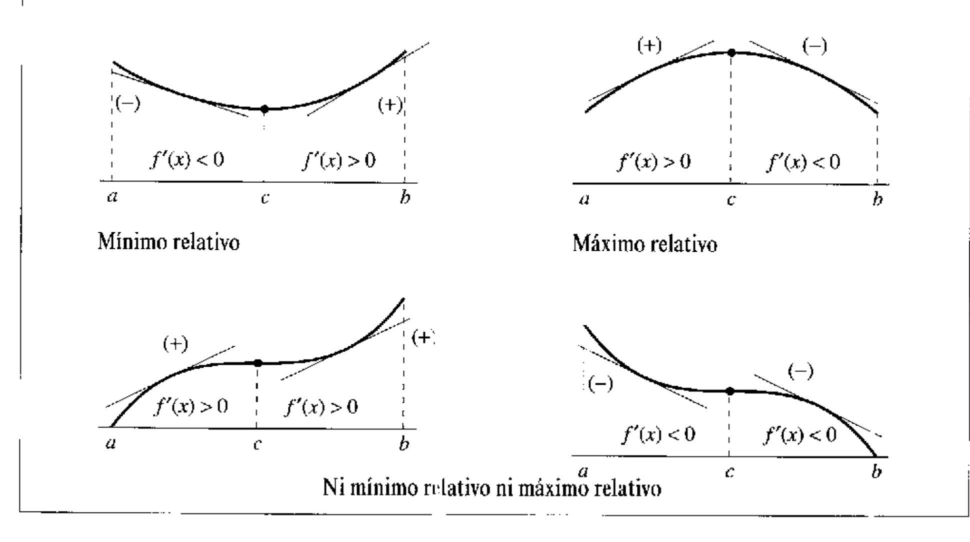


Extremos relativos de f
Figura 3.18

TEOREMA 3.6 Criterio de la primera derivada

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Demostración Supóngase que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c. Entonces ahí existen a y b en I tales que

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a, c)$$

y

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } (c, b).$$

Por el teorema 3.5, f es decreciente en (a, c) y creciente en (c, b). De tal modo, $f(c)$ es un mínimo de f en el intervalo abierto (a, b) y, en consecuencia, un mínimo relativo de f. Esto demuestra el primer caso del teorema. El segundo caso puede demostrarse de una manera similar (ver el ejercicio 102).

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la primera derivada

Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Solución Obsérvese que f es continua en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para determinar los puntos críticos de f en este intervalo, hacer $f'(x)$ igual a 0.

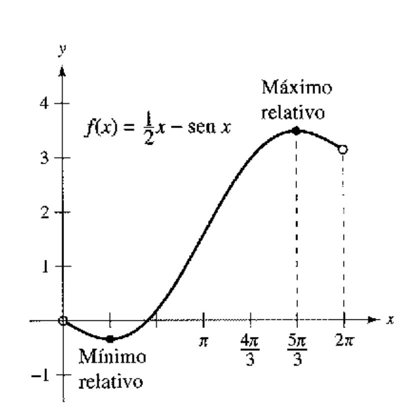
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Puntos críticos.}$$

Debido a que f' existe en todos los puntos, se puede concluir que $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$ son los únicos puntos críticos. La tabla resume valores prueba en cada uno de los tres intervalos de prueba determinados por estos dos puntos críticos.

Intervalo	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$
Valor de prueba	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \pi$	$x = \frac{7\pi}{4}$
Signo de $f'(x)$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente



Ocurre un mínimo relativo donde f cambia de decreciente a creciente, y un máximo relativo donde f cambia de creciente a decreciente
Figura 3.19

Aplicando el criterio de la primera derivada, es posible concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto donde

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ donde ocurre el mínimo relativo.}$$

y un máximo relativo en el punto en el que

$$x = \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ donde ocurre el máximo relativo.}$$

como se muestra en la figura 3.19.

Comparación de los enfoques gráfico y analítico De la sección 3.2, se sabe que una calculadora, por sí misma, puede producir información equivocada acerca de los extremos relativos de una gráfica. Sin embargo, *utilizada en conjunción con un enfoque analítico* una calculadora tiene la posibilidad de ofrecer una buena forma de reforzar sus conclusiones. Recurra a una calculadora para representar gráficamente la función del ejemplo 2. Después utilizar las características *zoom* y *trace* para estimar los extremos relativos. ¿Cómo son de precisas las aproximaciones gráficas que se obtuvieron?

Advierta que en los ejemplos 1 y 2 las funciones dadas son derivables en toda la recta real. Para tales funciones, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales $f'(x) = 0$. El ejemplo 3 se relaciona con una función que tiene dos tipos de puntos críticos: aquellos para los cuales $f'(x) = 0$ y aquellos para los cuales f no es derivable.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de la primera derivada

Encontrar los extremos relativos de

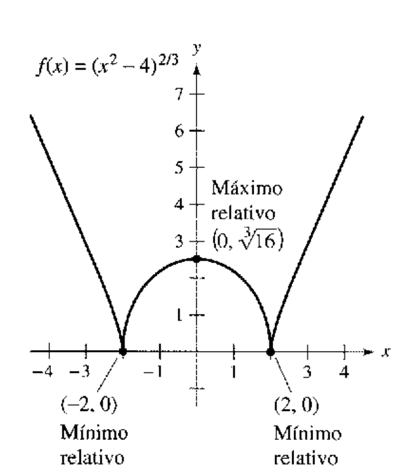
$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}.$$

Solución Empezar observando que f es continua en toda la recta real. La derivada de f

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) \qquad \text{Regla de la potencia general.}$$

$$= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} \qquad \text{Simplificar.}$$

es 0 cuando $x = 0$ y no existe cuando $x = \pm 2$. De tal modo, los puntos críticos son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La tabla resume los valores prueba de cuatro intervalos determinados por estos puntos críticos.



Se puede aplicar el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos
Figura 3.20

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, 0)$, un máximo relativo en el punto $(0, \sqrt[3]{16})$, y otro mínimo relativo en el punto $(2, 0)$, como se ilustra en la figura 3.20.

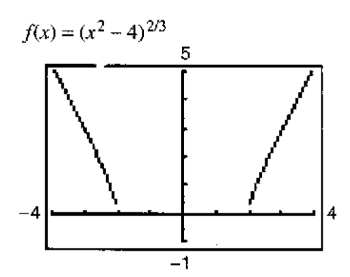
CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utiliza una calculadora para representar gráficamente una función que incluya radicales o exponentes racionales, hay que cerciorarse de entender la forma en que la calculadora evalúa las expresiones radicales. Por ejemplo, aun cuando

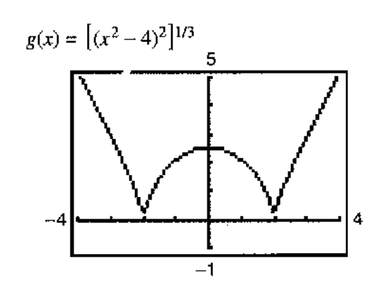
$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

y

$$g(x) = [(x^2 - 4)^2]^{1/3}$$

son los mismos algebraicamente, algunas calculadora establecen una distinción entre estas dos funciones. ¿Cuál de las gráficas que se muestran en la figura 3.21 es incorrecta? ¿Por qué la calculadora produce una gráfica incorrecta?





¿Cuál de las gráficas es incorrecta?
Figura 3.21

Al usar el criterio de la primera derivada, es necesario asegurarse de que se considere el dominio de la función. Por ejemplo, en el siguiente ejemplo, la función

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$$

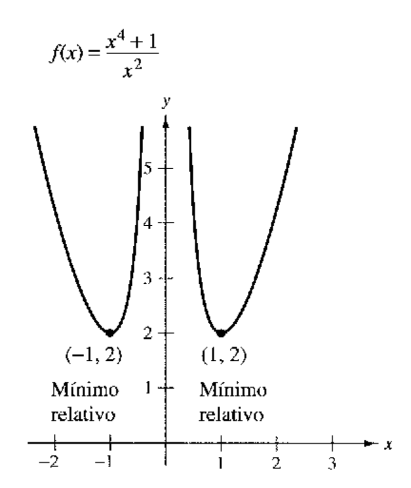
no está definida cuando $x = 0$. Este valor de x debe utilizarse con los puntos críticos para determinar los intervalos de prueba.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la primera derivada

Determinar los extremos relativos de $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$.

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x^{-2} && \text{Reescribir la función original.}\\ f'(x) &= 2x - 2x^{-3} && \text{Derivar.}\\ &= 2x - \frac{2}{x^3} && \text{Reescribir con exponente positivo.}\\ &= \frac{2(x^4-1)}{x^3} && \text{Simplificar.}\\ &= \frac{2(x^2+1)(x-1)(x+1)}{x^3} && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$



Valores de x que no están en el dominio de f, así como los puntos críticos, determinan los intervalos de prueba de f'

Figura 3.22

De tal modo, $f'(x)$ es cero en $x = \pm 1$. Además, como $x = 0$ no está en el dominio de f, es necesario utilizar este valor de x junto con los puntos críticos para determinar los intervalos prueba.

$$\begin{aligned} x &= \pm 1 && \text{Puntos críticos. } f'(\pm 1) = 0.\\ x &= 0 && \text{Cero no está en el dominio de } f. \end{aligned}$$

La tabla resume los valores prueba de los cuatro intervalos determinados por estos tres valores de x.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) > 0$	$f'(\frac{1}{2}) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y otro en el punto $(1, 2)$, como se muestra en la figura 3.22.

TECNOLOGÍA El paso más difícil al aplicar el criterio de la primera derivada es determinar los valores para los cuales la derivada es igual a 0. Por ejemplo, los valores de x para los cuales la derivada de

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2+1}$$

es igual a cero son $x=0$ y $x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Si se tiene acceso a tecnología que puede efectuar derivación simbólica y resolver ecuaciones, utilizarla para aplicar el criterio de la primera derivada a esta función.

Si un proyectil se lanza desde el nivel del suelo y se ignora la resistencia del aire, el objeto viajará más lejos con un ángulo inicial de 45°. Pero, si el proyectil se lanza desde un punto sobre el nivel del suelo, el ángulo que produce una distancia máxima horizontal no es 45° (ver el ejemplo 5).

EJEMPLO 5 La trayectoria de un proyectil

Ignorando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil que se lanza a un ángulo θ es

$$y = \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

donde y es la altura, x es la distancia horizontal, g es la aceleración debida a la gravedad, v_0 es la velocidad inicial y h es la altura inicial. (Esta ecuación se obtuvo en la sección 12.3.) Sea $g = -32$ pies por segundo, $v_0 = 24$ pies por segundo y $h = 9$ pies por segundo. ¿Qué valor de θ producirá una máxima distancia horizontal?

Solución Para encontrar la distancia que el proyectil recorre, sea $y = 0$, y utilizar la fórmula cuadrática para resolver con respecto a x.

$$\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h = 0$$

$$\frac{-32 \sec^2 \theta}{2(24^2)}x^2 + (\tan \theta)x + 9 = 0$$

$$-\frac{\sec^2 \theta}{36}x^2 + (\tan \theta)x + 9 = 0$$

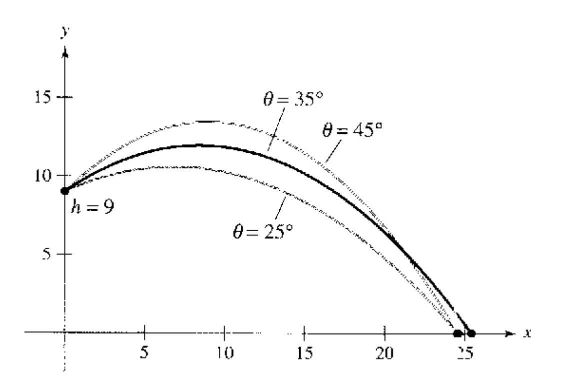
$$x = \frac{-\tan \theta \pm \sqrt{\tan^2 \theta + \sec^2 \theta}}{-\sec^2 \theta/18}$$

$$x = 18 \cos \theta\left(\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + 1}\right), \quad x \geq 0$$

En este punto, se necesita determinar el valor de θ que produce un valor máximo de x. La aplicación del criterio de la primera derivada en forma manual resultaría tediosa. Sin embargo, el uso de tecnología para resolver la ecuación $dx/d\theta = 0$ elimina la mayoría de los cálculos engorrosos. El resultado es que el valor máximo de x ocurre cuando

$$\theta \approx 0.61548 \text{ radianes, o } 35.3°.$$

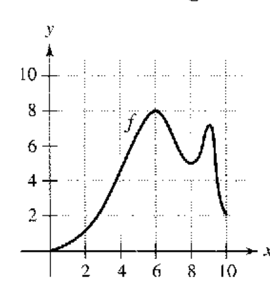
Esta conclusión se refuerza dibujando la trayectoria del proyectil para diferentes valores de θ como se indica en la figura 3.23. De las tres trayectorias indicadas, notar que la distancia recorrida es mayor para $\theta = 35°$.

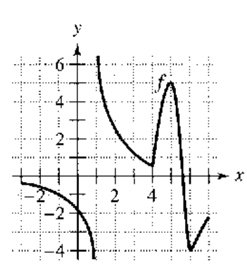


La trayectoria de un proyectil con un ángulo inicial θ
Figura 3.23

Ejercicios de la sección 3.3

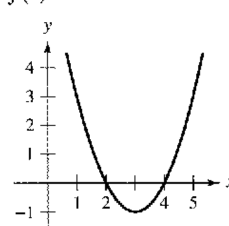
En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f para determinar *a*) el intervalo abierto más grande sobre el cual f es creciente y *b*) el intervalo abierto más grande sobre el cual f es decreciente.

1.


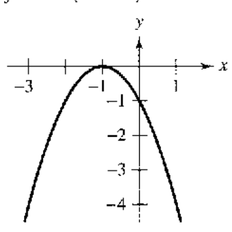
2.


En los ejercicios 3 a 16, identificar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

3. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

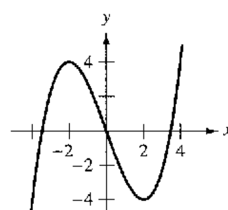


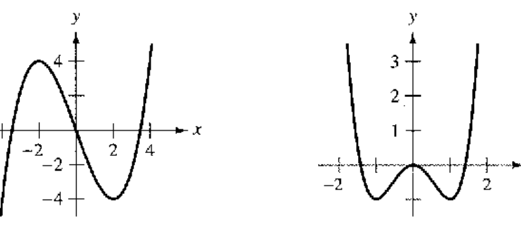
4. $y = -(x + 1)^2$



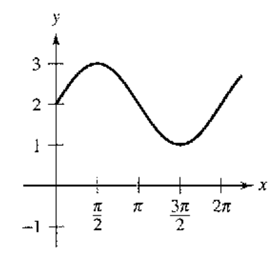
5. $y = \frac{x^3}{4} - 3x$

6. $f(x) = x^4 - 2x^2$





7. $f(x) = \operatorname{sen} x + 2, 0 < x < 2\pi$



8. $h(x) = \cos\frac{x}{2}, 0 < x < 2\pi$

9. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

10. $y = \frac{x^2}{x + 1}$

11. $g(x) = x^2 - 2x - 8$

12. $h(x) = 27x - x^3$

13. $y = x\sqrt{16 - x^2}$

14. $y = x + \frac{4}{x}$

15. $y = x - 2\cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

16. $f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

En los ejercicios 17 a 38, *a*) encontrar los puntos críticos de f (si los hay), *b*) determinar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *c*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *d*) utilizar una calculadora para confirmar los resultados.

17. $f(x) = x^2 - 6x$

18. $f(x) = x^2 + 8x + 10$

19. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$

21. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

22. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

23. $f(x) = x^2(3 - x)$

24. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$

25. $f(x) = \frac{x^5 - 5x}{5}$

26. $f(x) = x^4 - 32x + 4$

27. $f(x) = x^{1/3} + 1$

28. $f(x) = x^{2/3} - 4$

29. $f(x) = (x - 1)^{2/3}$

30. $f(x) = (x - 1)^{1/3}$

31. $f(x) = 5 - |x - 5|$

32. $f(x) = |x + 3| - 1$

33. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

34. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

35. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

36. $f(x) = \frac{x + 3}{x^2}$

37. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

38. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

En los ejercicios 39 a 46, considerar la función sobre el intervalo $(0, 2\pi)$. Para cada función, *a*) encontrar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *b*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *c*) utilizar una calculadora para confirmar los resultados.

39. $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$

40. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

41. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

42. $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$

43. $f(x) = \cos^2(2x)$

44. $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$

45. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$

46. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$

En los ejercicios 47 a 52, *a*) utilizar un sistema de álgebra por computadora para derivar la función, *b*) dibujar las gráficas de f y f' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas sobre el intervalo indicado, *c*) encontrar los puntos críticos de f en el intervalo abierto y *d*) determinar el (los) intervalo(s) sobre el cual f' es positiva y el (los) intervalo(s) sobre el cual es negativa. Comparar el comportamiento de f y el signo de f'.

47. $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}, \quad [-3, 3]$

48. $f(x) = 10\left(5 - \sqrt{x^2 - 3x + 16}\right), \quad [0, 5]$

49. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t, \quad [0, 2\pi]$

50. $f(x) = \frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

51. $f(x) = -3\operatorname{sen}\frac{x}{3}, \quad [0, 6\pi]$

52. $f(x) = 2\operatorname{sen} 3x + 4\cos 3x, \quad [0, \pi]$

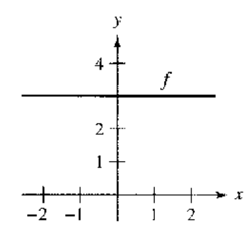
En los ejercicios 53 y 54, utilizar la simetría, los extremos y los ceros para dibujar la gráfica de f. ¿En qué difieren f y g?

53. $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^2 - 1}, \quad g(x) = x(x^2 - 3)$

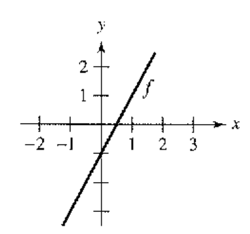
54. $f(t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, \quad g(t) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$

Para pensar **En los ejercicios 55 a 60, la gráfica de f se muestra en la figura. Dibujar una gráfica de la derivada de f.**

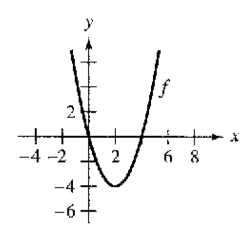
55.



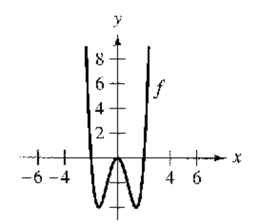
56.



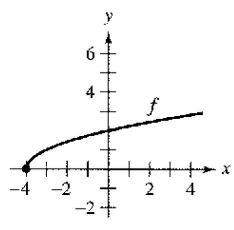
57.



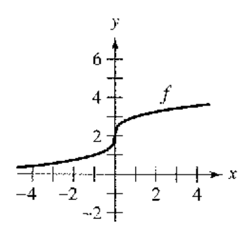
58.



59.

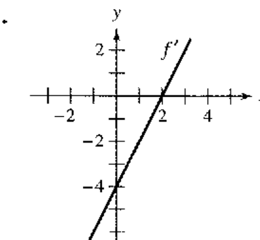


60.

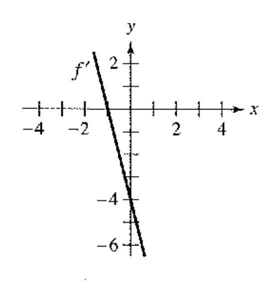


En los ejercicios 61 a 64, utilizar la gráfica de f' para *a*) identificar el (los) intervalo(s) sobre el cual f es creciente o decreciente y *b*) estimar los valores de x para los cuales f tiene un máximo o mínimo relativo.

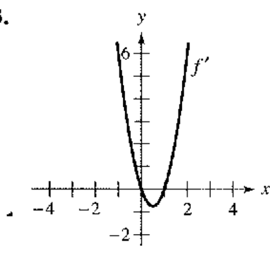
61.



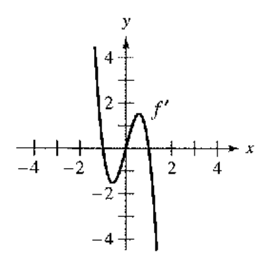
62.



63.



64.



Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 65 a 70, suponer que f es derivable para todo x. Los signos de f' son como sigue.

$f'(x) > 0$ **en** $(-\infty, -4)$

$f'(x) < 0$ **en** $(-4, 6)$

$f'(x) > 0$ **en** $(6, \infty)$

Indicar la desigualdad apropiada para el valor de c indicado.

	Función	*Signo de $g'(c)$*	
65.	$g(x) = f(x) + 5$	$g'(0)$	0
66.	$g(x) = 3f(x) - 3$	$g'(-5)$	0
67.	$g(x) = -f(x)$	$g'(-6)$	0
68.	$g(x) = -f(x)$	$g'(0)$	0
69.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(0)$	0
70.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(8)$	0

71. Dibujar la gráfica de la función arbitraria de f tal que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x < 4 \\ \text{indefinida}, & x = 4. \\ < 0, & x > 4 \end{cases}$$

72. Una función derivable de f tiene un punto crítico en $x = 5$. Identificar los extremos relativos de f en el punto crítico si $f'(4) = -2.5$ y $f'(6) = 3$.

73. ***Para pensar*** La función f es derivable sobre el intervalo $[-1, 1]$. La tabla muestra los valores de f' para los valores elegidos de x. Dibujar la gráfica de f, aproximar los puntos críticos e identificar los extremos relativos.

x	-1	-0.75	-0.50	-0.25
$f'(x)$	-10	-3.2	-0.5	0.8

x	0	0.25	0.50	0.75	1
$f'(x)$	5.6	3.6	-0.2	-6.7	-20.1

74. ***Para pensar*** La función f es derivable sobre el intervalo $[0, \pi]$. La tabla muestra el valor de f' para valores elegidos de x. Dibujar la gráfica de f, aproximar los puntos críticos que identifiquen los extremos relativos.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f'(x)$	3.14	-0.23	-2.45	-3.11	0.69

x	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$f'(x)$	3.00	1.37	-1.14	-2.84

75. ***Rodamiento de un cojinete de bola*** Un cojinete de bola se coloca sobre un plano inclinado y empieza a rodar. El ángulo de elevación del plano es θ. La distancia (en metros) que el cojinete de bola rueda en t segundos es $s(t) = 4.9(\text{sen }\theta)t^2$.

a) Determinar la velocidad del cojinete de bola después de t segundos.

b) Completar la tabla y utilizarla para determinar el valor de θ que produce la máxima velocidad en un instante particular.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
$s'(t)$							

76. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** La concentración C de un compuesto químico en el flujo sanguíneo t horas después de la inyección en el tejido muscular es

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}, \quad t \geq 0.$$

a) Completar la tabla y utilizarla para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$C(t)$							

b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función de concentración y emplear la gráfica para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

c) Recurrir al cálculo para determinar analíticamente el tiempo en que la concentración es más grande.

77. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Considerar las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $(0, \pi)$.

a) Completar la tabla y hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi)$.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente las funciones y emplear las gráficas para hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi)$.

c) Demostrar que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. [*Sugerencia*: Demostrar que $h'(x) > 0$ donde $h = f - g$.]

78. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Considerar las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \tan x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$.

a) Completar la tabla y realizar una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi/2)$.

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente las funciones y utilizar las gráficas para realizar una suposición acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi/2)$.

c) Demostrar que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(0, \pi/2)$. [*Sugerencia*: Demostrar que $h'(x) > 0$, donde $h = g - f$.]

79. ***Contracción de la tráquea*** La tos obliga a que la tráquea (tubo de viento) se contraiga, lo cual afecta la velocidad v del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire cuando se tose es

$$v = k(R - r)r^2, \quad 0 \leq r < R$$

donde k es una constante, R es el radio normal de la tráquea y r es el radio cuando se tose. ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?

80. ***Ganancias*** La ganancia P (en dólares) que logra un restaurante de comida rápida al vender x hamburguesas es

$$P = 2.44x - \frac{x^2}{20\,000} - 5\,000, \quad 0 \leq x \leq 35\,000.$$

Encontrar el intervalo abierto sobre el cual P es creciente o decreciente.

81. ***Potencia*** La potencia eléctrica P en watts en un circuito de corriente directa con dos resistores R_1 y R_2 conectados en paralelo es

$$P = \frac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 produce la potencia máxima?

82. ***Resistencia eléctrica*** La resistencia R de cierto tipo de resistor es

$$R = \sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}$$

donde R se mide en ohms y la temperatura T se mide en grados Celsius.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar dR/dT y el punto crítico de la función. Determinar la resistencia mínima para este tipo de resistor.

b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función R y usar la gráfica para aproximar la resistencia mínima de este tipo de resistor.

83. ***Modelo matemático*** Los activos al final del año para el Medicare Hospital Insurance Trust Fund (en miles de millones de dólares) en los años 1995 a 2001 se muestra a continuación:

1955: 130.3; 1996: 124.9; 1997: 115.6; 1998: 120.4;

1999: 141.4; 2000: 177.5; 2001: 208.7

(*Fuente*: *U. S. Center for Medicare and Medicaid Services*)

a) Utilizar las capacidades de regresión de la calculadora para encontrar un modelo de la forma $M = at^2 + bt + c$ para los datos. (Dejar que $t = 5$ represente a 1995.)

b) Utilizar una calculadora para dibujar los datos y representar gráficamente el modelo.

c) Encontrar en forma analítica el mínimo del modelo y comparar el resultado con los datos reales.

84. ***Modelo matemático*** El número de bancarrotas (en miles) entre los años 1988 a 2001 se muestra a continuación.

1988: 594.6; 1989: 643.0; 1990: 725.5; 1991: 880.4;
1992: 972.5; 1993: 918.7; 1994: 845.3; 1995: 858.1;
1996: 1042.1; 1997: 1317.0; 1998: 1429.5;
1999: 1392.0; 2000: 1277.0; 2001: 1386.6

(*Fuente: Administrative Office of the U.S. Courts*)

a) Utilizar las capacidades de regresión de una calculadora para determinar un modelo de la forma $B = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ para los datos. (Dejar que $t = 8$ represente a 1988.)

b) Utilizar una calculadora para dibujar los datos y representar gráficamente el modelo.

c) Determinar el máximo del modelo y comparar el resultado con los datos reales.

Movimiento a lo largo de una recta **En los ejercicios 85 a 88, la función $s(t)$ describe el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Para cada función, *a*) encontrar la función de la velocidad de la partícula en cualquier instante $t \geq 0$, *b*) identificar el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se está moviendo en la dirección positiva, *c*) identificar el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se mueve en la dirección negativa y *d*) identificar el instante en el que la partícula cambia su dirección.**

85. $s(t) = 6t - t^2$

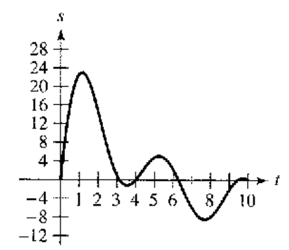
86. $s(t) = t^2 - 7t + 10$

87. $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$

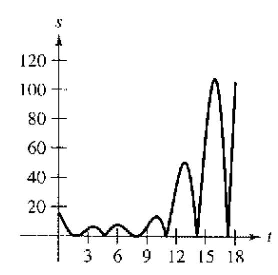
88. $s(t) = t^3 - 20t^2 + 128t - 280$

Movimiento a lo largo de una recta **En los ejercicios 89 y 90, la gráfica muestra la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Describir cómo cambia la posición de la partícula con respecto al tiempo.**

89.



90.



Creación de funciones polinómicas **En los ejercicios 91 a 94, encontrar una función polinómica**

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

que tiene únicamente los extremos especificados. *a*) Determinar el grado mínimo de la función y proporcionar los criterios que se utilizaron para determinar el grado. *b*) Recurriendo al hecho de que las coordenadas de los extremos son puntos solución de la función y el de que las coordenadas x son puntos críticos, determinar un sistema de ecuaciones lineales cuya solución produce los coeficientes de la función requerida. *c*) Utilizar una computadora para resolver el sistema de ecuaciones y determinar la función. *d*) Utilizar la calculadora para confirmar gráficamente su resultado.

91. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (2, 2)

92. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (4, 1 000)

93. Mínimos relativos: (0, 0), (4, 0)
Máximos relativos: (2, 4)

94. Mínimos relativos: (1, 2)
Máximos relativos: (−1, 4), (3, 4)

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 100, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

95. La suma de dos funciones crecientes es creciente.

96. El producto de dos funciones crecientes es creciente.

97. Todo polinomio de grado n tiene $(n - 1)$ puntos críticos.

98. Un polinomio de grado n tiene a lo más $(n - 1)$ puntos críticos.

99. Existe un máximo o mínimo relativo en cada punto crítico.

100. Los máximos relativos de la función f son $f(1) = 4$ y $f(3) = 10$. De tal modo, f tiene al menos un mínimo para cierta x en el intervalo (1, 3).

101. Demostrar el segundo caso del teorema 3.5.

102. Demostrar el segundo caso del teorema 3.6.

103. Sean $x > 0$ y $n > 1$ números reales. Demostrar que $(1 + x)^n > 1 + nx$.

104. Utilizar las definiciones de funciones crecientes y decrecientes para demostrar que $f(x) = x^3$ es creciente en $(-\infty, \infty)$.

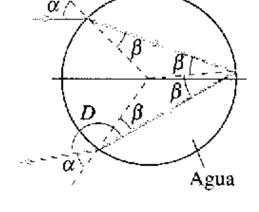
105. Utilizar las definiciones de funciones creciente y decreciente para demostrar que $f(x) = 1/x$ es decreciente en $(0, \infty)$.

Proyecto de trabajo: Arco iris

Los arco iris se forman cuando la luz incide sobre gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción como se indica en la figura. (Esta figura presenta una sección transversal de una gota de lluvia esférica.) La ley de la refracción establece que $(\text{sen } \alpha)/(\text{sen } \beta) = k$, donde $k \approx 1.33$ (para el agua). El ángulo de deflexión está dado por $D = \pi + 2\alpha - 4\beta$.

a) Utilizar una herramienta gráfica para representar gráficamente

$$D = \pi + 2\alpha - 4 \text{ sen}^{-1}(1/k \text{ sen } \alpha),$$
$$0 \leq \alpha \leq \pi/2.$$



b) Demostrar que el ángulo mínimo de la deflexión ocurre cuando

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}.$$

Para el agua, ¿cuál es el ángulo mínimo de deflexión, $D_{\min}$? (El ángulo $\pi - D_{\min}$ recibe el nombre de *ángulo de arco iris*.) ¿Qué valor de α produce este ángulo mínimo? (Un rayo de luz solar que incide sobre una gota de lluvia a este ángulo, α, se conoce como un *rayo de arco iris*.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de las matemáticas de los arco iris, consultar el artículo "Somewhere Within the Rainbow" de Steven Janke en *The UMAP Journal*.

Sección 3.4 Concavidad y el criterio de la segunda derivada

- **Determinar intervalos sobre los cuales una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.**
- **Encontrar cualesquiera puntos de inflexión de la gráfica de una función.**
- **Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos de una función.**

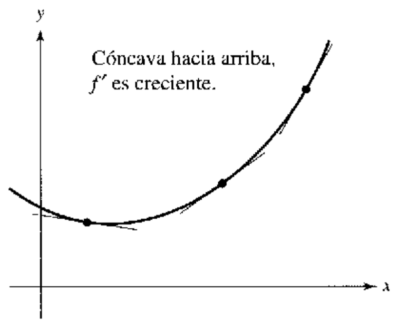
Concavidad

Ya se ha visto que localizar los intervalos en los que una función f es creciente o decreciente ayuda a describir su gráfica. En esta sección, se verá cómo el localizar los intervalos en los que f' es creciente o decreciente puede utilizarse para determinar dónde la gráfica de f se *curva hacia arriba* o se *curva hacia abajo*.

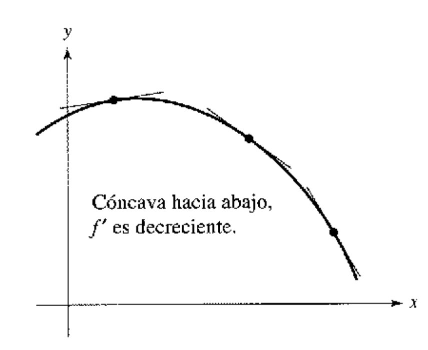
> **Definición de concavidad**
>
> Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es **cóncava hacia arriba** sobre I si f' es creciente en el intervalo y **cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en el intervalo.

La siguiente interpretación gráfica de concavidad es útil. (Ver el apéndice A para una prueba de estos resultados.)

1. Sea f derivable sobre un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia arriba* en I, entonces la gráfica de f yace *sobre* todas sus rectas tangentes en I. [Ver la figura 3.24*a*.]
2. Sea f derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia abajo* en I, entonces la gráfica de f yace *debajo de* todas sus rectas tangentes en I. [Ver la figura 3.24*b*.]

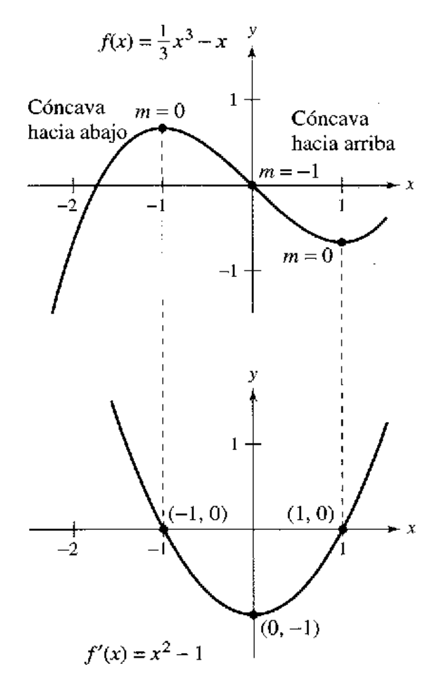


a) La gráfica de f se encuentra sobre sus rectas tangentes



b) La gráfica de f se encuentra debajo de sus rectas tangentes

Figura 3.24



La concavidad de f se relaciona con la pendiente de la derivada
Figura 3.25

Para determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba o hacia abajo, se necesita determinar los intervalos sobre los cuales f' sea creciente o decreciente. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x$$

es cóncava hacia abajo en el intervalo abierto $(-\infty, 0)$ debido a que $f'(x) = x^2 - 1$ es ahí decreciente. (Ver la figura 3.25.) De manera similar, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$ debido a que f' es creciente en $(0, \infty)$.

El siguiente teorema muestra cómo utilizar la *segunda* derivada de una función f para determinar intervalos sobre los cuales la gráfica de f es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Una prueba de este teorema sigue directamente del teorema 3.5 y de la definición de concavidad.

TEOREMA 3.7 Criterio de concavidad

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

NOTA Un tercer caso del teorema 3.7 podría ser que si $f''(x) = 0$ para todo x en I, entonces f es lineal. Notar, sin embargo, que la concavidad no se define para una recta. En otras palabras una recta no es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.

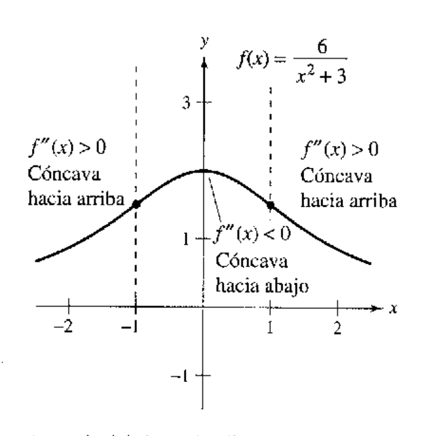
Para aplicar el teorema 3.7, se localizan los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o f'' no existe. Segundo, se usan los valores de x para determinar los intervalos de prueba. Por último, se prueba el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos de prueba.

EJEMPLO 1 **Determinación de la concavidad**

Determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica de

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.



A partir del signo de f'' se puede determinar la concavidad de la gráfica de f
Figura 3.26

Solución Se empieza observando que f es continua en toda la recta real. A continuación, se encuentra la segunda derivada de f.

$$f(x) = 6(x^2+3)^{-1} \qquad \text{Reescribir la función original.}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2+3)^{-2}(2x) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{-12x}{(x^2+3)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$ y f'' se define en toda la recta real, se debe probar f'' en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Los resultados se muestran en la tabla y en la figura 3.26.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

La función dada en el ejemplo 1 es continua en toda la recta real. Si hay valores de x en los cuales la función no es continua, dichos valores deben usarse junto con los puntos en los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe para formar los intervalos de prueba.

EJEMPLO 2 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución Al derivar dos veces se obtiene lo siguiente

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$ Escribir la función original.

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2}$$ Derivar.

$$= \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$ Primera derivada.

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-10)-(-10x)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}$$ Derivar.

$$= \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$ Segunda derivada.

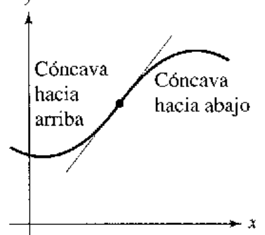
Figura 3.27

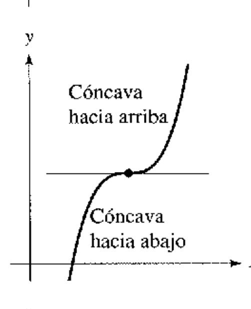
No hay puntos en los cuales $f''(x)=0$, pero en $x=\pm 2$ la función f no es continua, por lo que se prueba la concavidad en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,\infty)$, como se ilustra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.27.

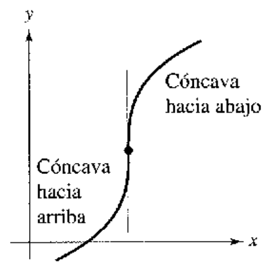
Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x=-3$	$x=0$	$x=3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3)>0$	$f''(0)<0$	$f''(3)>0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Puntos de inflexión

La gráfica en la figura 3.26 tiene dos puntos en los cuales cambia la concavidad. Si la recta tangente a la gráfica existe en un punto de este tipo, ese punto es un **punto de inflexión.** Se muestran tres tipos de puntos de inflexión en la figura 3.28.







La concavidad de f cambia en un punto de inflexión. Notar que la gráfica cruza su recta tangente en un punto de inflexión
Figura 3.28

Definición de punto de inflexión

Sea f una función que es continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$, entonces este punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto.

NOTA La definición de *punto de inflexión* dada en este libro requiere que la recta tangente exista en el punto de inflexión. Algunos libros no requieren esto. Por ejemplo, en este libro no se considera que la función

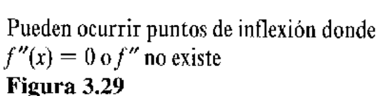
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

tenga un punto de inflexión en el origen, aun cuando la concavidad de la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Para localizar los *posibles* puntos de inflexión, se pueden determinar los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe. Esto es similar al procedimiento para localizar los extremos relativos de f.

TEOREMA 3.8 Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.



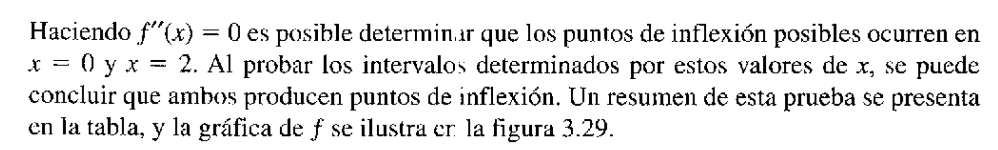
Pueden ocurrir puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ o f'' no existe
Figura 3.29

EJEMPLO 3 Determinación de los puntos de inflexión

Determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

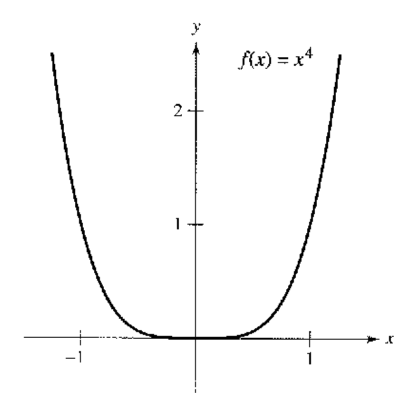
Solución La derivación doble produce lo siguiente.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \qquad \text{Encontrar la primera derivada.}$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) \qquad \text{Encontrar la segunda derivada.}$$



Haciendo $f''(x) = 0$ es posible determinar que los puntos de inflexión posibles ocurren en $x = 0$ y $x = 2$. Al probar los intervalos determinados por estos valores de x, se puede concluir que ambos producen puntos de inflexión. Un resumen de esta prueba se presenta en la tabla, y la gráfica de f se ilustra en la figura 3.29.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



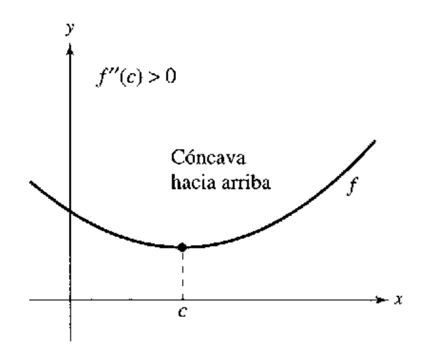
$f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión
Figura 3.30

El recíproco del teorema 3.8 por lo general no es cierto. Esto es, es posible que la segunda derivada sea 0 en un punto que *no* es un punto de inflexión. Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^4$ se muestra en la figura 3.30. La segunda derivada es 0 cuando $x = 0$, pero el punto $(0, 0)$ no es un punto de inflexión porque la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ambos intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$.

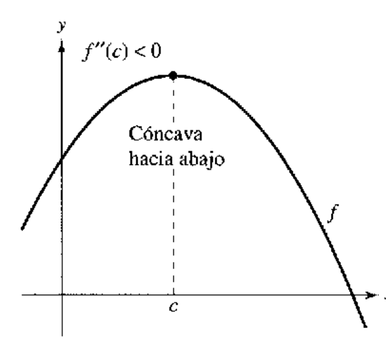
Considerar una función cúbica general de la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Se sabe que el valor de d tiene relación con la localización de la gráfica, pero no con el valor de la primera derivada en los valores dados de x. Gráficamente, esto es cierto debido a que los cambios en el valor de d desplazan a la gráfica hacia arriba o hacia abajo, pero no cambian su forma básica. Utilizar una calculadora para representar gráficamente varias funciones cúbicas con diferentes valores de c. Después proporcionar una explicación gráfica de por qué los cambios en c no afectan los valores de la segunda derivada.



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo relativo



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo relativo
Figura 3.31

Criterio de la segunda derivada

Además de un método para analizar la concavidad, es posible utilizar la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0$, $f(c)$ debe ser un mínimo relativo de f. De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0$, $f(c)$ debe ser un máximo relativo de f (ver la figura 3.31).

TEOREMA 3.9 Criterio de la segunda derivada

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo en c, un mínimo relativo en $(c, f(c))$ o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.

Demostración Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, existe un intervalo abierto I que contiene a c para el cual

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

para todo $x \neq c$ en I. Si $x < c$, entonces $x - c < 0$ y $f'(x) < 0$. Además, si $x > c$, entonces $x - c > 0$ y $f'(x) > 0$. De tal modo, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, y el criterio de la primera derivada implica que $f(c)$ es un mínimo relativo. Una demostración del segundo caso se deja al lector.

EJEMPLO 4 Empleo del criterio de la segunda derivada

Encontrar los extremos relativos correspondientes a $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Solución Empezando con la determinación de los puntos críticos de f.

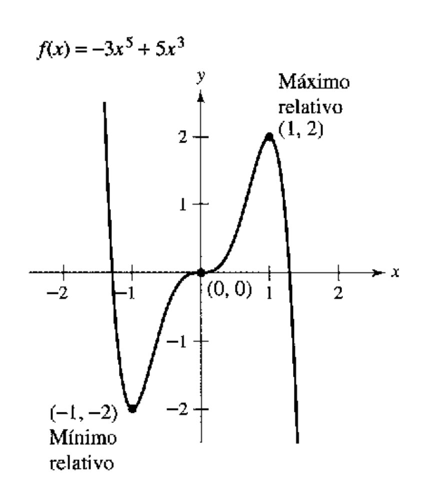
$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$x = -1, 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

Empleando

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$$

se puede aplicar el criterio de la segunda derivada como se indica a continuación.

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba



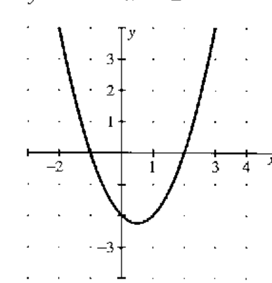
(0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo
Figura 3.32

Como el criterio de la segunda derivada no decide en (0, 0), es posible utilizar el criterio de la primera derivada y observar que f aumenta hacia la izquierda y hacia la derecha de $x = 0$. De tal modo, (0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo (aun cuando la gráfica tiene una recta tangente horizontal en este punto). La gráfica de f se muestra en la figura 3.32.

Ejercicios de la sección 3.4

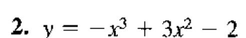
En los ejercicios 1 a 10, determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

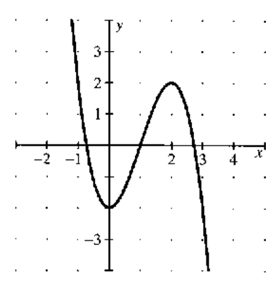
1. $y = x^2 - x - 2$



Generada por Derive

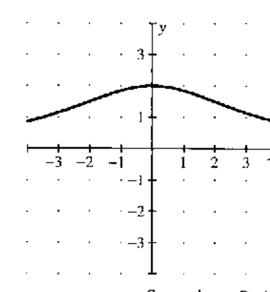
2. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$





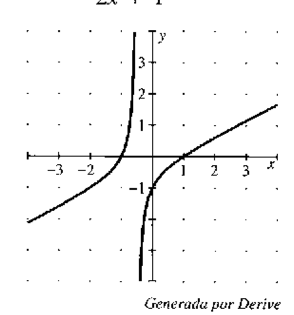
Generada por Derive

3. $f(x) = \dfrac{24}{x^2 + 12}$



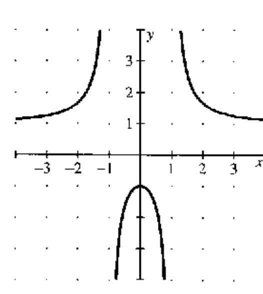
Generada por Derive

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$



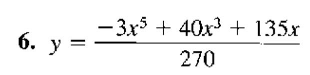
Generada por Derive

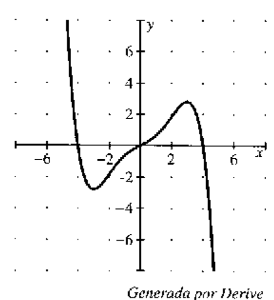
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$



Generada por Derive

6. $y = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$





Generada por Derive

7. $g(x) = 3x^2 - x^3$

8. $h(x) = x^5 - 5x + 2$

9. $y = 2x - \tan x, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

10. $y = x + \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}, \quad (-\pi, \pi)$

En los ejercicios 11 a 26, encontrar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

12. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

13. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

14. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

15. $f(x) = x(x - 4)^3$

16. $f(x) = x^3(x - 4)$

17. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

18. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

21. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

22. $f(x) = 2\csc\dfrac{3x}{2}, \quad (0, 2\pi)$

23. $f(x) = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad (0, 4\pi)$

24. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

25. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, 2\pi]$

26. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 27 a 40, encontrar todos los extremos relativos. Utilizar el criterio de la segunda derivada donde sea conveniente.

27. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

28. $f(x) = x^2 + 3x - 8$

29. $f(x) = (x - 5)^2$

30. $f(x) = -(x - 5)^2$

31. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

32. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

33. $g(x) = x^2(6 - x)^3$

34. $g(x) = -\frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 4)^2$

35. $f(x) = x^{2/3} - 3$

36. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

37. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

39. $f(x) = \cos x - x, \quad [0, 4\pi]$

40. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 41 a 44, recurrir a un sistema algebraico por computadora para analizar la función sobre el intervalo que se indica. *a)* Encontrar la primera y la segunda derivadas de la función. *b)* Determinar cualesquiera extremos relativos y puntos de inflexión. *c)* Representar gráficamente f, f' y f'' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas y establecer la relación entre el comportamiento de f y los signos de f' y f''.

41. $f(x) = 0.2x^2(x - 3)^3, \quad [-1, 4]$

42. $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}, \quad [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

43. $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x, \quad [0, \pi]$

44. $f(x) = \sqrt{2x}\operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi]$

Desarrollo de conceptos

45. Considerar a una función f tal que f' es creciente. Dibujar gráficas de f para *a)* $f' < 0$ y *b)* $f' > 0$.

46. Considerar a una función f tal que f' es decreciente. Dibujar gráficas de f para *a)* $f' < 0$ y *b)* $f' > 0$.

47. Dibujar la gráfica de una función f tal que *no* tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ aun cuando $f''(c) = 0$.

48. S representa las ventas semanales de un producto. ¿Qué puede decirse de S' y S'' en relación con cada uno de los siguientes enunciados?

a) El ritmo de cambio de las ventas está creciendo.

b) Las ventas están creciendo a un ritmo más lento.

c) El ritmo de cambio de las ventas es constante.

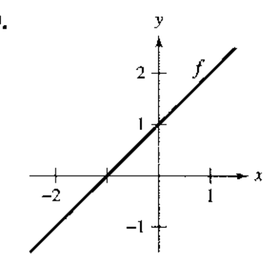
d) Las ventas están estables.

e) Las ventas están declinando, pero a una velocidad menor.

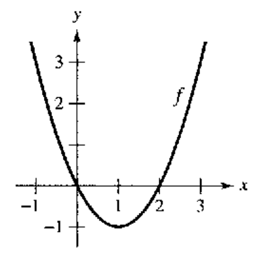
f) Las ventas se han desplomado y han empezado a crecer.

En los ejercicios 49 a 52, se muestra la gráfica de *f*. Representar gráficamente *f*, *f'* y *f''* en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

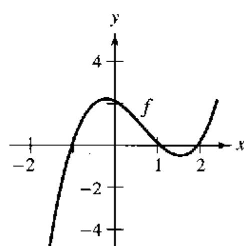
49.



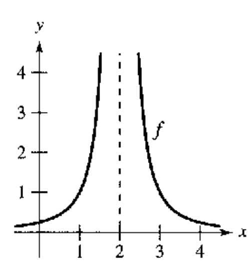
50.



51.



52.



Para pensar **En los ejercicios 53 a 56, dibujar la gráfica de una función *f* que tenga las características indicadas.**

53. $f(2) = f(4) = 0$
$f(3)$ si está definida.
$f'(x) < 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no existe.
$f'(x) > 0$ si $x > 3$
$f''(x) < 0, x \neq 3$

54. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x > 1$
$f''(x) < 0$

55. $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no existe.
$f'(x) < 0$ si $x > 3$
$f''(x) > 0, x \neq 3$

56. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x > 1$
$f''(x) > 0$

57. ***Para pensar*** La figura muestra la gráfica de f''. Dibujar una gráfica de f. (La respuesta no es única.)

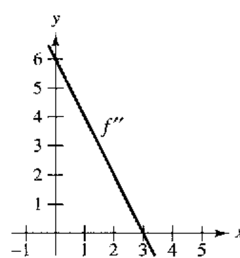


Figura para 57

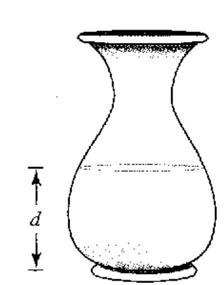


Figura para 58

58. ***Para pensar*** Se vierte agua en el florero que se muestra en la figura a una velocidad constante.

a) Representar gráficamente la profundidad d del agua en el florero como una función del tiempo.
b) ¿La función tiene algún extremo? Explicar.
c) Interpretar los puntos de inflexión de la gráfica de d.

59. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = (x - 2)^n$.

a) Emplear una calculadora para representar gráficamente f con respecto a $n = 1, 2, 3$ y 4. Utilizar las gráficas para realizar una conjetura acerca de la relación entre n y cualesquiera de los puntos de inflexión de la gráfica de f.
b) Verificar su conjetura del apartado *a*).

60. *a*) Representar gráficamente $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e identificar el punto de inflexión.
b) ¿Existe $f''(x)$ en el punto de inflexión? Explicar.

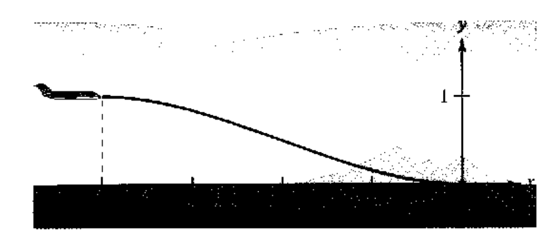
En los ejercicios 61 y 62, determinar a, *b*, *c* y *d* tales que la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaga las condiciones que se indican.

61. Máximo relativo: (3, 3)
Mínimo relativo: (5, 1)
Punto de inflexión: (4, 2)

62. Máximo relativo: (2, 4)
Mínimo relativo: (4, 2)
Punto de inflexión: (3, 3)

63. ***Trayectoria de planeo de un avión*** Un pequeño avión empieza su descenso desde una altura de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje (ver la figura).

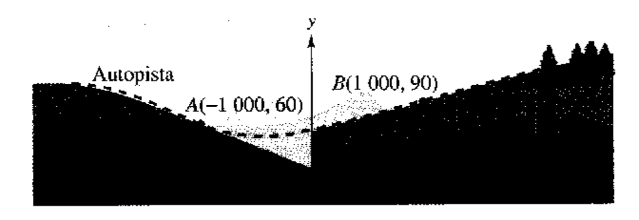
a) Encontrar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el intervalo $[-4, 0]$ que describe una trayectoria de planeo uniforme para el aterrizaje.
b) La función del apartado *a*) modela la trayectoria de planeo del avión. ¿Cuándo descendería el avión a la velocidad más rápida?



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de este tipo de modelación, ver el artículo "How Not to Land at Lake Tahoe!" de Richard Barshinger en *The American Mathematical Monthly*.

64. ***Diseño de autopistas*** Una sección de autopista que conecta dos laderas con inclinación de 6 y 4% se va a construir entre dos puntos que están separados por una distancia horizontal de 2 000 pies (ver la figura). En el punto en que se juntan las dos laderas, hay una diferencia de altura de 50 pies.

a) Diseñar una sección de la autopista que conecte las laderas modeladas por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(-1\,000 \le x \le 1\,000)$. En los puntos A y B, la pendiente del modelo debe igualar la inclinación de la ladera.
b) Utilizar una calculadora para representar el modelo.
c) Emplear una computadora para representar gráficamente la derivada del modelo.
d) Determinar la parte más inclinada de la sección de transición de la autopista.



65. ***Deflexión de viga*** La deflexión D de una viga de longitud L es $D = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2$, donde x es la distancia a un extremo de la viga. Determinar el valor de x que produce la máxima deflexión.

66. ***Gravedad específica*** Un modelo para el peso específico del agua S es

$$S = \frac{5.755}{10^8}T^3 - \frac{8.521}{10^6}T^2 + \frac{6.540}{10^5}T + 0.99987,\ 0 < T < 25$$

donde T es la temperatura del agua en grados Celsius.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar las coordenadas del valor máximo de la función.
b) Dibujar una gráfica de la función sobre el dominio especificado. (Utilizar un ajuste en el cual $0.996 \leq S \leq 1.001$.)
c) Estimar el peso específico del agua cuando $T = 20°$.

67. ***Costo promedio*** Un fabricante ha determinado que el costo total C de operación de una fábrica es $C = 0.5x^2 + 15x + 5\,000$, donde x es el número de unidades producidas. ¿En qué nivel de producción se minimizará el costo promedio por unidad? (El costo promedio por unidad es C/x.)

68. ***Costo de inventario*** El costo total C para pedir y almacenar x unidades es $C = 2x + 300\,000/x$. ¿Qué tamaño de pedido producirá un costo mínimo?

69. ***Crecimiento de ventas*** Las ventas anuales S de un nuevo producto están dadas por $S = \dfrac{5\,000t^2}{8 + t^2}$, $0 \leq t \leq 3$, donde t es el tiempo en años.

a) Completar la tabla. Después utilizarla para estimar cuándo las ventas anuales se incrementan a ritmo más alto.

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
S						

b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función S. Después emplear la gráfica para estimar cuándo las ventas anuales están creciendo más rápidamente.
c) Encontrar el tiempo exacto en el que las ventas anuales crecen al ritmo más alto.

70. ***Modelo matemático*** La tabla muestra la velocidad media S (palabras por minuto) a la que teclea un estudiante de mecanografía después de t semanas de asistir a clase.

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es $S = \dfrac{100t^2}{65 + t^2}$, $t > 0$.

a) Utilizar una calculadora para representar los datos y el modelo.
b) Utilizar la segunda derivada para determinar la concavidad de S. Comparar el resultado con la gráfica del apartado a).
c) ¿Cuál es el signo de la primera derivada para $t > 0$? Combinando esta información con la concavidad del modelo, ¿qué se puede inferir sobre la velocidad cuando t crece?

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 71 a 74, utilizar una calculadora para representar gráficamente la función. Representar después las aproximaciones lineal y cuadrática**

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

en la misma ventana de observación. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = a$. ¿Cómo cambia la aproximación cuando se aleja de $x = a$?

	Función	*Valor de a*
71.	$f(x) = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$a = \dfrac{\pi}{4}$
72.	$f(x) = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$a = 0$
73.	$f(x) = \sqrt{1 - x}$	$a = 0$
74.	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$	$a = 2$

75. Utilizar una calculadora para representar $y = x\operatorname{sen}(1/x)$. Demostrar que la gráfica es cóncava hacia abajo hacia la derecha de $x = 1/\pi$.

76. Mostrar que el punto de inflexión de $f(x) = x(x - 6)^2$ se encuentra a medio camino entre los extremos relativos de f.

77. Comprobar que toda función cúbica con tres distintos ceros reales tiene un punto de inflexión cuya coordenada x es el promedio de los tres ceros.

78. Mostrar que el polinomio cúbico $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene exactamente un punto de inflexión (x_0, y_0), donde

$$x_0 = \frac{-b}{3a} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Utilizar esta fórmula para determinar el punto de inflexión de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 79 a 82, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar la razón o proporcionar un contraejemplo.**

79. La gráfica de todo polinomio cúbico tiene precisamente un punto de inflexión.

80. La gráfica de $f(x) = 1/x$ es cóncava hacia abajo para $x < 0$ y cóncava hacia arriba para $x > 0$, y por ello tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

81. Si $f'(c) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en $x = c$.

82. Si $f''(2) = 0$, entonces la gráfica de f debe tener un punto de inflexión en $x = 2$.

En los ejercicios 83 y 84, considerar que f y g representan funciones derivables tales que $f'' \neq 0$ y $g'' \neq 0$.

83. Demostrar que si f y g son cóncavas hacia arriba en el intervalo (a, b), entonces $f + g$ es también cóncava hacia arriba en (a, b).

84. Demostrar que si f y g son positivas, crecientes y cóncavas hacia arriba en el intervalo (a, b), entonces fg es también cóncava hacia arriba en (a, b).

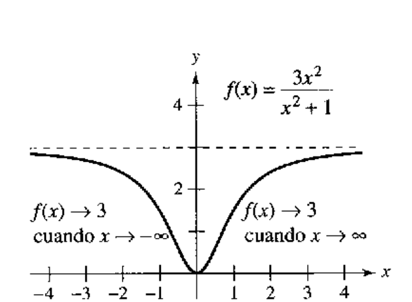
Sección 3.5 Límites al infinito

- **Determinar límites (finitos) al infinito.**
- **Determinar las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de una función.**
- **Determinar límites infinitos en el infinito.**

Límites en el infinito

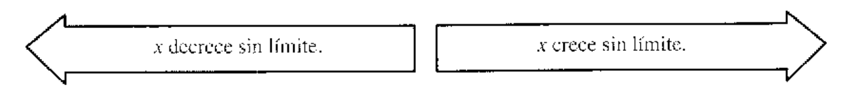
Esta sección analiza el "comportamiento final (o asintótico)" de una función en un intervalo *infinito*. Considerar la gráfica de

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$$



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞ es 3
Figura 3.33

como se ilustra en la figura 3.33. Gráficamente, puede verse que los valores de $f(x)$ parecen aproximarse a 3 cuando x crece o decrece sin límite. Se puede llegar numéricamente a las mismas conclusiones, como se indica en la tabla.



x	$-\infty\leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to\infty$
$f(x)$	$3\leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$

$f(x)$ se aproxima 3. $f(x)$ se aproxima 3.

La tabla sugiere que el valor de $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x crece sin límite ($x\to\infty$). De manera similar, $f(x)$ tiende a 3 cuando x decrece sin límite ($x\to-\infty$). Estos **límites en el infinito** se denotan mediante

NOTA La afirmación $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ o $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$, significa que el límite existe y el límite es igual a L.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3 \qquad \text{Límite en infinito negativo.}$$

y

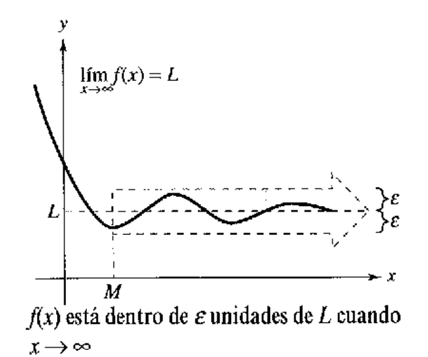
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=3 \qquad \text{Límite en infinito positivo.}$$

Decir que un enunciado es cierto cuando x crece *sin límite* significa que para algún número real (grande) M, el enunciado es verdadero para *todo* x en el intervalo $\{x: x>M\}$. La siguiente definición recurre a este concepto.

Definición de límites al infinito

Sea L un número real.

1. El enunciado $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ significa que para cada $\varepsilon>0$ existe un $M>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $x>M$.
2. El enunciado $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ significa que para cada $\varepsilon>0$ existe un $N<0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $x<N$.



$f(x)$ está dentro de ε unidades de L cuando $x\to\infty$
Figura 3.34

La definición de un límite al infinito se muestra en la figura 3.34. En esta figura, se advierte que para un número positivo dado ε existe un número positivo M tal que, para $x>M$, la gráfica de f estará entre las rectas horizontales dadas por $y=L+\varepsilon$ y $y=L-\varepsilon$.

Asíntotas horizontales

En la figura 3.34, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = L$ cuando x crece sin límite. La recta $y = L$ recibe el nombre de **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

Utilizar una herramienta gráfica para hacer la representación

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{3x^2 + 2x - 16}.$$

Describir todas las características importantes de la gráfica. ¿Se puede encontrar una sola ventana de observación que muestre con claridad todas esas características? Explicar el razonamiento.

¿Cuáles son las asíntotas horizontales de la gráfica, de manera que ésta se encuentre dentro de 0.001 unidades de su asíntota horizontal? Explicar el razonamiento.

Definición de una asíntota horizontal

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Advierta que a partir de esta definición se concluye que la gráfica de una *función* de x puede tener a lo mucho dos asíntotas horizontales (una hacia la derecha y otra hacia la izquierda).

Los límites al infinito tienen muchas de las propiedades de los límites que se estudiaron en la sección 1.3. Por ejemplo si existen tanto $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

y

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right].$$

Se cumplen propiedades similares para límites en $-\infty$.

Cuando se evalúan límites al infinito, resulta de utilidad el siguiente teorema. (Una prueba de este teorema se da en el apéndice A.)

TEOREMA 3.10 Límites al infinito

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$ entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

EJEMPLO 1 Determinación del límite al infinito

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Solución Utilizando el teorema 3.10, es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(5 - \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} && \text{Propiedad de límites.}\\ &= 5 - 0\\ &= 5.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un límite al infinito

Determinar el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Solución Advertir que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} (2x-1) \to \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} (x+1) \to \infty \end{cases}$$

NOTA Cuando se encuentra una forma independiente tal como la del ejemplo 2, se debe dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x en el *denominador*.

Esto produce una **forma indeterminada** $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver este problema, es posible dividir tanto el numerador como el denominador entre x. Después de eso, el límite puede evaluarse como se muestra.

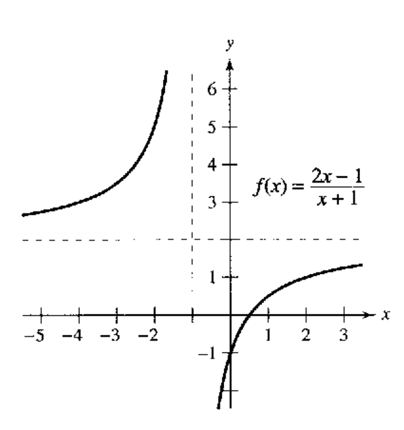
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}} \qquad \text{Tomar límites del numerador y el denominador.}$$

$$= \frac{2-0}{1+0} \qquad \text{Aplicar el teorema 3.10.}$$

$$= 2$$



$y = 2$ es una asíntota horizontal
Figura 3.35

De tal modo, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal a la derecha. Al tomar el límite cuando $x \to -\infty$, puede verse que $y = 2$ también es una asíntota horizontal hacia la izquierda. La gráfica de la función se ilustra en la figura 3.35.

TECNOLOGÍA Se puede verificar que el límite del ejemplo 2 es razonable evaluando $f(x)$ para unos pocos valores positivos grandes de x. Por ejemplo,

$$f(100) \approx 1.9703, \quad f(1\,000) \approx 1.9970, \quad \text{y} \quad f(10\,000) \approx 1.9997.$$

Otra forma de verificar que el límite obtenido es razonable consiste en representar la gráfica con una calculadora. Por ejemplo, en la figura 3.36, la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

se muestra con la recta horizontal $y = 2$. Notar que cuando x crece, la gráfica de f se mueve más y más cerca de su asíntota horizontal.

Cuando x aumenta, la gráfica de f se mueve más y más cerca a la recta $y = 2$
Figura 3.36

EJEMPLO 3 Una comparación de tres funciones racionales

Determinar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x^2+1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5}{3x^2+1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5}{3x^2+1}$

Solución En cada caso, el intento de evaluar el límite produce la forma indeterminada ∞/∞.

a) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2/x)+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

b) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

c) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{\infty}{3}$$

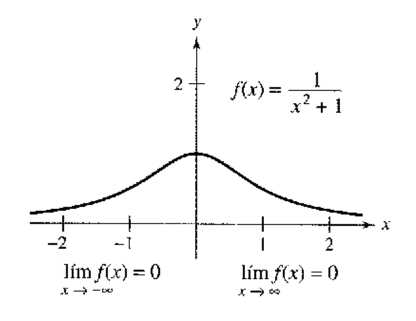
Es posible concluir que el límite *no existe* porque el numerador aumenta sin límite mientras el denominador se aproxima a 3.

The Granger Collection

MARIA AGNESI (1718-1799)
Agnesi fue una de las pocas mujeres en recibir crédito por aportaciones importantes a las matemáticas antes del siglo XX. Casi al cumplir 20 años, escribió el primer texto que incluyó tanto cálculo diferencial como integral. Alrededor de los 30, fue miembro honorario de la facultad en la Universidad de Bologna.

Estrategia para determinar límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

1. Si el grado del numerador es *menor* que el grado de denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual al* grado de denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es *mayor que* el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.



f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$
Figura 3.37

Recurrir a esta estrategia para verificar los resultados del ejemplo 3. Estos límites parecen razonables cuando se considera que para grandes valores de x, el término de la potencia más alta de la función racional es lo que más "influye" en la determinación del límite. Por ejemplo, el límite cuando x tiende a infinito de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es 0 porque el denominador supera al numerador cuando x aumenta o disminuye sin límite, como se muestra en la figura 3.37.

La función que se muestra en la figura 3.37 es un caso especial de un tipo de curva estudiado por la matemática italiana Maria Gaetana Agnesi. La fórmula general de esta función es

$$f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2} \qquad \text{Bruja de Agnesi.}$$

y, a través de la traducción errónea de la palabra italiana *vertéré*, la curva ha llegado a conocerse como la bruja (o hechicera) de Agnesi. El trabajo de Agnesi con esta curva apareció por primera vez en un amplio libro de cálculo que se publicó en 1748.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para mayor información sobre las contribuciones de las mujeres a las matemáticas, ver el artículo "Why Women Succeed in Mathematics" de Mona Fabricant, Sylvia Svitak, y Patricia Clark Kenschaft en *Mathematics Teacher*.

En la figura 3.37, se puede observar que la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ tiende a la misma asíntota horizontal hacia la derecha que hacia la izquierda. Esto siempre es cierto para las funciones racionales. Las funciones que no son racionales, sin embargo, pueden tender a diferentes asíntotas horizontales hacia la derecha y hacia la izquierda. Esto se demuestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Una función con dos asíntotas horizontales

Determinar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

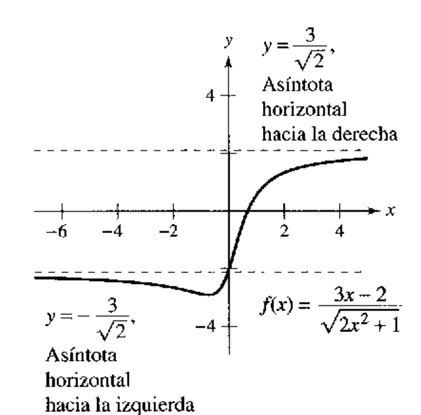
Solución

a) Para $x > 0$, es posible escribir $x = \sqrt{x^2}$. De tal modo, dividiendo tanto el numerador como el denominador entre x, se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}$$

y se puede tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



Las funciones que no son racionales pueden tener diferentes asíntotas horizontales derecha e izquierda
Figura 3.38

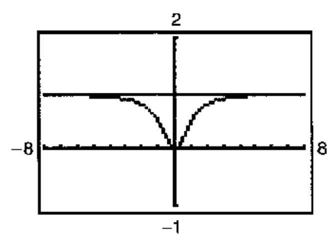
b) Para $x < 0$, puede escribirse $x = -\sqrt{x^2}$. De manera que al dividir tanto el denominador como el numerador entre x, se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}$$

y es posible tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{-\sqrt{2+0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

La gráfica de $f(x) = (3x-2)/\sqrt{2x^2+1}$ se presenta en la figura 3.38.



La asíntota horizontal parece ser la recta $y = 1$ pero en realidad es la recta $y = 2$
Figura 3.39

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Si se utiliza una calculadora para auxiliarse en la estimación de un límite, cerciorarse de confirmar también la estimación en forma analítica (las imágenes que muestra una calculadora pueden ser erróneas). Por ejemplo, la figura 3.39 muestra una vista de la gráfica de

$$y = \frac{2x^3 + 1\,000x^2 + x}{x^3 + 1\,000x^2 + x + 1\,000}.$$

De acuerdo con esta imagen, sería convincente pensar que la gráfica tiene a $y = 1$ como una asíntota horizontal. Un enfoque analítico indica que la asíntota horizontal es en realidad $y = 2$. Confirmar lo anterior agrandando la ventana de la observación de la calculadora.

En la sección 1.3 (ejemplo 9) se vio cómo el teorema del emparedado se puede utilizar para evaluar límites que incluyen funciones trigonométricas. Este teorema también es válido para límites al infinito.

EJEMPLO 5 Límites que implican funciones trigonométricas

Encontrar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solución

a) Cuando x tiende a infinito, la función seno oscila entre 1 y -1. De tal manera, este límite no existe.

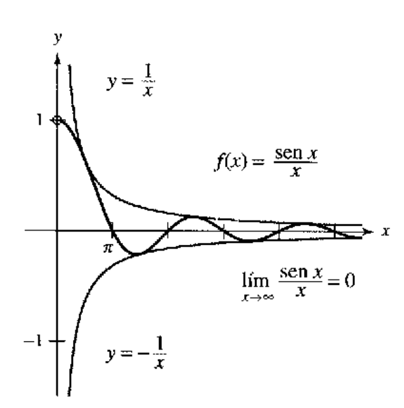
b) Como $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, se concluye que para $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$$

donde $\lim\limits_{x\to\infty} (-1/x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (1/x) = 0$. De tal modo, por el teorema del emparedado, es posible obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

como se muestra en la figura 3.40.



Cuando x aumenta sin límite $f(x)$ tiende a cero
Figura 3.40

EJEMPLO 6 Nivel de oxígeno en un estanque

Suponga que $f(t)$ mide el nivel de oxígeno en un estanque, donde $f(t) = 1$ es el nivel normal (no contaminado) y el tiempo t se mide en semanas. Cuando $t = 0$, se descarga desperdicio orgánico en el estanque, y como el material de desperdicio se oxida, el nivel de oxígeno en el estanque es

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}.$$

¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno existe en el estanque después de una semana? ¿Después de dos semanas? ¿Después de 10 semanas? ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?

Solución Cuando $t = 1$, 2 y 10, los niveles de oxígeno son como se muestra.

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 50\%$$

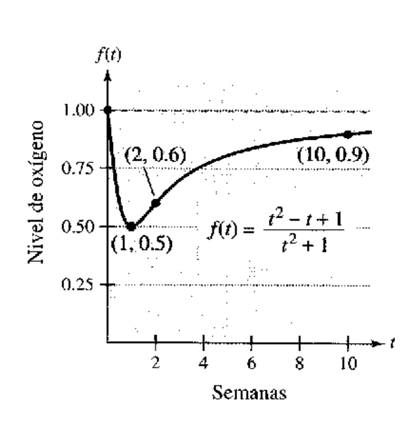
$$f(2) = \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} = 60\%$$

$$f(10) = \frac{10^2 - 10 + 1}{10^2 + 1} = \frac{91}{101} \approx 90.1\%$$

Para encontrar el límite cuando t tiende a infinito, divida el numerador y el denominador entre t^2 con el fin de obtener

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - (1/t) + (1/t^2)}{1 + (1/t^2)} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 1 = 100\%.$$

Ver la figura 3.41.



El nivel de oxígeno en el estanque se aproxima a nivel normal de 1 cuando t tiende a ∞
Figura 3.41

Límites infinitos al infinito

Muchas funciones no tienden a un límite finito cuando x crece (o decrece) sin límite. Por ejemplo, ninguna función polinómica tiene un límite finito en infinito. La siguiente definición se usa para describir el comportamiento de funciones polinómicas y de otras funciones al infinito.

NOTA La determinación de si una función tiene un límite infinito al infinito es útil al analizar el "comportamiento asintótico" de la gráfica. Se verán ejemplos de esto en la sección 3.6 sobre dibujo de curvas.

Definición de límites infinitos al infinito

Sea f una función definida en el intervalo (a, ∞).

1. El enunciado $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que para cada número positivo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x > N$.
2. El enunciado $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ significa que para cada número negativo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $x > N$.

Pueden darse definiciones similares para los enunciados $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

EJEMPLO 7 Determinación de límites infinitos al infinito

Determinar cada límite.

a) $\lim_{x\to\infty} x^3$ *b)* $\lim_{x\to-\infty} x^3$

Solución

a) Cuando x crece sin límite, x^3 también crece sin límite. De tal modo, es posible escribir $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

b) Cuando x decrece sin límite, x^3 también decrece sin límite. En consecuencia, se puede escribir $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

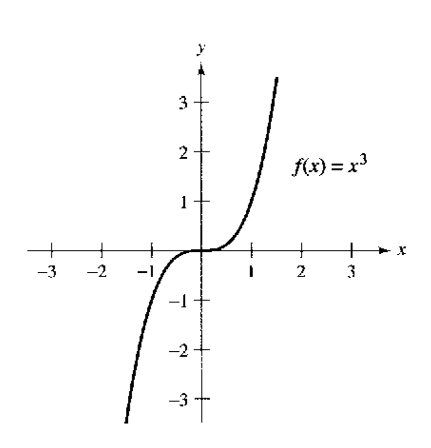


Figura 3.42

La gráfica de $f(x) = x^3$ en la figura 3.42 ilustra estos dos resultados, los cuales concuerdan con el criterio del coeficiente dominante para las funciones polinómicas que se describen en la sección P.3.

EJEMPLO 8 Determinación de límites infinitos al infinito

Encontrar cada límite.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x + 1}$ *b)* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x + 1}$

Solución Una manera de evaluar cada uno de estos límites consiste en utilizar una división larga para reescribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y de una función racional.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim_{x\to\infty}\left(2x - 6 + \frac{6}{x + 1}\right) = \infty$$

$$b)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim_{x\to-\infty}\left(2x - 6 + \frac{6}{x + 1}\right) = -\infty$$

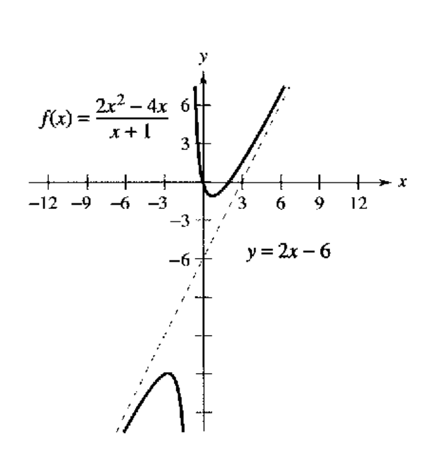


Figura 3.43

Los enunciados anteriores pueden interpretarse diciendo que cuando x tiende a $\pm\infty$, la función $f(x) = (2x^2 - 4x)/(x + 1)$ se comporta como la función $g(x) = 2x - 6$. En la sección 3.6 esto se describe en forma gráfica afirmando que la recta $y = 2x - 6$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, como se muestra en la figura 3.43.

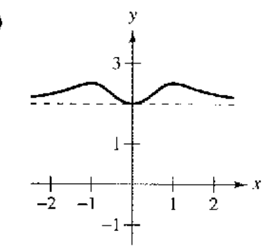
Ejercicios de la sección 3.5

En los ejercicios 1 y 2, describir lo que significa el enunciado.

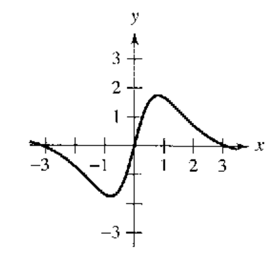
1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

En los ejercicios 3 a 8, hacer que corresponda la función con una de las gráficas [*a*), *b*), *c*), *d*), *e*) o *f*)] utilizando como ayuda asíntotas horizontales.

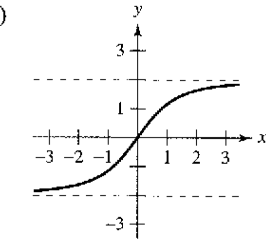
a)



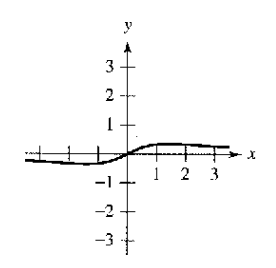
b)



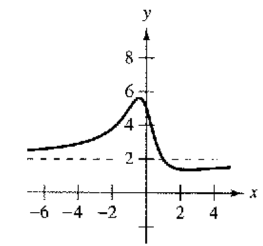
c)



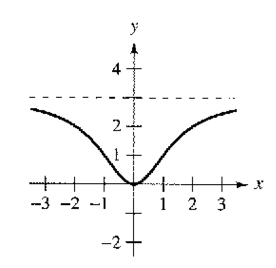
d)



e)



f)



3. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$ **4.** $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ **6.** $f(x) = 2 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

7. $f(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$ **8.** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 9 a 14, utilizar una calculadora para completar la tabla y estimar el límite cuando x tiende a infinito. Utilizar después una calculadora para representar gráficamente la función y estimar gráficamente el límite.**

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

9. $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$ **10.** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$

11. $f(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$ **12.** $f(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

13. $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **14.** $f(x) = 4 + \dfrac{3}{x^2 + 2}$

En los ejercicios 15 y 16, determinar $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$, si es posible.

15. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10$

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ *b*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^4}$

16. $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ *b*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

En los ejercicios 17 a 20, encontrar cada límite, si es posible.

17. *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$ **18.** *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x}{3x^3 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$ *b*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x}{3x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$ *c*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x^2}{3x - 1}$

19. *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x^2 - 4}$ **20.** *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x^{3/2} - 4}$ *b*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^{3/2} + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x - 4}$ *c*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4\sqrt{x} + 1}$

En los ejercicios 21 a 34, encontrar el límite.

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$ **22.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + 2}{9x^3 - 2x^2 + 7}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **24.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4 + \dfrac{3}{x}\right)$

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2}{x + 3}$ **26.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{x^2}\right)$

27. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$ **28.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$ **30.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

31. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ **32.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$ **34.** $\lim\limits_{x \to \infty} \cos \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar una calculadora para representar gráficamente la función e identificar cualquier asíntota horizontal.

35. $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$

36. $f(x) = \dfrac{|3x+2|}{x-2}$

37. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

38. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1}$

En los ejercicios 39 y 40, determinar el límite. (*Sugerencia*: Sea $x = 1/t$ y encontrar el límite cuando $t \to 0^+$.)

39. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \tan \frac{1}{x}$

En los ejercicios 41 a 46, encontrar el límite. (*Sugerencia*: Tratar la expresión como una fracción cuyo denominador es 1 y racionalizar el numerador.) Utilizar una calculadora para verificar su resultado.

41. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2+3}\right)$

42. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+1}\right)$

43. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right)$

44. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(3x + \sqrt{9x^2-x}\right)$

45. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(4x - \sqrt{16x^2-x}\right)$

46. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x^2+x}\right)$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 47 a 50, utilizar una calculadora para completar la tabla y estimar el límite cuando x tiende a infinito. Emplear después una calculadora para representar gráficamente la función y estimar el límite. Por último, encontrar el límite analíticamente y comparar los resultados con las estimaciones.**

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

47. $f(x) = x - \sqrt{x(x-1)}$

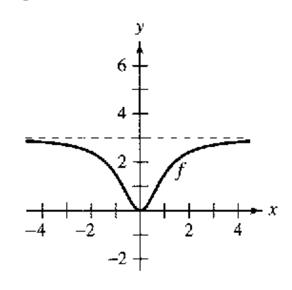
48. $f(x) = x^2 - x\sqrt{x(x-1)}$

49. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{2x}$

50. $f(x) = \dfrac{x+1}{x\sqrt{x}}$

Desarrollo de conceptos

51. La gráfica de una función se muestra a continuación.



a) Dibujar f'.

b) Utilizar las gráficas para estimar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

c) Explicar las respuestas que se obtuvieron en el apartado *b*).

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

52. Dibujar una gráfica de una función derivable que satisfaga las siguientes condiciones y tenga $x = 2$ como su único punto crítico.

$f'(x) < 0$ para $x < 2$ $\qquad f'(x) > 0$ para $x > 2$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 6$

53. ¿Es posible dibujar una gráfica de una función que satisface las condiciones del ejercicio 52 y que *no* tiene puntos de inflexión? Explicar.

54. Si f es una función continua tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$, determinar, si es posible, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ para cada condición especificada.

a) La gráfica de f es simétrica al eje y.

b) La gráfica de f es simétrica al origen.

En los ejercicios 55 a 72, dibujar la gráfica de la función utilizando extremos, intersecciones, simetría y asíntotas. Emplear después una calculadora para verificar el resultado.

55. $y = \dfrac{2+x}{1-x}$

56. $y = \dfrac{x-3}{x-2}$

57. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

58. $y = \dfrac{2x}{9-x^2}$

59. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

60. $y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

61. $y = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$

62. $y = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$

63. $xy^2 = 4$

64. $x^2y = 4$

65. $y = \dfrac{2x}{1-x}$

66. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

67. $y = 2 - \dfrac{3}{x^2}$

68. $y = 1 + \dfrac{1}{x}$

69. $y = 3 + \dfrac{2}{x}$

70. $y = 4\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

71. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$

72. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

En los ejercicios 73 a 82, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar la gráfica de la función. Marcar cualquier extremo y/o asíntota que existan.

73. $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

76. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2}$

77. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

78. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

79. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$

80. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}$

81. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-2}\right), \quad x > 3$

82. $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{x}$

En los ejercicios 83 y 84, *a*) emplear una calculadora para representar gráficamente *f* y *g* en la misma ventana de observación, *b*) verificar algebraicamente que *f* y *g* representan la misma función y *c*) hacer un acercamiento suficiente para que la gráfica aparezca como una recta. ¿Qué ecuación parece tener esta recta? (Notar que todos los puntos en los cuales la función no es continua no se observan con facilidad cuando se realiza el acercamiento.)

83. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x(x-3)}$

$g(x) = x + \dfrac{2}{x(x-3)}$

84. $f(x) = -\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{2x^2}$

$g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$

85. ***Costo promedio*** Un negocio tiene un costo de $C = 0.5x + 500$ para producir x unidades. El costo promedio por unidad es

$$\overline{C} = \frac{C}{x}.$$

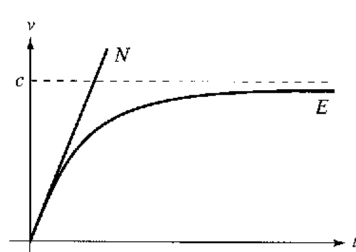
Encontrar el límite de $\overline{C}$ cuando x tiende a infinito.

86. ***Eficiencia de un motor*** La eficiencia de un motor de combustión interna es

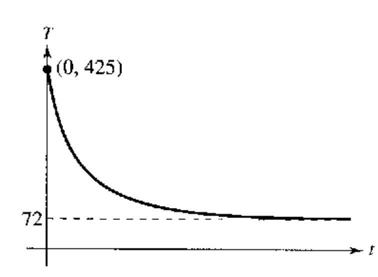
$$\text{Eficiencia } (\%) = 100\left[1 - \frac{1}{(v_1/v_2)^c}\right]$$

donde v_1/v_2 es la razón entre el gas no comprimido y el gas comprimido y c es una constante positiva que depende del diseño del motor. Encontrar el límite de la eficiencia cuando la razón de compresión se acerca a infinito.

87. ***Física*** La primera ley de movimiento de Newton y la teoría especial de la relatividad de Einstein difieren en lo que respecta al comportamiento de las partículas cuando su velocidad se acerca a la velocidad de la luz, c. Las funciones N y E representan la velocidad predicha, v, con respecto al tiempo, t, para una partícula acelerada por una fuerza constante. Desarrollar una condición límite que describa a cada teoría.



88. ***Temperatura*** La gráfica muestra la temperatura T, en grados Fahrenheit, de un pastel de manzana t segundos después de que se saca del horno y se pone en una repisa de enfriamiento.



a) Determinar $\lim\limits_{t \to 0^+} T$. ¿Qué representa este límite?

b) Encontrar $\lim\limits_{t \to \infty} T$. ¿Qué representa este límite?

89. ***Modelo matemático*** La tabla muestra los tiempos del récord mundial para la carrera de una milla, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1900 y y es el tiempo en minutos y segundos.

t	23	33	45	54
y	4:10.4	4:07.6	4:01.3	3:59.4

t	58	66	79	85	99
y	3:54.5	3:51.3	3:48.9	3:46.3	3:43.1

Un modelo para los datos es

$$y = \frac{3.351t^2 + 42.461t - 543.730}{t^2}$$

donde los segundos se han cambiado a partes decimales de un minuto.

a) Emplear una calculadora para dibujar los datos y representar el modelo.

b) ¿Parece haber un tiempo límite para la carrera de una milla? Explicar la respuesta.

90. ***Modelo matemático*** La tabla muestra la velocidad media S a la que un estudiante de mecanografía teclea t semanas después de iniciar su aprendizaje.

t	5	10	15	20	25	30
S	28	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es $S = \dfrac{100t^2}{65 + t^2}$, $t > 0$.

a) Recurrir a una calculadora para dibujar los datos y representar el modelo.

b) ¿Parece haber alguna velocidad para mecanografiar límite? Explicar.

91. ***Modelo matemático*** Una zona de calor se une a un intercambiador de calor de un sistema calefactor. La temperatura T (grados Celsius) se registra t segundos después de que el horno empieza su operación. Los resultados para los primeros dos minutos se registran en la tabla.

t	0	15	30	45	60
T	25.2°	36.9°	45.5°	51.4°	56.0°

t	75	90	105	120
T	59.6°	62.0°	64.0°	65.2°

a) Utilizar los programas para el cálculo de regresión de una calculadora para encontrar un modelo de la forma $T_1 = at^2 + bt + c$ para los datos.

b) Utilizar una calculadora para representar T_1.

c) Un modelo racional para los datos es $T_2 = \dfrac{1\,451 + 86t}{58 + t}$. Emplear una calculadora para representar el modelo.

d) Determinar $T_1(0)$ y $T_2(0)$.

e) Encontrar $\lim\limits_{t \to \infty} T_2$.

f) Interpretar el resultado del apartado *e*) en el contexto del problema. ¿Es posible efectuar este tipo de análisis utilizando T_1? Explicar.

92. ***Modelo matemático*** Un recipiente contiene 5 litros de una solución salina al 25%. La tabla muestra las concentraciones C de la mezcla después de agregar x litros de una solución salina al 75% al recipiente.

x	0	0.5	1	1.5	2
C	0.25	0.295	0.333	0.365	0.393

x	2.5	3	3.5	4
C	0.417	0.438	0.456	0.472

a) Utilizar las características de regresión de una calculadora para encontrar un modelo de la forma $C_1 = ax^2 + bx + c$ para los datos.

b) Utilizar una calculadora para representar C_1.

c) Un modelo racional para estos datos es $C_2 = \dfrac{5 + 3x}{20 + 4x}$. Utilizar una calculadora para representar C_2.

d) Determinar $\lim\limits_{x\to\infty} C_1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} C_2$. ¿Qué modelo representa mejor la concentración de la mezcla? Explicar.

e) ¿Cuál es la concentración límite?

93. Una recta con una pendiente m pasa por el punto $(0, 4)$.

a) Escribir la distancia d entre la recta y el punto $(3, 1)$ como una función de m.

b) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la ecuación del apartado *a*).

c) Determinar $\lim\limits_{m\to\infty} d(m)$ y $\lim\limits_{m\to-\infty} d(m)$. Interpretar geométricamente los resultados.

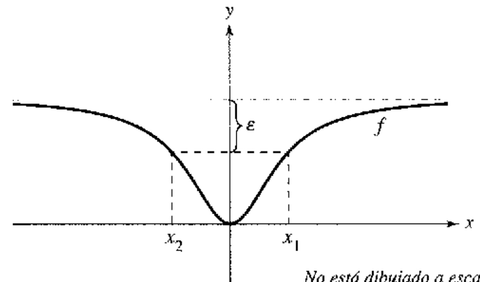
94. Una recta con pendiente m pasa por el punto $(0, -2)$.

a) Escribir la distancia d entre la recta y el punto $(4, 2)$ como una función de m.

b) Emplear una calculadora para representar gráficamente la ecuación del apartado *a*).

c) Determinar $\lim\limits_{m\to\infty} d(m)$ y $\lim\limits_{m\to-\infty} d(m)$. Interpretar geométricamente los resultados.

95. Se muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 2}$.



No está dibujado a escala

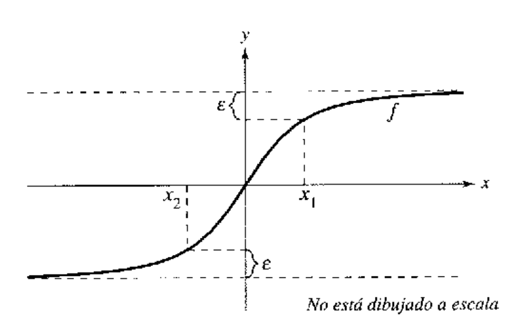
a) Determinar $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Determinar x_1 y x_2 en términos de ε.

c) Determinar M, donde $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > M$.

d) Determinar N, donde $N < 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x < N$.

96. Se muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.



No está dibujado a escala

a) Encontrar $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $K \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar x_1 y x_2 en términos de ε.

c) Determinar M, donde $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > M$

d) Determinar N, donde $N < 0$, tal que $|f(x) - K| < \varepsilon$ para $x < N$.

97. Considerar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Utilizar la definición de límites al infinito para encontrar los valores de M que corresponden a *a*) $\varepsilon = 0.5$ y *b*) $\varepsilon = 0.1$.

98. Considerar $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Utilizar la definición de límites al infinito para encontrar los valores de N que correspondan a *a*) $\varepsilon = 0.5$ y *b*) $\varepsilon = 0.1$.

En los ejercicios 99 a 102, usar la definición de límites al infinito para comprobar el límite.

99. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

100. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

101. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

102. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$

103. Demostrar que si $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x = a_0$ y $q(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0 (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m. \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}$$

104. Utilizar la definición de límites infinitos al infinito para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 105 y 106, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre dicha falsedad.**

105. Si $f'(x) > 0$ para todo número real x, entonces f es creciente sin límite.

106. Si $f''(x) < 0$ para todo número real x, entonces f es decreciente sin límite.

Sección 3.6 Análisis de gráficas

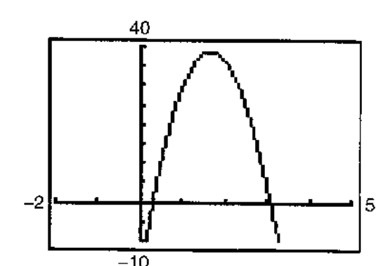
- **Analizar y trazar la gráfica de una función.**

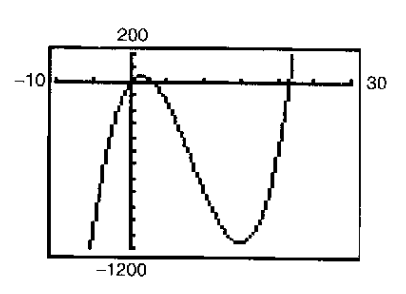
Análisis de la gráfica de una función

Sería difícil exagerar la importancia de usar gráficas en matemáticas. La introducción de la geometría analítica por parte de Descartes contribuyó de manera significativa a los rápidos avances en el cálculo que se iniciaron durante la mitad del siglo XVII. En palabras de Lagrange: "Mientras el álgebra y la geometría recorrieron caminos independientes, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Sin embargo, cuando estas dos ciencias se juntaron, extrajeron una de la otra una fresca vitalidad y a partir de ahí marcharon a gran velocidad hacia la perfección."

Hasta ahora, se han estudiado varios conceptos que son útiles al analizar la gráfica de una función.

- Intersecciones con los ejes x y y (sección P.1)
- Simetría (sección P.1)
- Dominio y rango o recorrido (sección P.3)
- Continuidad (sección 1.4)
- Asíntotas verticales (sección 1.5)
- Derivabilidad (sección 2.1)
- Extremos relativos (sección 3.1)
- Concavidad (sección 3.4)
- Puntos de inflexión (sección 3.4)
- Asíntotas horizontales (sección 3.5)
- Límites infinitos al infinito (sección 3.5)





Diferentes ventanas de observación para la gráfica de $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20$
Figura 3.44

Al dibujar la gráfica de una función, ya sea en forma manual o por medio de una herramienta gráfica, recordar que normalmente no es posible mostrar la gráfica *entera*. La decisión en cuanto a la parte de la gráfica que se decide mostrar es muchas veces crucial. Por ejemplo, ¿cuál de las ventanas de observación en la figura 3.44 representa mejor a la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20?$$

Al ver ambas imágenes, es claro que la segunda ventana de observación proporciona una representación más completa de la gráfica. Sin embargo, ¿una tercera ventana de observación revelaría otras porciones interesantes de la gráfica? Para responder a esta pregunta, es necesario utilizar el cálculo para interpretar la primera y la segunda derivadas. A continuación se presentan unas estrategias para determinar una buena ventana de observación de la gráfica de una función.

Estrategia para analizar la gráfica de una función

1. Determinar el dominio y el rango de la función.
2. Determinar las intersecciones, asíntotas y simetría de la gráfica.
3. Localizar los valores de x para los cuales $f'(x)$ y $f''(x)$ son cero o no existen. Usar los resultados para determinar extremos relativos y puntos de inflexión.

NOTA En estas estrategias, advertir la importancia del *álgebra* (así como del cálculo) para resolver las ecuaciones $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$.

Solución

Primera derivada:	$f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$
Segunda derivada:	$f''(x) = \dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$
Intersecciones en x:	$(-3, 0), (3, 0)$
Intersección en y	$\left(0, \frac{9}{2}\right)$
Asíntotas verticales:	$x = -2, x = 2$
Asíntota horizontal:	$y = 2$
Punto crítico:	$x = 0$
Posibles puntos de inflexión:	Ninguno
Dominio:	Todos los números reales excepto $x = \pm 2$
Simetría:	Con respecto al eje y
Intervalos de prueba:	$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$

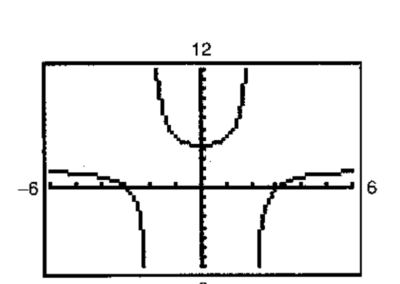
Empleando el cálculo, se puede tener la certeza de que se han determinado todas las características de la gráfica de f
Figura 3.45

La tabla muestra cómo se usan los intervalos de prueba para determinar varias características de la gráfica. La gráfica de f se ilustra en la figura 3.45.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < -2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	$+$	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información del uso de tecnología para representar funciones racionales, consultar el artículo "Graphs of Rational Functions for Computer Assisted Calculus" de Stan Bird y Terry Walters en *The College Mathematics Journal*.

Asegurarse de entender todas las indicaciones de la creación de una tabla tal como la que se muestra en el ejemplo 1. Debido al uso del cálculo, se debe *estar seguro* de que la gráfica no tiene extremos relativos o puntos de inflexión aparte de los que se muestran en la figura 3.45.



Al no usar el cálculo se puede pasar por alto importantes características de la gráfica de g
Figura 3.46

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Sin utilizar el tipo de análisis que se describe en el ejemplo 1, es fácil obtener una visión incompleta de las características básicas de la gráfica. Por ejemplo, la figura 3.46 muestra una imagen de la gráfica de

$$g(x) = \frac{2(x^2-9)(x-20)}{(x^2-4)(x-21)}.$$

De acuerdo con esta imagen, parece que la gráfica de g es casi la misma que la gráfica de f que se muestra en la figura 3.45. Sin embargo, las gráficas de estas dos funciones difieren bastante. Tratar de agrandar la ventana de observación para ver las diferencias.

EJEMPLO 2 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

Solución

Primera derivada:	$f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$
Segunda derivada:	$f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$
Intersecciones en x:	Ninguna
Intersección en y:	$(0, -2)$
Asíntota vertical:	$x = 2$
Asíntotas horizontales:	Ninguna
Comportamiento final o asintótico:	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Puntos críticos:	$x = 0, x = 4$
Posibles puntos de inflexión:	Ninguno
Dominio:	Todos los números reales excepto $x = 2$
Intervalos de prueba:	$(-\infty, 0), (0, 2), (2, 4), (4, \infty)$

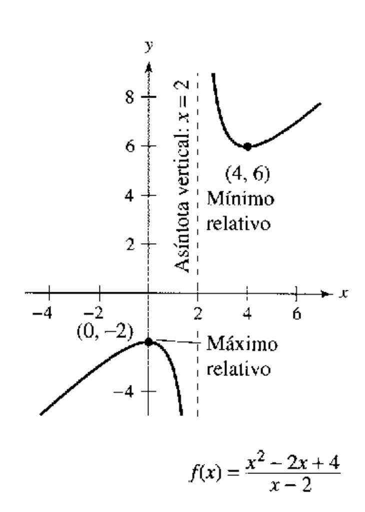


Figura 3.47

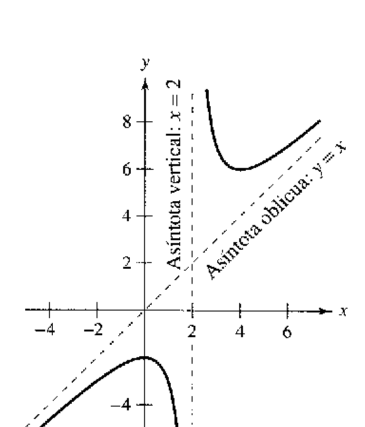
El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.47.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Características de la gráfica**
$-\infty < x < 0$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	-2	0	$-$	Máximo relativo
$0 < x < 2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < 4$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	6	0	$+$	Mínimo relativo
$4 < x < \infty$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba

Aunque la gráfica de la función en el ejemplo 2 no tiene asíntota horizontal, tiene una asíntota oblicua. La gráfica de una función racional (que no tiene factores comunes y cuyo denominador es de grado 1 o mayor) tiene una **asíntota oblicua** si el grado del numerador excede al grado del denominador exactamente en 1. Para determinar la asíntota oblicua, usar la división larga para describir la función racional como la suma de un polinomio de primer grado y otra función racional.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$= x + \frac{4}{x - 2} \qquad \text{Reescribir utilizando la división larga.}$$



Una asíntota oblicua
Figura 3.48

En la figura 3.48, advertir que la gráfica de f se acerca a la asíntota oblicua $y = x$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞.

EJEMPLO 3 Dibujo de la gráfica de una función radical

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

Solución

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2+2)^{3/2}} \qquad f''(x) = -\frac{6x}{(x^2+2)^{5/2}}$$

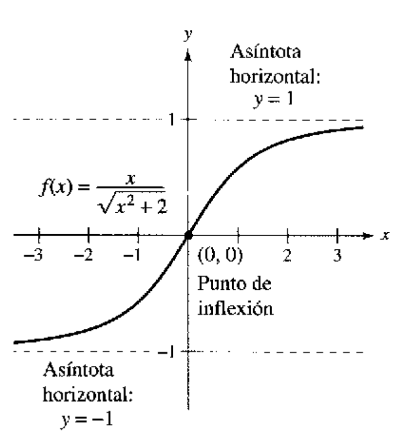


Figura 3.49

La gráfica sólo tiene una intersección, (0, 0). No tiene asíntotas verticales, pero cuenta con dos asíntotas horizontales: $y = 1$ (a la derecha) y $y = -1$ (a la izquierda). La función no tiene puntos críticos y sólo un posible punto de inflexión ($x = 0$). El dominio de la función son todos los números reales, y la gráfica es simétrica con respecto al origen. El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.49.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0	Punto de inflexión
$0 < x < \infty$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo

EJEMPLO 4 Dibujo de la gráfica de una función radical

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$.

Solución

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2) \qquad f''(x) = \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}}$$

La función tiene dos intersecciones: (0, 0) y $\left(\frac{125}{8}, 0\right)$. No hay asíntotas horizontales o verticales. La función tiene dos puntos críticos ($x = 0$ y $x = 8$) y dos posibles puntos de inflexión ($x = 0$ y $x = 1$). El dominio son todos los números reales. El análisis de la gráfica de f se presenta en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.50.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	Indef.	Máximo relativo
$0 < x < 1$		−	−	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 1$	−3	−	0	Punto de inflexión
$1 < x < 8$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	−16	0	+	Mínimo relativo
$8 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

Figura 3.50

EJEMPLO 5 Dibujo de la gráfica de una función polinómica

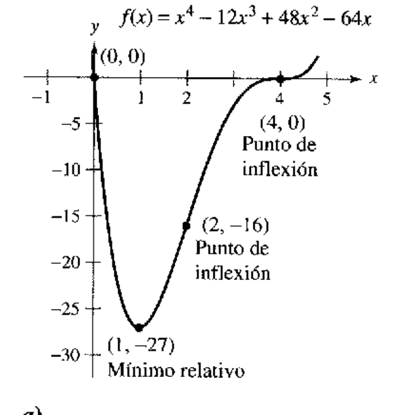
Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$.

Solución Se inicia factorizando para obtener

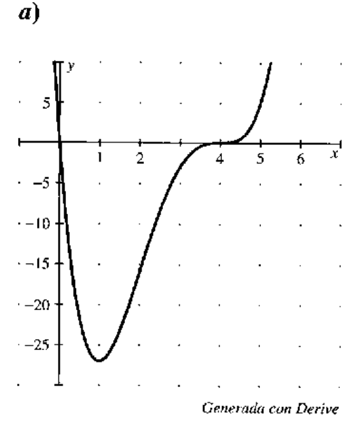
$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$$
$$= x(x-4)^3.$$

Luego, utilizando la forma factorizada de $f(x)$, se puede efectuar el siguiente análisis.

Primera derivada: $f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$
Segunda derivada: $f''(x) = 12(x-4)(x-2)$
Intersecciones en x: $(0, 0), (4, 0)$
Intersección en y: $(0, 0)$
Asíntotas verticales: Ninguno
Asíntotas horizontales: Ninguno
Comportamiento final o asintótico: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Puntos críticos: $x = 1, x = 4$
Posibles puntos de inflexión: $x = 2, x = 4$
Dominio: Todos los números reales
Intervalos de prueba: $(-\infty, 1), (1, 2), (2, 4), (4, \infty)$



a)



b)

Una función polinómica de grado par debe tener al menos un extremo relativo
Figura 3.51

El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.51*a*. El uso de un sistema de álgebra por computadora como *Derive* [ver la figura 3.51*b*] puede resultar de utilidad para verificar el análisis.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < 1$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	−27	0	+	Mínimo relativo
$1 < x < 2$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	−16	+	0	Punto de inflexión
$2 < x < 4$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 4$	0	0	0	Punto de inflexión
$4 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

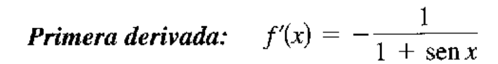
La función polinómica de cuarto grado del ejemplo 5 tiene un mínimo relativo y ningún máximo relativo. En general, una función polinómica de grado n puede tener *a lo más* $n - 1$ extremos relativos, y *cuando mucho* $n - 2$ puntos de inflexión. Además, las funciones polinómicas de grado par deben tener *al menos* un extremo relativo.

Recordemos que el criterio del coeficiente adelantado o dominante que se describió en la sección P.3, el "comportamiento final" o asintótico de la gráfica de una función polinómica se determina mediante su coeficiente dominante y por su grado. Por ejemplo, debido a que el polinomio en el ejercicio 5 tiene un coeficiente dominante positivo, la gráfica crece hacia la derecha. Además, como el grado es par, la gráfica también crece hacia la izquierda.

EJEMPLO 6 Dibujo de la gráfica de una función trigonométrica

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

Solución Debido a que la función tiene un periodo de 2π, se puede restringir el análisis de la gráfica a cualquier intervalo de longitud 2π. Por conveniencia, utilizar $(-\pi/2, 3\pi/2)$.



Primera derivada: $f'(x) = -\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$

Periodo: 2π

Intersección en x: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

Intersección en y: $(0, 1)$

Asíntotas verticales: $x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$ Véase nota anterior.

Asíntotas horizontales: Ninguna

Puntos críticos: Ninguno

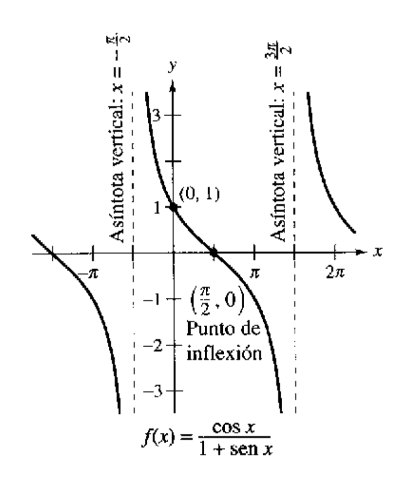
Posibles puntos de inflexión: $x = \dfrac{\pi}{2}$

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \dfrac{3 + 4n}{2}\pi$

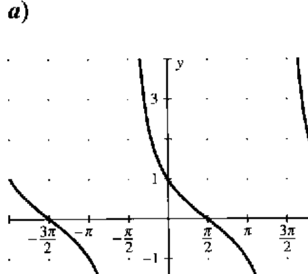
Intervalos de prueba: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

El análisis de la gráfica de f en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.52*a*. Comparar esto con la gráfica generada por el sistema algebraico por computadora *Derive* en la figura 3.52*b*.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$x = -\dfrac{\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = \dfrac{\pi}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	0	Punto de inflexión
$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = \dfrac{3\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical



a)



b)
Figura 3.52

NOTA Sustituyendo $-\pi/2$ o $3\pi/2$ en la función, se obtiene la forma 0/0. Ésta recibe el nombre de forma indeterminada y se estudiará en la sección 8.7. Para determinar si la función tiene asíntotas verticales en estos dos valores, es posible reescribir las funciones como sigue.

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

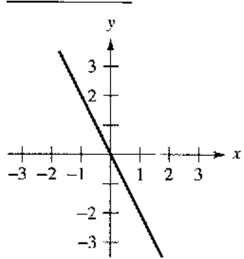
En esta forma, es claro que la gráfica de f tiene asíntotas verticales cuando $x = -\pi/2$ y $3\pi/2$.

Ejercicios de la sección 3.6

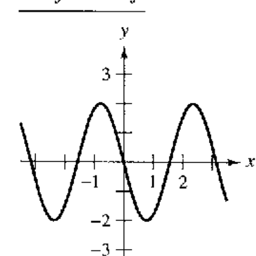
En los ejercicios 1 a 4, hacer que corresponda la gráfica de f en la columna izquierda con la de su derivada en la columna derecha.

Gráfica de f | *Gráfica de f'*

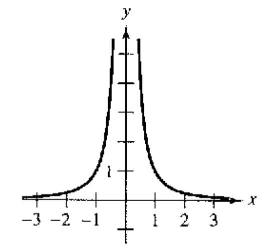
1.



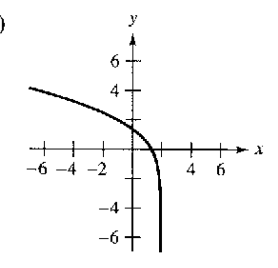
a)



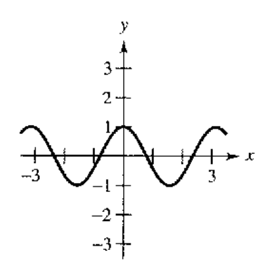
2.



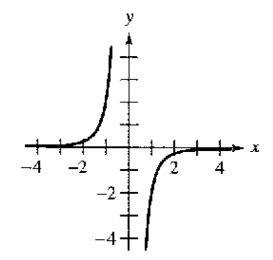
b)



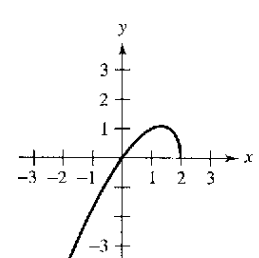
3.



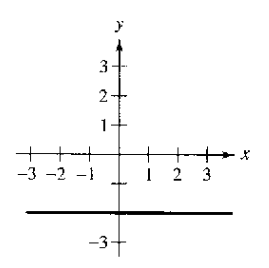
c)



4.



d)



5. ***Razonamiento gráfico*** La gráfica de f se presenta en la figura.

   a) ¿Para qué valores de x es $f'(x)$ cero? ¿Positiva? ¿Negativa?
   b) ¿Para qué valores de x es $f''(x)$ cero? ¿Positiva? ¿Negativa?
   c) ¿En qué intervalo es f' una función creciente?
   d) ¿Para qué valor de x es $f'(x)$ mínima? Para este valor de x, ¿cómo se compara el ritmo de cambio de f con el ritmo de cambio de f para otros valores de x? Explicar.

6. ***Razonamiento gráfico*** Identificar los números reales x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 en la figura tales que cada una de las siguientes afirmaciones sea verdadera.

   a) $f'(x) = 0$ *b)* $f''(x) = 0$
   c) $f'(x)$ no existe.
   d) f tiene un máximo relativo.
   e) f tiene un punto de inflexión.

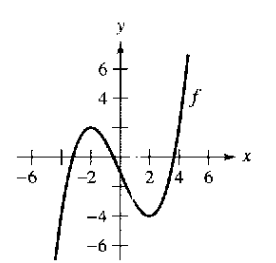


Figura para 5

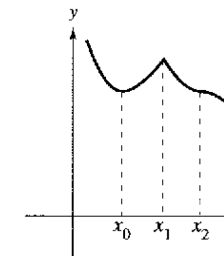


Figura para 6

En los ejercicios 7 a 34, analizar y dibujar una gráfica de la función. Indicar todas las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Utilizar una calculadora para verificar los resultados.

7. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$
8. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
9. $y = \dfrac{1}{x - 2} - 3$
10. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$
11. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
12. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$
13. $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2 + 1}$
14. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$
15. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$
16. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$
17. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$
18. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2}$
19. $y = x\sqrt{4 - x}$
20. $g(x) = x\sqrt{9 - x}$
21. $h(x) = x\sqrt{9 - x^2}$
22. $y = x\sqrt{16 - x^2}$
23. $y = 3x^{2/3} - 2x$
24. $y = 3(x - 1)^{2/3} - (x - 1)^2$
25. $y = x^3 - 3x^2 + 3$
26. $y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$
27. $y = 2 - x - x^3$
28. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^3 + 2$
29. $y = 3x^4 + 4x^3$
30. $y = 3x^4 - 6x^2 + \frac{5}{3}$
31. $y = x^5 - 5x$
32. $y = (x - 1)^5$
33. $y = |2x - 3|$
34. $y = |x^2 - 6x + 5|$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar y representar gráficamente la función. Identificar todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

35. $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x}$
36. $f(x) = 5\left(\dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{1}{x + 2}\right)$
37. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$
38. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

En los ejercicios 39 a 46, dibujar una gráfica de la función sobre el intervalo dado. Utilizar una calculadora para verificar la gráfica.

39. $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 3x, \quad 0 \le x \le 2\pi$
40. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

41. $y = 2x - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

42. $y = 2(x - 2) + \cot x, \quad 0 < x < \pi$

43. $y = 2(\csc x + \sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

44. $y = \sec^2\left(\frac{\pi x}{8}\right) - 2\tan\left(\frac{\pi x}{8}\right) - 1, \quad -3 < x < 3$

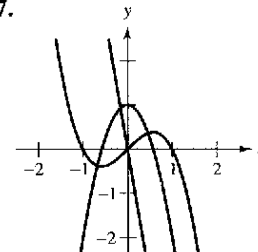
45. $g(x) = x \tan x, \quad -\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

46. $g(x) = x \cot x, \quad -2\pi < x < 2\pi$

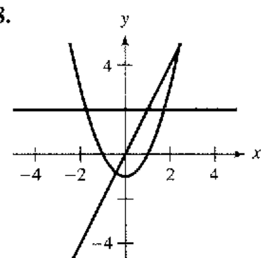
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 47 y 48, las gráficas de f, f' y f'' se muestran sobre el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.

47.

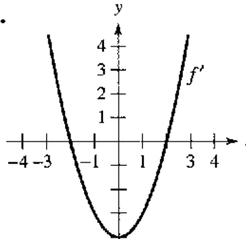


48.

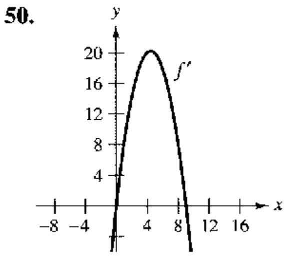


En los ejercicios 49 a 52, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f y la gráfica de f''.

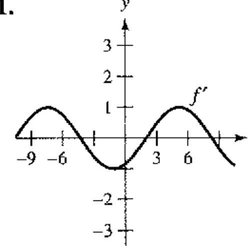
49.



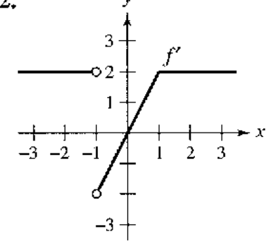
50.



51.



52.



(*Proporcionada por Big Fox, Moverly Area Community College, Moverly MO*)

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

53. Suponer que $f'(t) < 0$ para todo t en el intervalo $(2, 8)$. Explicar por qué $f(3) > f(5)$.

54. Suponer que $f(0) = 3$ y $2 \leq f'(x) \leq 4$ para todo x en el intervalo $[-5, 5]$. Determinar los valores más grande y más pequeño posibles de $f(2)$.

En los ejercicios 55 a 58, utilizar una calculadora para representar la función. Emplear la gráfica para determinar si es posible que la gráfica de la función cruce su asíntota horizontal. ¿Es posible que la gráfica de una función cruce su asíntota vertical? ¿Por qué sí o por qué no?

55. $f(x) = \frac{4(x-1)^2}{x^2 - 4x + 5}$

56. $g(x) = \frac{3x^4 - 5x + 3}{x^4 + 1}$

57. $h(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

58. $f(x) = \frac{\cos 3x}{4x}$

Comentario **En los ejercicios 59 y 60, emplear una calculadora para representar la función. Explicar por qué no hay asíntota vertical cuando una inspección superficial de la función quizá indique que debería haber una.**

59. $h(x) = \frac{6 - 2x}{3 - x}$

60. $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Comentario **En los ejercicios 61 a 64, utilizar una calculadora para representar la función y determinar la asíntota oblicua de la gráfica. Realizar acercamientos repetidos y describir cómo parece cambiar la gráfica que se exhibe. ¿Por qué ocurre lo anterior?**

61. $f(x) = -\frac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$

62. $g(x) = \frac{2x^2 - 8x - 15}{x - 5}$

63. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

64. $h(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

65. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{\cos^2 \pi x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad 0 < x < 4.$$

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar la función y emplear la gráfica para aproximar en forma visual los puntos críticos.

b) Emplear un sistema algebraico por computadora para determinar f' y aproximar los puntos críticos. ¿Los resultados son los mismos que los de la aproximación visual del apartado *a*)? Explicar.

66. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$f(x) = \tan(\operatorname{sen} \pi x)$.

a) Utilizar una calculadora para representar la función.

b) Identificar toda simetría de la gráfica.

c) ¿Es periódica la función? Si es así, ¿cuál es el periodo?

d) Identificar todos los extremos en $(-1, 1)$.

e) Utilizar una calculadora para determinar la concavidad de la gráfica en $(0, 1)$.

Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, crear una función cuya gráfica tiene las características indicadas. (Hay más de una respuesta correcta.)**

67. Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota horizontal: $y = 0$

68. Asíntota vertical: $x = -3$
Asíntota horizontal: ninguna

69. Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota oblicua: $y = 3x + 2$

70. Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota oblicua: $y = -x$

71. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{ax}{(x-b)^2}.$$

a) Determinar el efecto sobre la gráfica de f si $b \neq 0$ y a cambian. Considerar casos en los que a es positiva y a es negativa.

b) Determinar el efecto sobre la gráfica de f si $a \neq 0$ y b cambian.

72. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - (ax)$, $a \neq 0$.

a) Determinar los cambios (si los hay) en las intersecciones, los extremos y la concavidad de la gráfica f cuando varía a.

b) En la misma ventana de observación, utilizar una calculadora para representar la función relativa a 4 valores diferentes de a.

73. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{3x^n}{x^4 + 1}$$

para valores enteros no negativos de n.

a) Analizar la relación entre el valor de n y la simetría de la gráfica.

b) ¿Para qué valores de n el eje x será la asíntota horizontal?

c) ¿Para qué valor de n será $y = 3$ la asíntota horizontal?

d) ¿Cuál es la asíntota de la gráfica cuando $n = 5$?

e) Representar f en una calculadora para cada valor de n indicado en la tabla. Emplear la gráfica para determinar el número M de extremos y el número N de puntos de inflexión de la gráfica.

n	0	1	2	3	4	5
M						
N						

74. ***Investigación*** Sea $P(x_0, y_0)$ un punto arbitrario sobre la gráfica de f tal que $f'(x_0) \neq 0$, como se indica en la figura. Verificar cada afirmación.

a) La intersección con el eje x de la recta tangente es $\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$.

b) La intersección con el eje y de la recta tangente es $(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0))$.

c) La intersección con el eje x de la recta normal es $(x_0 + f(x_0)f'(x_0), 0)$.

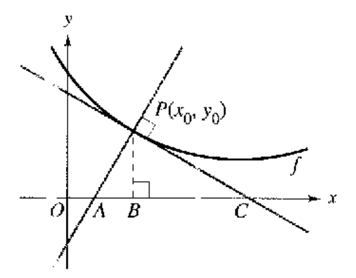
d) La intersección con el eje y de la recta normal es $\left(0, y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}\right)$.

e) $|BC| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$

f) $|PC| = \left|\frac{f(x_0)\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}{f'(x_0)}\right|$

g) $|AB| = |f(x_0)f'(x_0)|$

h) $|AP| = |f(x_0)|\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}$



75. ***Modelo matemático*** Los datos en la tabla muestran el número N de bacterias en un cultivo en el tiempo t, donde t se mide en días.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
N	25	200	804	1 756	2 296	2 434	2 467	2 473

Un modelo para estos datos está dado por

$$N = \frac{24\,670 - 35\,153t + 13\,250t^2}{100 - 39t + 7t^2}, \quad 1 \leq t \leq 8.$$

a) Utilizar una calculadora para dibujar los datos y representar el modelo.

b) Recurrir al modelo para estimar el número de bacterias cuando $t = 10$.

c) Aproximar el día cuando el número de bacterias es más grande.

d) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar el tiempo en que la tasa de incremento en el número de bacterias es más grande.

e) Calcular $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

Asíntotas oblicuas **En los ejercicios 76 y 77, la gráfica de la función tiene dos asíntotas oblicuas. Identificar cada asíntota oblicua. Después representar gráficamente la función y sus asíntotas.**

76. $y = \sqrt{4 + 16x^2}$

77. $y = \sqrt{x^2 + 6x}$

Preparación del examen Putnam

78. Considerar que $f(x)$ está definida en $a \leq x \leq b$. Suponiendo propiedades apropiadas de continuidad y derivabilidad, demostrar para $a < x < b$ que

$$\frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}{x - b} = \frac{1}{2}f''(\beta)$$

donde β es algún número entre a y b.

Sección 3.7 Problemas de optimización

- **Resolver problemas de máximos y mínimos aplicados.**

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

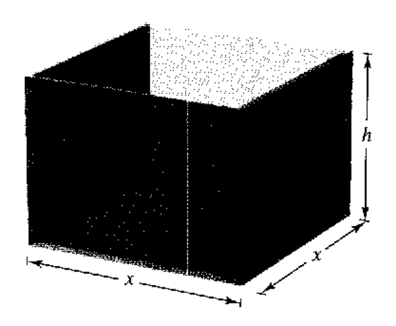
Una de las aplicaciones más comunes del cálculo implica la determinación de los valores mínimo y máximo. Recordar cuántas veces hemos oído hablar de utilidad (beneficio) máxima(o), mínimo costo, tiempo mínimo, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia y máxima distancia. Antes de describir una estrategia general de solución para tales problemas, se considera un ejemplo.

EJEMPLO 1 Determinación del volumen máximo

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la figura 3.53. ¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?

Solución Debido a que la caja tiene una base cuadrada, su volumen es

$$V = x^2h \qquad \text{Ecuación primaria.}$$



Caja abierta con base cuadrada: $S = x^2 + 4xh = 108$
Figura 3.53

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación primaria** porque proporciona una fórmula para la cantidad que se va a optimizar. El área de la superficie de la caja es

$$S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los cuatro lados})$$
$$S = x^2 + 4xh = 108. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Como V se va a maximizar, escribir V como una función de una sola variable. Para hacerlo, es posible resolver la ecuación $x^2 + 4xh = 108$ para h en términos de x y obtener $h = (108 - x^2)/(4x)$. Sustituyendo en la ecuación primaria, se obtiene

$$V = x^2h \qquad \text{Función de dos variables.}$$
$$= x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) \qquad \text{Sustituir para } h.$$
$$= 27x - \frac{x^3}{4}. \qquad \text{Función de una variable.}$$

Antes de determinar qué valor de x producirá un valor máximo de V, se necesita determinar el *dominio admisible.* Esto es, ¿qué valores de x tienen sentido en este problema? Se sabe que, $V \geq 0$. También que x debe ser no negativa y que el área de la base ($A = x^2$) es a lo sumo 108. De tal modo, el dominio admisible es

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}. \qquad \text{Dominio admisible.}$$

Para maximizar V, determinar los puntos críticos de la función de volumen.

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \qquad \text{Igualar la derivada a cero.}$$
$$3x^2 = 108 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$x = \pm 6 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No se necesita considerar $x = -6$ porque está fuera del dominio. La evaluación V en el punto crítico $x = 6$ y en los puntos terminales del dominio produce $V(0) = 0$, $V(6) = 108$ y $V(\sqrt{108}) = 0$. De tal modo, V es máximo cuando $x = 6$ y las dimensiones de la caja son $6 \times 6 \times 3$ pulgadas.

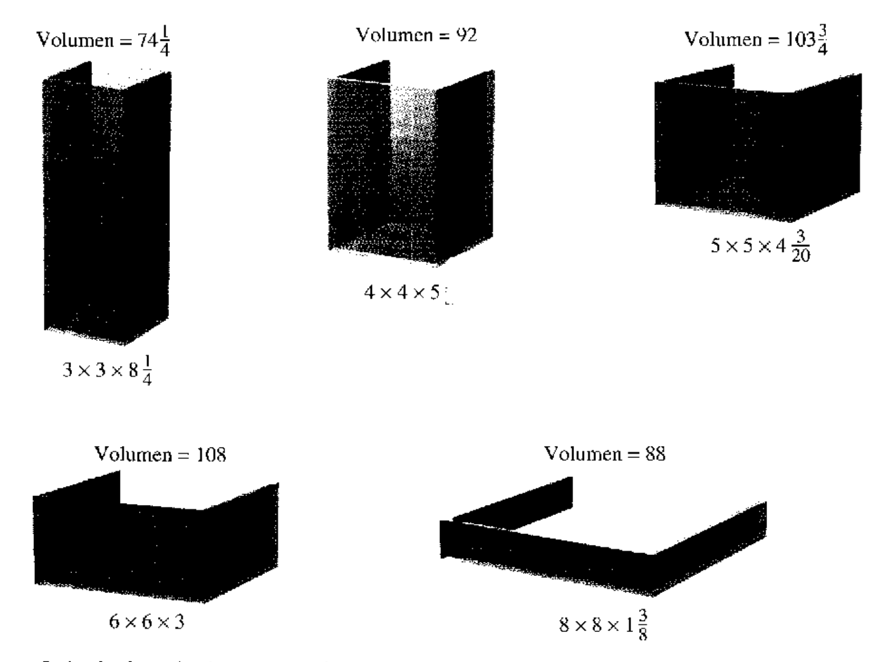
TECNOLOGÍA Puede verificar la respuesta utilizando una calculadora para representar la función volumen

$$V = 27x - \frac{x^3}{4}.$$

Usar una ventana de observación en la que $0 \leq x \leq \sqrt{108} \approx 10.4$ y $0 \leq y \leq 120$, y la función *trace* para determinar el valor máximo de V.

En el ejemplo 1, se nota que hay un número infinito de cajas abiertas que tienen 108 pulgadas cuadradas de área superficial. Para empezar a resolver el problema es necesario preguntar qué forma básica parecería producir un volumen máximo. ¿La caja debe ser alta, muy baja o casi cúbica?

Incluso se puede tratar de calcular unos cuantos volúmenes, como se muestra en la figura 3.54 para ver si se obtiene una mejor idea de lo que deben ser las dimensiones óptimas. Recordar que no se puede resolver un problema hasta que no haya sido identificado con toda claridad.



¿Qué caja tiene el volumen mayor?
Figura 3.54

El ejemplo 1 ilustra las siguientes estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos.

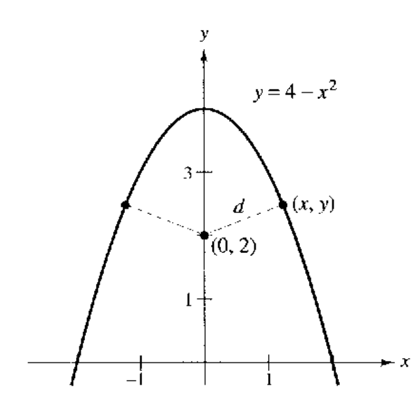
Estrategia para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elaborar un dibujo.
2. Escribir una **ecuación primaria** para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una *sola variable independiente*. Esto quizá implique el uso de **ecuaciones secundarias** que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas en las secciones 3.1 a 3.4.

NOTA Al efectuar el paso 5, recordar que para determinar el valor máximo o mínimo de una función continua f en un intervalo cerrado, hay que comparar los valores de f en sus puntos críticos con los valores de f en los puntos terminales del intervalo.

EJEMPLO 2 Determinación de la distancia mínima

¿Qué puntos sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ son más cercanos al punto (0, 2)?



La cantidad por minimizar es la distancia: $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$.
Figura 3.55

Solución

La figura 3.55 muestra que hay dos puntos a una distancia mínima del punto (0, 2). La distancia entre el punto (0, 2) y el punto (x, y) sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ está dada por

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Utilizando la ecuación secundaria $y = 4 - x^2$, se puede reescribir la ecuación primaria como

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

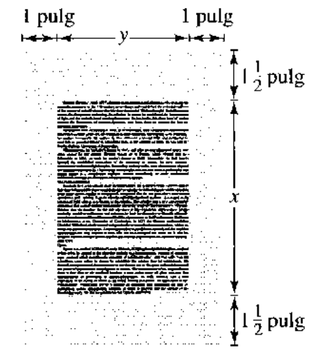
Como d es más pequeña cuando la expresión dentro de radicales es menor, sólo se necesitan determinar los puntos críticos de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$. Advertir que el dominio de f es toda la recta de los números reales. De tal modo, no hay puntos terminales del dominio por considerar. Además, igualando a 0 $f'(x)$ se obtiene

$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

El criterio de la primera derivada verifica que $x = 0$ produce un máximo relativo, mientras que $x = \sqrt{3/2}$ y $x = -\sqrt{3/2}$ producen una distancia mínima. De tal modo, los puntos más cercanos son $\left(\sqrt{3/2}, 5/2\right)$ y $\left(-\sqrt{3/2}, 5/2\right)$.

EJEMPLO 3 Determinación del área mínima



La cantidad que se va a minimizar es el área: $A = (x+3)(y+2)$
Figura 3.56

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes de la parte superior y de la parte inferior de la página van a ser de $1\frac{1}{2}$ pulgadas, y los márgenes de la izquierda y la derecha corresponderán a 1 pulgada. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?

Solución Sea A el área que se va a minimizar

$$A = (x+3)(y+2) \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

El área impresa dentro del margen está dada por

$$24 = xy. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Despejando de esta ecuación para y produce $y = 24/x$. La sustitución en la ecuación primaria da lugar a

$$A = (x+3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x}. \qquad \text{Función de una variable.}$$

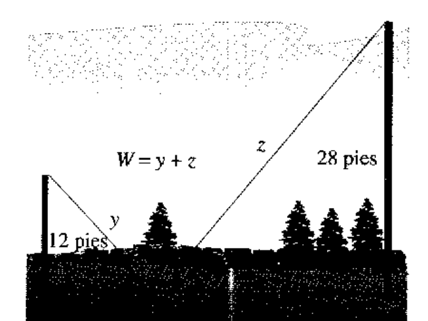
Debido a que x debe ser positiva, se está interesado sólo en los valores de A $x > 0$. Para encontrar los puntos críticos, derivar con respecto a x.

$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \implies x^2 = 36$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No es necesario considerar $x = -6$ porque este punto está fuera del dominio. El criterio de la primera derivada confirma que A es un mínimo cuando $x = 6$. De tal modo, $y = \frac{24}{6} = 4$ y las dimensiones de la página deben ser $x + 3 = 9$ pulgadas por $y + 2 = 6$ pulgadas.

EJEMPLO 4 Hallar la longitud mínima

Dos postes, uno de 12 pies de altura y el otro de 28 pies, están a 30 pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable?



La cantidad que se va a minimizar es la longitud. De acuerdo con el diagrama, puede verse que x varía entre 0 y 30
Figura 3.57

Solución

Sea W la longitud del cable que se va a minimizar. Utilizando la figura 3.57, puede escribirse

$$W = y + z \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

En este problema, más que resolver para y en términos de z (o viceversa), se deben despejar tanto para y como para z en términos de una tercera variable x, como se indica en la figura 3.57. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se obtiene

$$x^2 + 12^2 = y^2$$
$$(30 - x)^2 + 28^2 = z^2$$

lo que implica que

$$y = \sqrt{x^2 + 144}$$
$$z = \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}.$$

De tal modo, W está dada por

$$\begin{aligned} W &= y + z \\ &= \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}, \qquad 0 \le x \le 30. \end{aligned}$$

La derivación de W con respecto a x produce

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}}.$$

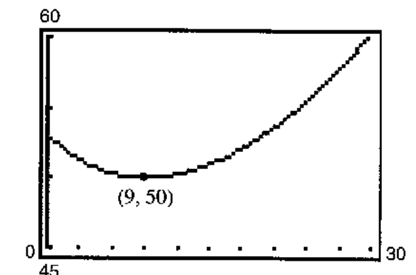
Haciendo $dW/dx = 0$, se obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}} &= 0 \\ x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684} &= (30 - x)\sqrt{x^2 + 144} \\ x^2(x^2 - 60x + 1\,684) &= (30 - x)^2(x^2 + 144) \\ x^4 - 60x^3 + 1\,684x^2 &= x^4 - 60x^3 + 1\,044x^2 - 8\,640x + 129\,600 \\ 640x^2 + 8\,640x - 129\,600 &= 0 \\ 320(x - 9)(2x + 45) &= 0 \\ x &= 9, -22.5. \end{aligned}$$

Como $x = -22.5$ no está en el dominio y

$$W(0) \approx 53.04, \qquad W(9) = 50 \qquad \text{y} \qquad W(30) \approx 60.31$$

se puede concluir que el alambre debe colocarse a 9 pies del poste de 12 pies.



Se puede confirmar el valor mínimo de W con una calculadora
Figura 3.58

TECNOLOGÍA De acuerdo con el ejemplo 4, puede verse que los problemas de optimización aplicada implican una gran cantidad de álgebra. Si se tiene acceso a una calculadora, confirmar que $x = 9$ produce un valor mínimo de W al trazar la gráfica

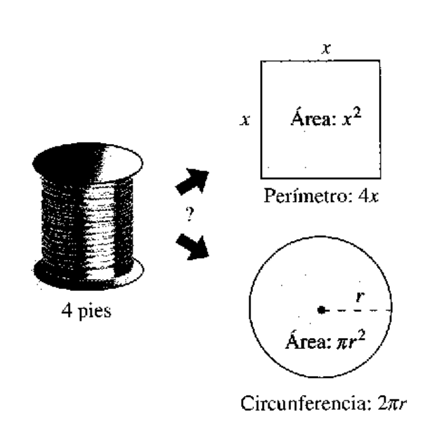
$$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}$$

como se muestra en la figura 3.58.

En cada uno de los primeros cuatro ejemplos, el valor extremo ocurriría en un punto crítico. Aunque esto sucede a menudo, recordar que un valor extremo también puede presentarse en un punto terminal de un intervalo, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Un máximo en un punto terminal

Se van a usar cuatro pies de alambre para formar un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?



La cantidad que se va a maximizar es el área: $A = x^2 + \pi r^2$
Figura 3.59

Solución

El área total (ver la figura 3.59) está dada por

$$A = (\text{área del cuadrado}) + (\text{área del círculo})$$
$$A = x^2 + \pi r^2. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Como la longitud total de alambre es 4 pies, se obtiene

$$4 = (\text{perímetro del cuadrado}) + (\text{circunferencia del círculo})$$
$$4 = 4x + 2\pi r.$$

De tal modo, $r = 2(1 - x)/\pi$, y sustituyendo en la ecuación primaria se obtiene

$$A = x^2 + \pi\left[\frac{2(1-x)}{\pi}\right]^2$$
$$= x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4].$$

El dominio admisible es $0 \le x \le 1$ restringido por el perímetro cuadrado. Como

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi}$$

el único punto crítico en $(0, 1)$ es $x = 4/(\pi + 4) \approx 0.56$. Así, utilizando

$$A(0) \approx 1.273, \quad A(0.56) \approx 0.56 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

Puede concluirse que el área máxima ocurre cuando $x = 0$. Esto es, todo el alambre se usa para el círculo.

¿Cuál sería la respuesta si en el ejemplo 5 se preguntaran las dimensiones necesarias para encerrar el área total *mínima*?

Revisar las ecuaciones primarias formuladas en los primeros cinco ejemplos. Como indican las aplicaciones, estos cinco ejemplos son bastante simples, no obstante las ecuaciones primarias resultantes son bastante complicadas.

$$V = 27x - \frac{x^3}{4} \qquad W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}$$

$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \qquad A = \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]$$

$$A = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

Por lo común, debe esperarse que las aplicaciones de la vida real incluyan ecuaciones *al menos tan complicadas* como estas cinco. Recordar que una de las metas principales de este curso es aprender a utilizar el cálculo con el fin de analizar ecuaciones que en un principio parecen ser sumamente complejas.

Ejercicios de la sección 3.7

1. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Encontrar dos números positivos cuya suma es 110 y cuyo producto es un máximo posible.

a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.)

Primer número x	Segundo número	Producto P
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1\,000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1\,800$

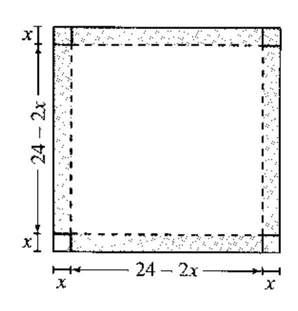
b) Utilizar una calculadora para generar renglones adicionales en la tabla. Emplear la tabla para estimar la solución. (*Sugerencia:* Utilizar la función *table* de la calculadora.)

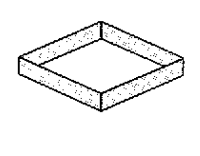
c) Escribir el producto P como una función de x.

d) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función en el apartado c) y estimar la solución a partir de la gráfica.

e) Usar el cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado c). Encontrar después los dos números.

2. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Una caja abierta de volumen máximo se va a construir a partir de una pieza cuadrada de material, de 24 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando los bordes (ver la figura).





a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.) Usar la tabla para estimar el volumen máximo.

Altura	Largo y ancho	Volumen
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

b) Escribir el volumen V como una función de x.

c) Emplear cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado b) y encontrar el valor máximo.

d) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función del apartado b) y verificar el volumen máximo a partir de la gráfica.

En los ejercicios 3 a 8, encontrar dos números positivos que satisfagan los requerimientos dados.

3. La suma es S y el producto es un máximo.
4. El producto es 192 y la suma es un mínimo.
5. El producto es 192 y la suma del primero más tres veces el segundo es un mínimo.
6. El segundo número es el recíproco del primero y la suma es un mínimo.
7. La suma del primero y el doble del segundo es 100 y el producto es un máximo.
8. La suma del primer número al cuadrado y el segundo es 27 y el producto es un máximo.

En los ejercicios 9 y 10, encontrar el largo y el ancho de un rectángulo que tiene el perímetro dado y un área máxima.

9. Perímetro: 100 metros
10. Perímetro: P unidades

En los ejercicios 11 y 12, encontrar el largo y el ancho de un rectángulo que tiene el área dada y un perímetro mínimo.

11. Área: 64 pies cuadrados
12. Área: A centímetros cuadrados

En los ejercicios 13 a 16, determinar el punto sobre la gráfica de la función que está más cerca al punto dado.

	Función	*Punto*		*Función*	*Punto*
13.	$f(x) = \sqrt{x}$	$(4, 0)$	14.	$f(x) = \sqrt{x - 8}$	$(2, 0)$
15.	$f(x) = x^2$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$	16.	$f(x) = (x + 1)^2$	$(5, 3)$

17. ***Reacción química*** En una reacción química autocatalítica, el producto formado es un catalizador para la reacción. Si Q_0 es la cantidad de la sustancia original y x es la cantidad del catalizador formado, el ritmo o velocidad de la reacción química es

$$\frac{dQ}{dx} = kx(Q_0 - x).$$

¿Para qué valor de x la velocidad de la reacción química será la mayor?

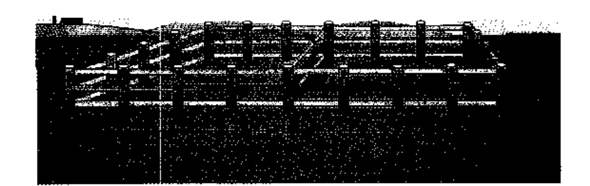
18. ***Control de tráfico*** En un día determinado, el ritmo o tasa de flujo F (vehículos por horas) en una autopista congestionada es

$$F = \frac{v}{22 + 0.02v^2}$$

donde v es la velocidad del tráfico en millas por hora. ¿Qué velocidad maximizará el ritmo o tasa de flujo en la autopista?

19. ***Área*** Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe contener 180 000 m² para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. ¿Qué dimensiones requeriría la cantidad mínima de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?

20. ***Área máxima*** Un ganadero tiene 200 pies de cercado con los cuales delimita dos corrales rectangulares adyacentes (ver la figura). ¿Qué dimensiones deben utilizarse de manera que el área delimitada será un máximo?

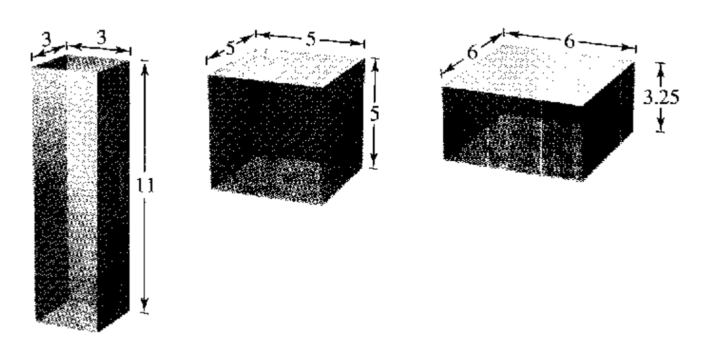


21. ***Volumen máximo***

a) Verificar que cada uno de los sólidos rectangulares que se muestran en la figura tenga un área superficial de 150 pulgadas cuadradas.

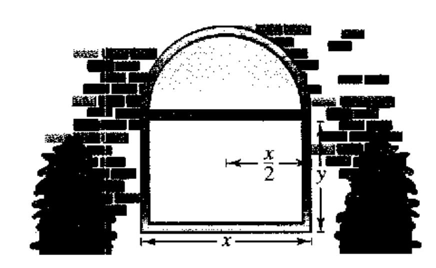
b) Encontrar el volumen de cada sólido.

c) Determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con una base cuadrada) de volumen máximo si su área superficial es de 150 pulgadas cuadradas.



22. ***Volumen máximo*** Determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con base cuadrada) de volumen máximo si su área rectangular es de 337.5 cm^2.

23. ***Área máxima*** Una ventana Norman se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (ver la figura). Encontrar las dimensiones de una ventana Norman de área máxima si el perímetro total es de 16 pies.



24. ***Área máxima*** Un rectángulo está cortado por los ejes x y y y la gráfica de $y = (6 - x)/2$ (ver la figura). ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?

25. ***Longitud mínima*** Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante mediante los ejes x y y y una recta que pasa por el punto (1, 2) (ver la figura).

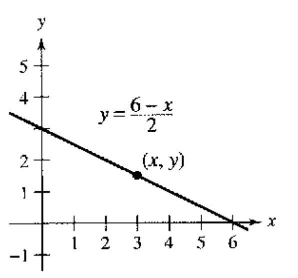


Figura para 24

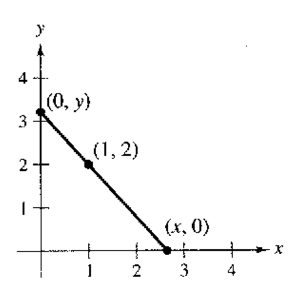


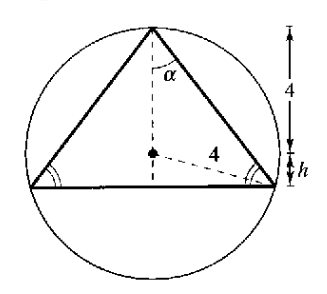
Figura para 25

a) Escribir la longitud L de la hipotenusa como una función de x.

b) Utilizar una calculadora para aproximar x gráficamente de manera tal que la longitud de la hipotenusa sea un mínimo.

c) Determinar los vértices del triángulo de manera tal que su área sea un mínimo.

26. ***Área máxima*** Determinar el área del triángulo isósceles más grande que pueda inscribirse en un círculo de radio 4 (ver la figura).

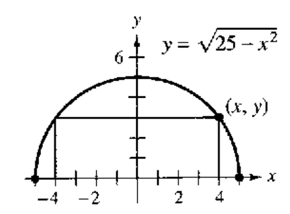


a) Resolver escribiendo el área como una función de h.

b) Resolver escribiendo el área como una función de α.

c) Identificar el tipo de triángulo de área máxima.

27. ***Área máxima*** Un rectángulo está delimitado por el eje x y el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ (ver la figura). ¿Qué largo y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?



28. ***Área*** Encontrar las dimensiones del rectángulo más grande que puede inscribirse en un semicírculo de radio r (ver el ejercicio 27).

29. ***Área*** Una página rectangular contendrá 30 pulgadas cuadradas de texto impreso. Los márgenes de cada lado son de 1 pulgada. Encontrar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.

30. ***Área*** Una página rectangular contendrá 36 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado serán de $1\frac{1}{2}$ pulgadas. Determinar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.

31. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Una sala de ejercicios tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo en cada extremo. Por la parte externa una pista de carreras de 200 metros delimita a la sala.

a) Dibujar una figura para representar el problema. Dejar que x y y representen el largo y el ancho del rectángulo.

b) De manera analítica completar seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.) Utilizar la tabla para estimar el área máxima de la región rectangular.

Largo x	**Ancho y**	**Área**
10	$\frac{2}{\pi}(100 - 10)$	$(10)\frac{2}{\pi}(100 - 10) \approx 573$
20	$\frac{2}{\pi}(100 - 20)$	$(20)\frac{2}{\pi}(100 - 20) \approx 1\,019$

c) Escribir el área A como una función de x.

d) Utilizar el cálculo para encontrar el punto crítico de la función del apartado *c)* y determinar el valor máximo.

e) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función en el apartado *c)* y verificar el área máxima a partir de la gráfica.

32. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Se va a diseñar un cilindro circular recto que pueda contener 22 pulgadas cúbicas de refresco (aproximadamente 12 onzas de fluido).

a) En forma analítica completar seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Radio r	**Altura**	**Área de la superficie**
0.2	$\frac{22}{\pi(0.2)^2}$	$2\pi(0.2)\left[0.2 + \frac{22}{\pi(0.2)^2}\right] \approx 220.3$
0.4	$\frac{22}{\pi(0.4)^2}$	$2\pi(0.4)\left[0.4 + \frac{22}{\pi(0.4)^2}\right] \approx 111.0$

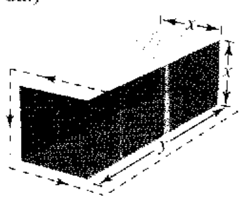
b) Recurrir a una calculadora para generar renglones adicionales de la tabla. Utilizar ésta para estimar el área superficial mínima. (*Sugerencia:* Utilizar la característica *table* de la calculadora.)

c) Escribir el área superficial S como una función de r.

d) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función del apartado *c)* y estimar el área superficial mínima a partir de la gráfica.

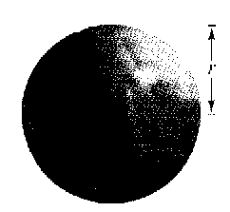
e) Recurrir al cálculo para encontrar el punto crítico de la función en el apartado *c)* y encontrar las dimensiones que producirán el área superficial mínima.

33. ***Volumen máximo*** Un paquete rectangular que se va a enviar por un servicio postal puede tener una longitud y un perímetro que tiene un máximo de 108 pulgadas (ver la figura). Determinar las dimensiones del paquete de volumen máximo que puede enviarse. (Suponer que la sección transversal es cuadrada.)



34. ***Volumen máximo*** Trabajar de nuevo el ejercicio 33 para un paquete cilíndrico. (La sección transversal es circular.)

35. ***Volumen máximo*** Encontrar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.



36. ***Volumen máximo*** Determinar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

Desarrollo de conceptos

37. El perímetro de un rectángulo es de 20 pies. De todas las dimensiones posibles, el área máxima es de 25 pies cuadrados cuando su largo y ancho son ambos de 5 pies. ¿Hay dimensiones que producirán un área mínima? Explicar.

38. Una botella de shampú tiene la forma de un cilindro circular recto. Como el área superficial de la botella no cambia cuando ésta se comprime, ¿es cierto que el volumen permanece invariable? Explicar.

39. ***Área superficial mínima*** Un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 12 cm³. Encontrar el radio del cilindro que produce el área superficial mínima.

40. ***Costo mínimo*** Un tanque industrial de la forma que se describe en el ejercicio 39 debe tener un volumen de 3 000 pies cúbicos. Si el costo de fabricación de los hemisferios es, por pie cuadrado, doble que el del lateral, determinar las dimensiones que minimizarán el costo.

41. ***Área mínima*** La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Encontrar las dimensiones del triángulo y el cuadrado que producen el área total mínima.

42. ***Área máxima*** 20 pies de alambre se usarán para formar dos figuras. En cada uno de los siguientes casos, ¿qué cantidad de alambre debe utilizarse en cada figura de manera que el área total encerrada sea máxima?

a) Triángulo equilátero y cuadrado

b) Cuadrado y pentágono regular

c) Pentágono regular y hexágono regular

d) Hexágono regular y círculo

¿Qué se puede concluir a partir de este patrón? {*Sugerencia:* El área de un polígono rectangular con n lados de longitud x es $A = (n/4)[\cot(\pi/n)]x^2$.}

43. ***Resistencia de una viga*** Una viga de madera tiene una sección transversal rectangular de altura h y ancho w (ver la figura en la siguiente página). La resistencia S de la viga es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más fuerte que puede cortarse a partir de un leño redondo de 24 pulgadas de diámetro? (*Sugerencia:* $S = kh^2w$, donde k es la constante de proporcionalidad.)

Figura para 43

Figura para 44

44. ***Longitud mínima*** Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-x, 0)$ y $(x, 0)$ con su suministro eléctrico ubicado en $(0, h)$ (ver la figura). Determinar y de manera tal que la longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.

45. ***Alcance de proyectil*** El alcance R de un proyectil lanzado con una velocidad inicial v_0 a un ángulo θ con la horizontal es $R = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Determinar el ángulo θ tal que el alcance sea un máximo.

46. ***Conjetura*** Considerar las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ en el dominio [0, 4.]

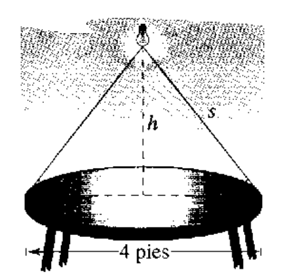
   a) Utilizar una calculadora para representar gráficamente las funciones en el dominio especificado.

   b) Escribir la distancia vertical d entre las funciones como una función de x y recurrir al cálculo para determinar el valor de x respecto al cual d es un máximo.

   c) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de f y g en el punto crítico encontrado en el apartado *b*). Representar gráficamente las rectas tangentes. ¿Cuál es la relación entre las rectas?

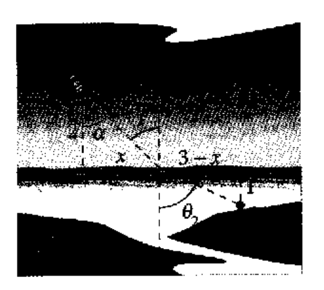
   d) Enunciar una conjetura acerca de la relación entre las rectas tangentes a las gráficas de las dos funciones en el valor de x al cual la distancia vertical entre las funciones es más grande, y demostrar la conjetura.

47. ***Iluminación*** Una fuente luminosa se localiza sobre el centro de una mesa circular de 4 pies de diámetro (ver la figura). Encontrar la altura h de la fuente luminosa de modo tal que la iluminación I en el perímetro de la mesa sea máxima si $I = k(\operatorname{sen} \alpha)/s^2$, donde s es la altura oblicua, α es el ángulo al cual la luz incide sobre la mesa y k es una constante.



48. ***Iluminación*** La iluminación a partir de una fuente luminosa es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir de la fuente. Dos fuentes luminosas de intensidades I_1 e I_2 se encuentran separadas d unidades. ¿Qué punto del segmento de recta que une a las dos fuentes tiene una menor iluminación?

49. ***Tiempo mínimo*** Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano a la costa. Se dirige al punto Q, localizado a 3 millas por la costa y a una milla tierra adentro (ver la figura). El hombre puede remar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar al punto Q en el menor tiempo?



50. ***Tiempo mínimo*** Considerar en el ejercicio 49 si el punto Q está sobre la línea costera y no a una milla tierra adentro.

   a) Escribir el tiempo de recorrido T como una función de α.

   b) Utilizar el resultado del apartado *a*) para encontrar el tiempo mínimo para llegar a Q.

   c) El hombre puede remar a v_1 millas por hora y caminar a v_2 millas por hora. Escribir el tiempo T como una función de α. Mostrar que el punto crítico T depende sólo de v_1 y v_2 y no de las distancias. Explicar cómo este resultado sería más favorable para el hombre que el resultado del ejercicio 49.

   d) Describir cómo aplicar el resultado del apartado *c*) para minimizar el costo de construcción de un cable de transmisión eléctrica que cuesta c_1 dólares por milla bajo el agua y c_2 dólares por milla sobre tierra.

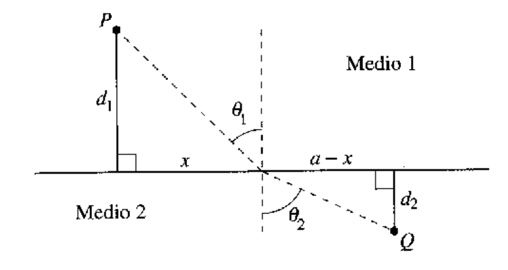
51. ***Tiempo mínimo*** Las condiciones son las mismas que en el ejercicio 49 salvo que el hombre puede remar a v_1 millas por hora y caminar a v_2 millas por hora. Si θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos, mostrar que el hombre llegará al punto Q en el menor tiempo cuando

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}.$$

52. ***Tiempo mínimo*** Cuando las ondas luminosas, que viajan en un medio transparente, inciden sobre la superficie de un segundo medio transparente, cambian de dirección. Este cambio de dirección recibe el nombre de *refracción* y se define mediante la **ley de Snell de la refracción,**

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos que se muestran en la figura y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Demostrar que este problema es equivalente al del ejercicio 51, y que las ondas luminosas que viajan de P a Q siguen la trayectoria de tiempo mínimo.



53. Dibujar las gráficas de $f(x) = 2 - 2$ sen x en el intervalo $[0, \pi/2]$.

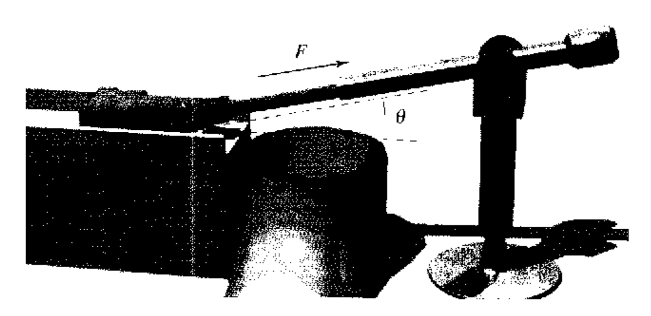
a) Determine la distancia desde el origen a la intersección con el eje y y la distancia desde el origen a la intersección con el eje x.

b) Escribir la distancia d desde el origen hasta un punto sobre la gráfica de f como una función de x. Utilizar una calculadora para representar gráficamente d y encontrar la distancia mínima.

c) Usar el cálculo y la función *zero* o *root* de una computadora para encontrar el valor de x que minimiza la función d en el intervalo $[0, \pi/2]$. ¿Cuál es la distancia mínima?
(*Proporcionado por Tim Chapel, Penn Valley Community College, Kansas City, MO.*)

54. ***Costo mínimo*** Un pozo petrolero marino se encuentra a 2 kilómetros de la costa. La refinería está a 4 kilómetros por la costa. La instalación de la tubería en el océano es dos veces más cara que sobre tierra. ¿Qué trayectoria debe seguir la tubería para minimizar el costo?

55. ***Fuerza mínima*** Se diseña un componente para deslizar un bloque de acero con peso W a través de una mesa y hacia una canaleta (ver la figura). Se opone al movimiento del bloque una fuerza de fricción proporcional a su peso aparente. (Sea k la constante de proporcionalidad.) Determinar la fuerza mínima f necesaria para deslizar el bloque y encontrar el valor correspondiente de θ. (*Sugerencia*: f cos θ es la fuerza en la dirección del movimiento, y f sen θ es la cantidad de fuerza que tiende a levantar el bloque. De tal modo, el peso aparente del bloque es $W - f$ sen θ.)



56. ***Volumen máximo*** Un sector con ángulo central θ se corta de un círculo de 12 pulgadas de radio (ver la figura), y los bordes del sector se juntan para formar un cono. Determinar la magnitud de θ tal que el volumen del cono sea un máximo.

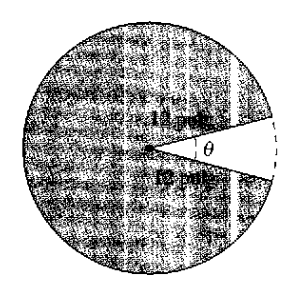


Figura para 56

Figura para 57

57. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Las secciones transversales de un canal de irrigación son trapezoides isósceles de los cuales los tres lados miden 8 pies de largo (ver la figura). Determinar el ángulo de elevación θ de los lados de manera tal que el área de la sección transversal sea un máximo, completando lo siguiente.

a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Base 1	Base 2	Altura	Área
8	$8 + 16 \cos 10°$	8 sen $10°$	≈ 22.1
8	$8 + 16 \cos 20°$	8 sen $20°$	≈ 42.5

b) Emplear una calculadora para generar renglones adicionales de la tabla y estimar el área de sección transversal máxima. (*Sugerencia*: Utilizar la función *table* de la calculadora.)

c) Escribir el área de la sección transversal A como una función de θ.

d) Recurrir al cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *c*) y encontrar el ángulo que producirá la máxima área de sección transversal.

e) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función del apartado *c*) y verificar el área máxima de sección transversal.

58. ***Utilidad máxima (beneficio máximo)*** Suponer que la cantidad de dinero depositada en un banco es proporcional al cuadrado de la tasa de interés que paga el banco sobre este dinero. Además, el banco puede reinvertir esta suma a 12%. Determinar la tasa de interés que el banco debe pagar para maximizar la utilidad (el beneficio). (Utilizar la fórmula de interés simple.)

59. ***Costo mínimo*** El costo de pedido y transporte C de las componentes utilizadas en la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos. Encontrar el tamaño del pedido que minimiza el costo. (*Sugerencia*: Utilizar la función *root* de una calculadora.)

60. ***Disminución de rendimientos*** La utilidad (el beneficio) P (en miles de dólares) para una compañía que gasta una cantidad s (en miles de dólares) en publicidad es

$$P = -\tfrac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400.$$

a) Hallar la cantidad de dinero que la compañía debe gastar en publicidad para producir una utilidad máxima (un rendimiento máximo).

b) El *punto de disminución de rendimientos* es el punto en el cual la tasa de crecimiento de la función de utilidad (de rendimiento) empieza a declinar. Determinar el punto de disminución de rendimientos.

Distancia mínima **En los ejercicios 61 a 63, considerar un centro de distribución de combustible localizado en el origen del sistema rectangular de coordenadas (unidades en millas; ver las figuras en la siguiente página). El centro suministra a tres fábricas con coordenadas (4, 1), (5, 6) y (10, 3). Los camiones de reparto siguen la línea $y = mx$, y líneas de alimentación a las tres fábricas. El objetivo es determinar m de forma que la suma de las longitudes de las líneas sea lo más pequeña posible.**

61. Minimizar la suma de los cuadrados de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$S_1 = (4m - 1)^2 + (5m - 6)^2 + (10m - 3)^2$.

Hallar la ecuación de la ruta recta de los camiones mediante este método y después determinar la suma de las longitudes de las líneas de alimentación.

62. Minimizar la suma de los valores absolutos de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$S_2 = |4m - 1| + |5m - 6| + |10m - 3|$.

Hallar la ecuación para la ruta recta de los camiones mediante este método y luego determinar la suma de las longitudes de las líneas de alimentación. (*Sugerencia*: Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función S_2 y aproximar el punto crítico requerido.)

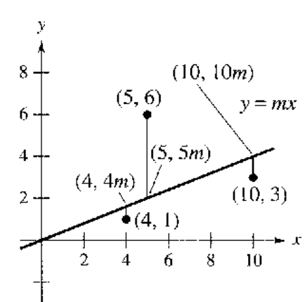


Figura para 61 y 62

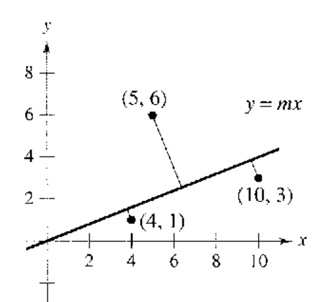


Figura para 63

63. Minimizar la suma de las distancias perpendiculares (ver los ejercicios 85 a 90 en la sección P.2) de la línea a las fábricas dada por

$$S_3 = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|5m - 6|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|10m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

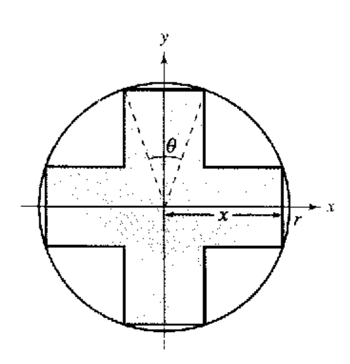
Hallar la ecuación para la línea mediante este método y a continuación determinar la suma de las longitudes de los desvíos. (*Sugerencia:* Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función S_3 y aproximar el punto crítico requerido.)

64. ***Área máxima*** Considerar una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).

a) Escribir el área A de la cruz como una función de x y determinar el valor de x que maximiza el área.

b) Escribir el área A de la cruz como una función de θ y encontrar el valor de θ que maximiza el área.

c) Demostrar que los puntos críticos de los apartados *a*) y *b*) producen la misma área máxima. ¿Cuál es esta área?



Preparación del examen Putnam

65. Determinar el valor máximo de $f(x) = x^3 - 3x$ en un conjunto de números reales x que satisfacen $x^4 = 36 \leq 13x^2$. Explicar el razonamiento.

66. Encontrar el valor mínimo de

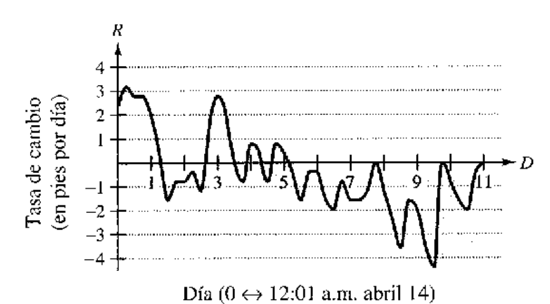
$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}$$

para $x > 0$.

Proyecto de trabajo: Río Connecticut

Cada vez que el Río Connecticut alcanza un nivel de 105 pies sobre el nivel del mar, dos operadores de la estación de control de inundaciones en Northampton, Massachusetts, inician una vigilancia horaria del río. Cada 2 horas, verifican la altura del mismo, utilizando una escala marcada en décimas de pie, y registran los datos en una bitácora. En la primavera de 1996, la vigilancia de la crecida se efectuó del 4 de abril, cuando el río alcanzó 105 pies y se elevaba a razón de 0.2 pies por hora, hasta el 25 de abril, cuando el nivel regresó de nuevo a 105 pies. Entre estas fechas, los registros muestran que el río creció y bajó varias veces, en un punto cercano a la marca de 115 pies. Si el río hubiera alcanzado 115 pies, la ciudad habría tenido que cerrar la autopista Mount Tom (Ruta 5, al sur de Northampton).

La gráfica siguiente muestra el ritmo o tasa de cambio del nivel del río durante una parte de la vigilancia de la crecida. Recurrir a la gráfica para responder cada pregunta.



a) ¿En qué fecha el río creció con mayor rapidez? ¿Cómo se puede saber?

b) ¿En qué fecha el río tuvo el descenso más rápido? ¿Cómo se puede saber?

c) Hubo dos fechas seguidas en las que el río creció, después bajó, después creció de nuevo durante el curso del día. ¿Qué día ocurrió lo anterior y cómo se puede determinar?

d) Un minuto después de la media noche, el 14 de abril, el nivel del río se encontraba en 111.0 pies. Estimar la altura del mismo 24 horas después y 48 horas después. Explicar cómo se efectuaron las estimaciones.

e) El río alcanzó su valor más alto en 114.4 pies. ¿En qué fecha ocurrió lo anterior?

(Propuesto por Mary Murphy, Smith College, Northampton, MA)

Sección 3.8 Método de Newton

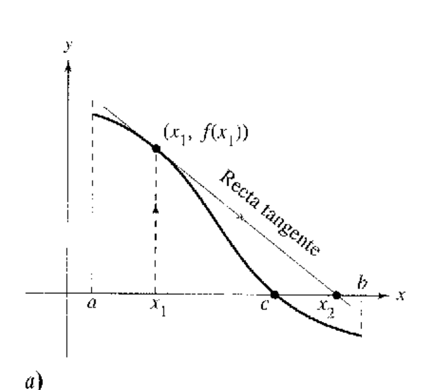
- **Aproximar un cero de una función utilizando el método de Newton.**

Método de Newton

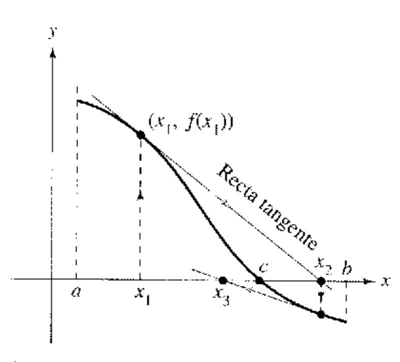
En esta sección se estudiará una técnica para aproximar los ceros reales de una función. La técnica recibe el nombre de **método de Newton** y utiliza rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus intersecciones con el eje x.

Para ver cómo funciona el método de Newton, considerar una función f que es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo, entonces, por el teorema del valor intermedio, f debe tener al menos un cero en el intervalo (a, b). Suponer que se estima que este cero ocurre en

$$x = x_1 \qquad \text{Primera estimación.}$$



a)



b)
La intersección con el eje x de la recta tangente se aproxima a cero de f
Figura 3.60

como se muestra en la figura 3.60*a*. El método de Newton se basa en la suposición de que la gráfica de f y la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ cruzan ambas por el eje x en *casi* el mismo punto. Debido a que es muy fácil calcular la intersección con el eje x de esta recta tangente, es posible utilizarla como una segunda estimación (y, usualmente, mejor) del cero de f. La recta tangente pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ con una pendiente de $f'(x_1)$. En la forma de punto-pendiente, la ecuación de la recta tangente es en consecuencia

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Dejando $y = 0$ y despejando x, se obtiene

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

De tal modo, a partir de la estimación inicial x_1 se obtiene una nueva estimación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad \text{Segunda estimación [ver la figura 3.60}b\text{].}$$

Es posible mejorar x_2 y calcular aun una tercera estimación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \qquad \text{Tercera estimación.}$$

La aplicación repetida de este proceso se denomina método de Newton.

MÉTODO DE NEWTON

Quizá Newton fue el primero que describió el método para aproximar los ceros reales de una función en su texto *Method of Fluxions*. Aunque el libro lo escribió en 1671, no se publicó hasta 1736. Entre tanto, en 1690, Joseph Raphson (1648-1715) publicó un artículo que describía un método para aproximar los ceros reales de una función que era muy similar al de Newton. Por esta razón, el método a veces recibe el nombre de método de Newton-Raphson.

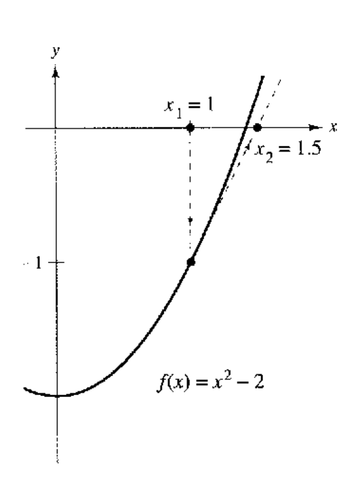
Método de Newton para aproximar los ceros de una función

Sea $f(c) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c. Entonces, para aproximar c, se siguen los siguientes pasos.

1. Se efectúa una estimación inicial x_1 que es cercana a c. (Una gráfica es útil.)
2. Se determina una nueva aproximación
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
3. Si $|x_n - x_{n+1}|$ está dentro de la precisión deseada, dejar que x_{n+1} sirva como la aproximación final. En otro caso, volver al paso dos y calcular una nueva aproximación.

Cada aplicación sucesiva de este procedimiento recibe el nombre de **iteración**.

NOTA Para muchas funciones, con unas pocas iteraciones del método de Newton, se conseguirán errores de aproximación muy pequeños como muestra el ejemplo 1.



La primera iteración del método de Newton
Figura 3.61

EJEMPLO 1 Aplicación del método de Newton

Calcular tres iteraciones del método de Newton para aproximar un cero de $f(x) = x^2 - 2$. Utilizar $x_1 = 1$ como la estimación inicial.

Solución Como $f(x) = x^2 - 2$, se tiene que $f'(x) = 2x$, y el proceso iterativo está dado por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Los cálculos para tres iteraciones se muestran en la tabla.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1.000000	−1.000000	2.000000	−0.500000	1.500000
2	1.500000	0.250000	3.000000	0.083333	1.416667
3	1.416667	0.006945	2.833334	0.002451	1.414216
4	1.414216				

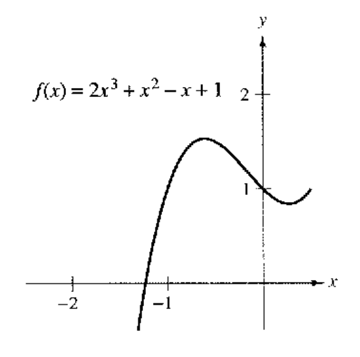
Desde luego, en este caso, se sabe que los dos ceros de la función son $\pm\sqrt{2}$. Hasta seis lugares decimales, $\sqrt{2} = 1.414214$. De tal modo, después de sólo tres iteraciones del método de Newton, se obtiene una aproximación que está dentro de 0.000002 de una raíz real. La primera iteración de este proceso se muestra en la figura 3.61.

EJEMPLO 2 Aplicación del método de Newton

Utilizar el método de Newton para aproximar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1.$$

Continuar las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.0001.



Después de tres iteraciones del método de Newton, el cero de f se aproxima hasta la exactitud deseada
Figura 3.62

Solución Empezar dibujando una gráfica de f, como se muestra en la figura 3.62. A partir de la gráfica, se puede observar que la función tiene sólo un cero, el cual ocurre cerca de $x = -1.2$. A continuación, derivar f y construir la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}.$$

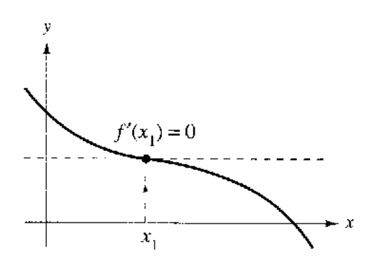
Los cálculos se muestran en la tabla.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	−1.20000	0.18400	5.24000	0.03511	−1.23511
2	−1.23511	−0.00771	5.68276	−0.00136	−1.23375
3	−1.23375	0.00001	5.66533	0.00000	−1.23375
4	−1.23375				

Como dos aproximaciones sucesivas difieren por menos del valor requerido de 0.0001, se puede estimar el cero de f como −1.23375.

Cuando, como en los ejemplos 1 y 2, las aproximaciones tienden a un límite, se dice que la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ **converge**. Además, si el límite es c, puede demostrarse que c debe ser un cero de f.

El método de Newton no siempre produce una sucesión convergente. La figura 3.63 ilustra una situación así. Debido a que el método de Newton implica la división entre $f'(x_n)$, es claro que fallará si la derivada es cero para cualquier x_n en la sucesión. Cuando existe este problema, es fácil superarlo eligiendo un valor diferente para x_1. Otra forma en la que el método de Newton puede fallar se muestra en el siguiente ejemplo.



El método de Newton no converge si $f'(x)_n = 0$
Figura 3.63

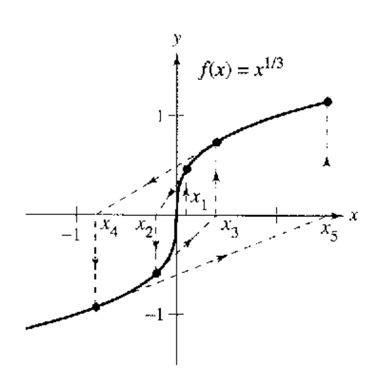
EJEMPLO 3 Ejemplo en el que el método de Newton falla

La función $f(x) = x^{1/3}$ no es derivable en $x = 0$. Demostrar que el método de Newton no converge al utilizar $x_1 = 0.1$.

Solución Como $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, la fórmula iterativa es

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} \\ &= x_n - 3x_n \\ &= -2x_n. \end{aligned}$$

Los cálculos se presentan en la tabla. Esta tabla y la figura 3.64 indican que x_n continúa creciendo en magnitud a medida que $n \to \infty$, y por ello el límite de la sucesión no existe.



El método de Newton no converge para todo valor de x distinto del cero real de f
Figura 3.64

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.10000	0.46416	1.54720	0.30000	−0.20000
2	−0.20000	−0.58480	0.97467	−0.60000	0.40000
3	0.40000	0.73681	0.61401	1.20000	−0.80000
4	−0.80000	−0.92832	0.38680	−2.40000	1.60000

NOTA En el ejemplo 3, la estimación inicial $x_1 = 0.1$ no produce una sucesión convergente. Intentar demostrar que el método de Newton también falla para cualquier otra elección de x_1 (distinta del cero real).

Es posible demostrar que una condición suficiente para producir la convergencia del método de Newton a un cero de f es que

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \qquad \text{Condición para convergencia.}$$

en un intervalo abierto que contenga al cero. Por ejemplo, en el ejemplo 1 en donde $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, se tendrá

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)(2)}{4x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right|. \qquad \text{Ejemplo 1.}$$

En el intervalo $(1, 3)$, esta cantidad es menor que 1 y, en consecuencia, se garantiza la convergencia del método de Newton. Por otro lado, en el ejemplo 3, se tiene $f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ y

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{x^{1/3}(-2/9)(x^{-5/3})}{(1/9)(x^{-4/3})}\right| = 2 \qquad \text{Ejemplo 3.}$$

que no es menor que 1 para ningún valor de x, por lo que el método de Newton no convergerá.

Soluciones algebraicas de ecuaciones polinómicas

The Granger Collection

Niels Henrik Abel (1802-1829)

The Granger Collection

Evariste Galois (1811-1832)

Aunque las vidas tanto de Abel como de Galois fueron breves, su trabajo en el campo del análisis y el álgebra abstracta tuvieron un gran alcance.

Los ceros de algunas funciones, tales como

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

pueden determinarse mediante técnicas algebraicas simples, tales como la factorización. Los ceros de otras funciones, tales como

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

no pueden determinarse mediante métodos algebraicos *elementales*. Esta función particular sólo tiene un cero real, y utilizando técnicas algebraicas más avanzadas se puede determinar que el cero es

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{23/3}}{6}} - \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{23/3}}{6}}.$$

Como la solución *exacta* se escribe en términos de raíces cuadradas y raíces cúbicas, ésta se denomina una **solución por radicales**.

NOTA Intentar la aproximación del cero real de $f(x) = x^3 - x + 1$ y comparar el resultado con la solución exacta dada arriba.

La determinación de las soluciones radicales de una ecuación polinómica es uno de los problemas fundamentales del Álgebra. El primero de este tipo de resultados es la fórmula cuadrática, que data por lo menos de los tiempos de los babilónicos. La fórmula general para los ceros de una función cúbica se desarrolló mucho después. En el siglo XVI un matemático italiano, Girolamo Cardano, publicó el método para encontrar soluciones radicales a ecuaciones cúbicas y de cuarto grado. Después, durante 300 años, el problema de encontrar una fórmula general para el quinto grado permaneció sin resolver. Por último, en el siglo XIX, el problema fue resuelto de manera independiente por dos jóvenes matemáticos. Niels Henrik Abel, un matemático noruego, y Evariste Galois, un matemático francés, demostraron que no es posible resolver una ecuación polinómica general de quinto grado (o mayor) por medio de radicales. Desde luego, se pueden resolver ecuaciones particulares de quinto grado tales como $x^5 - 1 = 0$, pero Abel y Galois fueron capaces de demostrar que no existe una solución general por radicales.

Ejercicios de la sección 3.8

En los ejercicios 1 a 4, completar dos iteraciones del método de Newton para la función utilizando la estimación inicial indicada.

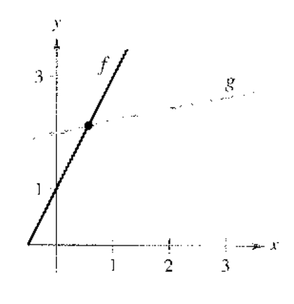
1. $f(x) = x^2 - 3, \quad x_1 = 1.7$
2. $f(x) = 2x^2 - 3, \quad x_1 = 1$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x_1 = 3$
4. $f(x) = \tan x, \quad x_1 = 0.1$

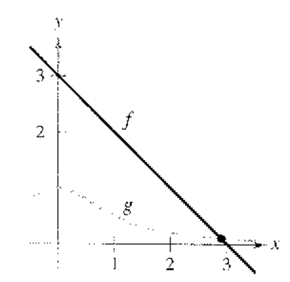
En los ejercicios 5 a 14, aproximar el (los) cero(s) de la función. Utilizar el método de Newton y continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.001. Después encontrar el (los) cero(s) utilizando una calculadora y comparar los resultados.

5. $f(x) = x^3 + x - 1$
6. $f(x) = x^5 + x - 1$
7. $f(x) = 3\sqrt{x-1} - x$
8. $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$
9. $f(x) = x^3 + 3$
10. $f(x) = 1 - 2x^3$
11. $f(x) = x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881$
12. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x - 3$
13. $f(x) = x + \operatorname{sen}(x+1)$
14. $f(x) = x^3 - \cos x$

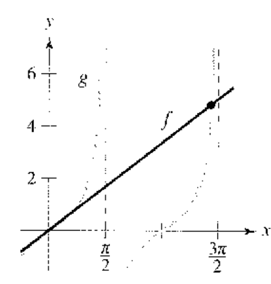
En los ejercicios 15 a 18, aplicar el método de Newton para aproximar el (los) valor(es) de x del (los) punto(s) indicado(s) de intersección de las dos gráficas. Continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.001. [*Sugerencia*: Sea $h(x) = f(x) - g(x)$.]

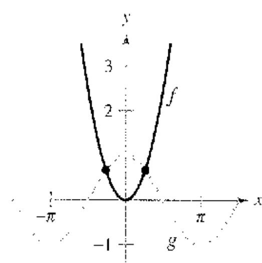
15. $f(x) = 2x + 1$
    $g(x) = \sqrt{x+4}$
16. $f(x) = 3 - x$
    $g(x) = 1/(x^2 + 1)$





17. $f(x) = x$
    $g(x) = \tan x$
18. $f(x) = x^2$
    $g(x) = \cos x$





19. ***Regla de la mecánica*** La regla de la mecánica para aproximar $\sqrt{a}$, $a > 0$, es

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

donde x_1 es una aproximación de $\sqrt{a}$.

a) Utilizar el método de Newton y la función $f(x) = x^2 - a$ para derivar la regla de la mecánica.

b) Utilizar la regla de la mecánica para aproximar $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ hasta tres decimales.

20. *a*) Emplear el método de Newton y la función $f(x) = x^n - a$ para obtener una regla general relativa a la aproximación de $x = \sqrt[n]{a}$.

b) Utilizar la regla general que se encontró en el apartado *a*) para aproximar $\sqrt[4]{6}$ y $\sqrt[3]{15}$ hasta tres decimales.

En los ejercicios 21 a 24, aplicar el método de Newton utilizando la estimación inicial indicada y explicar por qué falla el método.

21. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1, \quad x_1 = 1$
22. $y = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 3, \quad x_1 = \frac{3}{2}$

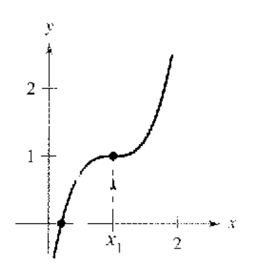


Figura para 21

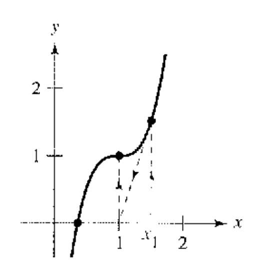


Figura para 22

23. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 6, \quad x_1 = 2$
24. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad x_1 = \frac{3\pi}{2}$

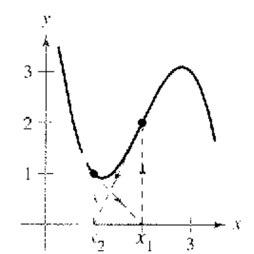


Figura para 23

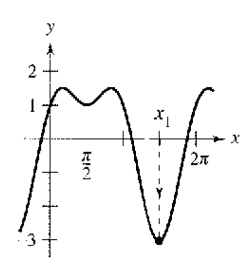


Figura para 24

Desarrollo de conceptos

25. En sus propias palabras y utilizando un dibujo, describa el método de Newton para aproximar los ceros de una función.
26. ¿En qué condiciones fallará el método de Newton?

Punto fijo **En los ejercicios 27 y 28, aproximar el punto fijo de la función hasta dos lugares decimales. [Un *punto fijo* x_0 de una función f es un valor de x tal que $f(x_0) = x_0$.]**

27. $f(x) = \cos x$
28. $f(x) = \cot x, \quad 0 < x < \pi$

29. ***Comentario*** Considerar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Utilizar una computadora para representar f.

b) Utilizar el método de Newton con $x_1 = 1$ como estimación inicial.

c) Repetir el apartado *b*) utilizando $x_1 = \frac{1}{4}$ como estimación inicial y observar que el resultado es diferente.

d) Para comprender por qué los resultados de los apartados *b*) y *c*) son diferentes, dibujar las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $(1, f(1))$ y $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$. Determinar la intersección con el eje x de cada recta tangente y comparar las intersecciones con la primera iteración del método de Newton utilizando las estimaciones iniciales respectivas.

e) Escribir un breve párrafo en el que se resuma la forma en que funciona el método de Newton. Utilizar los resultados de este ejercicio para describir por qué es importante seleccionar con cuidado la estimación inicial.

30. ***Comentario*** Repetir los pasos en el ejercicio 29 para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ con estimaciones iniciales de $x_1 = 1.8$ y $x_1 = 3$.

31. Utilizar el método de Newton para demostrar que la ecuación $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ puede utilizarse para aproximar $1/a$ si x_1 es una estimación inicial del recíproco de a. Notar que este método de aproximación de recíprocos utiliza sólo la operación de multiplicación y resta. [*Sugerencia:* Considerar $f(x) = (1/x) - a$.]

32. Utilizar el resultado del ejercicio 31 para aproximar *a*) $\frac{1}{3}$ y *b*) $\frac{1}{11}$ hasta tres lugares decimales.

En los ejercicios 33 y 34, aproximar el punto crítico de f en el intervalo $(0, \pi)$. Dibujar la gráfica de f, marcando cualquier extremo.

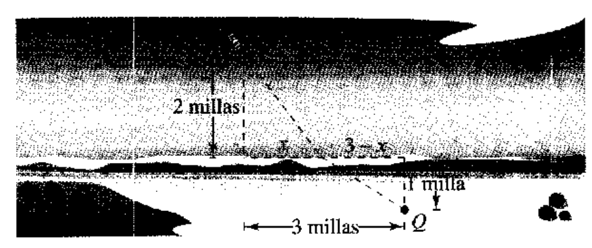
33. $f(x) = x \cos x$ **34.** $f(x) = x \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 35 a 38, se incluyen algunos problemas típicos de las secciones previas de este capítulo. En cada caso, utilizar el método de Newton para aproximar la solución.

35. ***Distancia mínima*** Hallar sobre la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ el punto más cercano al punto $(1, 0)$.

36. ***Distancia mínima*** Encontrar sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ el punto más cercano al punto $(4, -3)$.

37. ***Tiempo mínimo*** Se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano sobre la costa (ver la figura) y se dirige al punto Q, que se ubica a 3 millas por la costa y a 1 milla tierra adentro. Tiene la posibilidad de remar a 3 millas por hora y de caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar a Q en el tiempo mínimo?



38. ***Medicina*** La concentración C de un compuesto químico en el flujo sanguíneo t horas después de la inyección en el tejido muscular está dada por $C = (3t^2 + t)/(50 + t^3)$. ¿Cuándo es más grande la concentración?

39. ***Costos de publicidad*** Una compañía que produce reproductores de discos compactos portátiles estima que la ganancia por la venta de un modelo particular es

$$P = -76x^3 + 4\,830x^2 - 320\,000, \quad 0 \le x \le 60$$

donde P es la ganancia en dólares y x es el gasto de publicidad en 10 000 de dólares (ver la figura). De acuerdo con este modelo, determinar la más pequeña de dos cantidades de publicidad que producirían una ganancia P de 2 500 000 dólares.

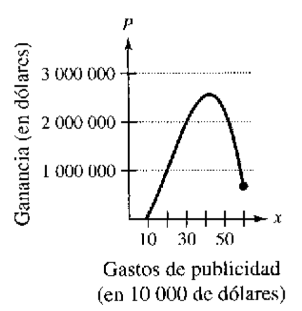


Figura para 39

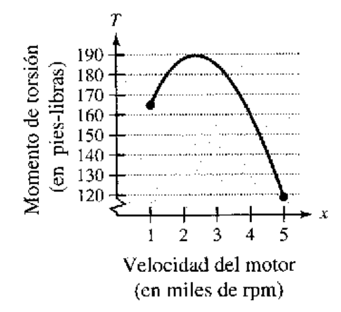


Figura para 40

40. ***Potencia de motor*** El momento de torsión producido por el motor de un automóvil compacto se aproxima por medio del modelo

$$T = 0.808x^3 - 17.974x^2 + 71.248x + 110.843, \quad 1 \le x \le 5$$

donde T es el momento de torsión en pies-libras y x es la velocidad del motor en miles de revoluciones por minuto (ver la figura). Aproximar las dos velocidades del motor que produzcan un momento de torsión T de 170 pies-libras.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 41 a 44, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un contraejemplo.**

41. Los ceros de $f(x) = p(x)/q(x)$ coinciden con los ceros de $p(x)$.

42. Si los coeficientes de una función polinómica son todos positivos, entonces el polinomio no tiene ceros positivos.

43. Si $f(x)$ es un polinomio cúbico tal que $f'(x)$ nunca es cero, entonces cualquier estimación inicial forzará a que el método de Newton converja al cero de f.

44. Las raíces de $\sqrt{f(x)} = 0$ coinciden con las raíces de $f(x) = 0$.

45. ***Rectas tangentes*** La gráfica de $f(x) = -\operatorname{sen} x$ tiene un número infinito de rectas tangentes que pasan por el origen. Utilizar el método de Newton para aproximar la pendiente de la recta tangente que tenga la pendiente más grande hasta tres lugares decimales.

46. Considerar la función $f(x) = 2x^3 - 20x^2 - 12x - 24$.

a) Utilizar una calculadora para determinar el número de ceros de f.

b) Utilizar el método de Newton con una estimación inicial de x_1 para aproximar el cero de f hasta cuatro lugares decimales.

c) Repetir el apartado *b*) utilizando estimaciones iniciales de $x_1 = 10$ y $x_1 = 100$.

d) Analizar los resultados de los apartados *b*) y *c*). ¿Qué se puede concluir?

Sección 3.9 Diferenciales

- **Entender el concepto de una aproximación por medio de una recta tangente.**
- **Comparar el valor de la diferencial, dy, con el cambio real en y, Δy.**
- **Estimar un error propagado utilizando una diferencial.**
- **Encontrar la diferencial de una función utilizando fórmulas de derivación.**

EXPLORACIÓN

Aproximación mediante la recta tangente Usar una calculadora para representar gráficamente

$$f(x) = x^2.$$

En la misma ventana de observación, representar gráficamente la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, 1). Realizar un doble acercamiento en el punto de tangencia. ¿La calculadora distingue las dos gráficas? Utilizar la característica *trace* para comparar las dos gráficas. A medida que los valores de x se acercan más a 1, ¿qué se puede decir acerca de los valores de y?

Aproximaciones por recta tangente

El método de Newton (sección 3.8) es un ejemplo del uso de una recta tangente a una gráfica para aproximar la gráfica. En esta sección se estudiarán otras situaciones en las cuales la gráfica de la función puede aproximarse mediante una línea recta.

De inicio, considerar una función f que es derivable en c, la ecuación para la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ está dada por

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$
$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

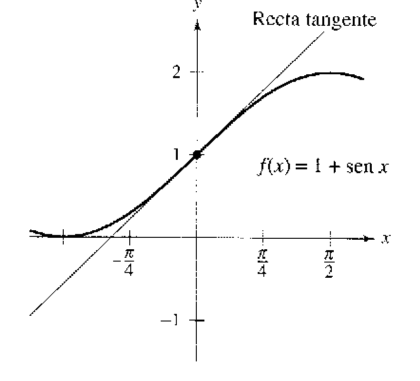
y es llamada **aproximación por medio de una recta tangente** (o **aproximación lineal**) **de f en c**. Como c es una constante, y es una función lineal de x. Además, restringiendo los valores de x de modo que sean suficientemente cercanos a c, los valores de y pueden utilizarse como aproximaciones (hasta cualquier precisión deseada) de los valores de la función f. En otras palabras, cuando $x \to c$, el límite de y es $f(c)$.

EJEMPLO 1 Utilización de la aproximación por medio de una recta tangente

Determinar la aproximación por medio de una recta tangente de

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$$

en el punto (0, 1). Utilizar después una tabla para comparar los valores y de la función lineal con los de $f(x)$ en un intervalo abierto que contenga a $x = 0$.



La aproximación de la recta tangente de f en el punto (0, 1)
Figura 3.65

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = \cos x. \qquad \text{Primera derivada.}$$

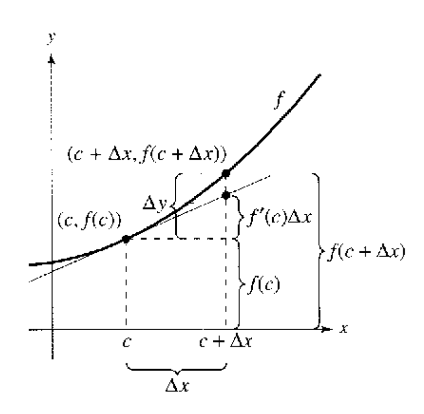
De tal modo, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 1) es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
$$y - 1 = (1)(x - 0)$$
$$y = 1 + x. \qquad \text{Aproximación por la recta tangente.}$$

La tabla compara los valores de y dados por esta aproximación lineal con los valores de $f(x)$ cerca de $x = 0$. Advertir que cuanto más cercana es x a 0, tanto mejor es la aproximación. Esta conclusión se refuerza por medio de la gráfica que se muestra en la figura 3.65.

x	−0.5	−0.1	−0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$	0.521	0.9002	0.9900002	1	1.0099998	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5

NOTA Asegurarse de ver que esta aproximación lineal de $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ depende del punto de tangencia. En un punto diferente sobre la gráfica de f, se obtendría una aproximación mediante la recta tangente diferente.



Cuando Δx es pequeña, $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es aproximada por $f'(c)\, \Delta x$
Figura 3.66

Diferenciales

Cuando la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad \text{Recta tangente en } (c, f(c)).$$

se usa como una aproximación de la gráfica de f, la cantidad $x - c$ recibe el nombre de cambio en x, y se denota mediante Δx, como se muestra en la figura 3.66. Cuando Δx es pequeña, el cambio en y (denotado por Δy) puede aproximarse como se muestra.

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \qquad \text{Cambio real en } y.$$
$$\approx f'(c)\Delta x \qquad \text{Cambio aproximado en } y.$$

Para una aproximación de este tipo, la cantidad Δx tradicionalmente se denota mediante dx, y recibe el nombre de la **diferencial de x**. La expresión $f'(x)\,dx$ se denota por dy, y se denomina la **diferencial de y**.

> **Definición de diferenciales**
>
> Considerar que $y = f(x)$ representa una función que es derivable en un intervalo abierto que contiene a x. La **diferencial de x** (denotada por dx) es cualquier número real distinto de cero. La **diferencial de y** (denotada por dy) es
>
> $$dy = f'(x)\,dx.$$

En muchos tipos de aplicaciones, la diferencial de y puede utilizarse como una aproximación del cambio en y. Esto es

$$\Delta y \approx dy \qquad \text{o} \qquad \Delta y \approx f'(x)dx.$$

El cambio en y, Δy, se aproxima por la diferencial de y, dy
Figura 3.67

EJEMPLO 2 Comparación de Δy y dy

Sea $y = x^2$, determinar dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.01$. Comparar este valor con Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución Como $y = f(x) = x^2$, se tiene $f'(x) = 2x$, y la diferencial dy está dada por

$$dy = f'(x)\,dx = f'(1)(0.01) = 2(0.01) = 0.02. \qquad \text{Diferencial de } y.$$

Ahora, utilizando $\Delta x = 0.01$, el cambio en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1^2 = 0.0201.$$

La figura 3.67 muestra la comparación geométrica de dy y Δy. Intente comparar otros valores de dy y Δy. Verá que los valores se aproximan cada vez más entre sí cuando dx (o Δx) tiende a cero.

En el ejemplo 2, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ a $x = 1$ es

$$y = 2x - 1 \qquad \text{o} \qquad g(x) = 2x - 1. \qquad \text{Recta tangente a la gráfica de } f \text{ en } x = 1.$$

Para valores de x cercanos a 1, esta recta es cercana a la gráfica de f, como se muestra en la figura 3.67. Por ejemplo

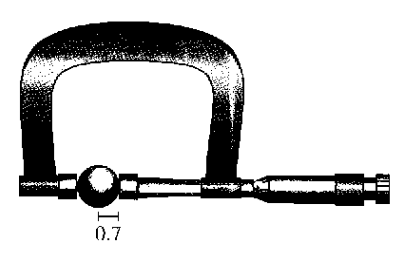
$$f(1.01) = 1.01^2 = 1.0201 \qquad \text{y} \qquad g(1.01) = 2(1.01) - 1 = 1.02.$$

Propagación del error

Los físicos e ingenieros tienden a hacer un uso libre de las aproximaciones de Δy mediante dy. Así sucede en la práctica al estimar los errores propagados por los aparatos (dispositivos) de medida. Por ejemplo, si x denota el valor medido de una variable y $x + \Delta x$ representa el valor exacto, entonces Δx es el *error de medida (medición)*. Por último, si el valor medido x se usa para calcular otro valor $f(x)$, la diferencia entre $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ es el **error propagado**.

$$\underbrace{f(x + \overbrace{\Delta x}^{\text{Error de medición}})}_{\text{Valor exacto}} - \underbrace{f(x)}_{\text{Valor medido}} = \overbrace{\Delta y}^{\text{Error propagado}}$$

EJEMPLO 3 Estimación del error



Cojinete de bola con el radio medido que no tiene un error mayor de 0.01 pulgadas
Figura 3.68

Se mide el radio de una bola de un cojinete y se encuentra que es igual a 0.7 pulgadas, como se muestra en la figura 3.68. Si la medición no tiene un error mayor a 0.01 pulgadas, estimar el error propagado en el volumen V de la bola del cojinete.

Solución La fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. De tal modo, es posible escribir

$r = 0.7$ Radio medido.

y

$-0.01 \leq \Delta r \leq 0.01.$ Error posible.

Para aproximar el error propagado en el volumen, se diferencia V para obtener $dV/dr = 4\pi r^2$ y se escribe

$$\begin{aligned}
\Delta V &\approx dV && \text{Aproximar } \Delta V \text{ con } dV. \\
&= 4\pi r^2\,dr \\
&= 4\pi(0.7)^2(\pm 0.01) && \text{Sustituir } r \text{ y } dr. \\
&\approx \pm 0.06158 \text{ pulgadas cúbicas}
\end{aligned}$$

De este modo, el volumen ha propagado un error de casi 0.06 pulgadas cúbicas.

¿El error propagado en el ejemplo 3 es grande o pequeño? La respuesta se indica de mejor manera en términos *relativos* al comparar dV con V. La proporción

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{V} &= \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} && \text{Cociente de } dV \text{ y } V. \\
&= \frac{3\,dr}{r} && \text{Simplificar} \\
&\approx \frac{3}{0.7}(\pm 0.01) && \text{Sustituir } dr \text{ y } r. \\
&\approx \pm 0.0429
\end{aligned}$$

recibe el nombre de **error relativo**. El correspondiente **error porcentual** es aproximadamente 4.29%.

Cálculo de diferenciales

Cada una de las reglas de derivación que se estudiaron en el capítulo 2 pueden escribirse en **forma diferencial**. Por ejemplo, suponer que u y v son funciones derivables de x. A partir de la definición de diferenciales, se tiene

$$du = u'\,dx \qquad \text{y} \qquad dv = v'\,dx.$$

De tal manera, se puede escribir la forma diferencial de la regla del producto como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} d[uv] &= \frac{d}{dx}[uv]\,dx && \text{Diferencial de } uv. \\ &= [uv' + vu']\,dx && \text{Regla del producto.} \\ &= uv'\,dx + vu'\,dx \\ &= u\,dv + v\,du \end{aligned}$$

Fórmulas diferenciales

Sean u y v funciones diferenciables de x.

Múltiplo constante: $d[cu] = c\,du$

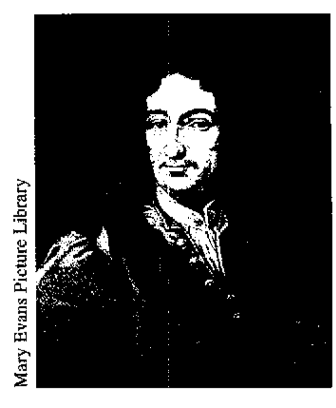
Suma o diferencia: $d[u \pm v] = du \pm dv$

Producto: $d[uv] = u\,dv + v\,du$

Cociente: $d\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

EJEMPLO 4 Determinación de diferenciales

	Función	*Derivada*	*Diferencial*
a)	$y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2x\,dx$
b)	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$\dfrac{dy}{dx} = 2 \cos x$	$dy = 2 \cos x\,dx$
c)	$y = x \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -x \operatorname{sen} x + \cos x$	$dy = (-x \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$
d)	$y = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$



Mary Evans Picture Library

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ 1646-1716

Tanto a Leibniz como a Newton se les acredita como creadores del cálculo. Sin embargo, fue Leibniz quien trató de ampliar el cálculo formulando reglas y la notación formal. A menudo pasaba días eligiendo una notación adecuada para un nuevo concepto.

La notación en el ejemplo 4 recibe el nombre de **notación de Leibniz** para derivadas y diferenciales, en honor del matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. La belleza de esta notación se debe a que proporciona una forma fácil de recordar varias fórmulas de cálculo importantes al dar la apariencia de que las fórmulas se derivaron de manipulaciones algebraicas de diferenciales. Por ejemplo, en la notación de Leibniz, la *regla de la cadena*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

parecería ser verdadera debido a que las du se anulan. Aunque este razonamiento es *incorrecto*, la notación ayuda a recordar la regla de la cadena.

EJEMPLO 5 **Diferencial de una función compuesta**

$$y = f(x) = \text{sen } 3x \qquad \text{Función original.}$$
$$f'(x) = 3 \cos 3x \qquad \text{Aplicación de la regla de la cadena.}$$
$$dy = f'(x)\,dx = 3 \cos 3x\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

EJEMPLO 6 **Diferencial de una función compuesta**

$$y = f(x) = (x^2 + 1)^{1/2} \qquad \text{Función original.}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{Aplicación de la regla de la cadena.}$$
$$dy = f'(x)\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para realizar esto con respecto a la función dada por $y = f(x)$, utilizar la fórmula

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx$$

la cual se deriva de la aproximación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$. La clave para utilizar esta fórmula es elegir un valor de x que facilite el cálculo, como se muestra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 **Aproximación de los valores de una función**

Utilizar diferenciales para aproximar $\sqrt{16.5}$.

Solución Utilizando $f(x) = \sqrt{x}$, se puede escribir

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Ahora bien, eligiendo $x = 16$ y $dx = 0.5$, se obtiene la siguiente aproximación

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{16.5} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 4.0625$$

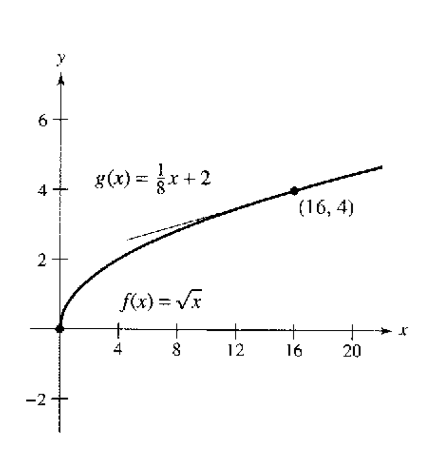


Figura 3.69

La aproximación por medio de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 16$ es la línea $g(x) = \frac{1}{8}x + 2$. Para valores de x cercanos a 16, las gráficas de f y g son muy próximas entre sí, como se muestra en la figura 3.69. Por ejemplo,

$$f(16.5) = \sqrt{16.5} \approx 4.0620 \quad \text{y} \quad g(16.5) = \frac{1}{8}(16.5) + 2 = 4.0625.$$

De hecho, si se usa una calculadora para realizar un acercamiento al punto de tangencia (16, 4), se verá que las dos gráficas parecen coincidir. Advertir también que a medida que se aleja del punto de tangencia, la aproximación lineal es menos exacta.

Ejercicios de la sección 3.9

En los ejercicios 1 a 6, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto dado. Utilizar esta aproximación lineal para completar la tabla.

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$					
$T(x)$					

1. $f(x) = x^2, \quad (2, 4)$
2. $f(x) = \dfrac{6}{x^2}, \quad \left(2, \dfrac{3}{2}\right)$
3. $f(x) = x^5, \quad (2, 32)$
4. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (2, \sqrt{2})$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad (2, \operatorname{sen} 2)$
6. $f(x) = \csc x, \quad (2, \csc 2)$

En los ejercicios 7 a 10, utilizar la información para evaluar y comparar Δy y dy.

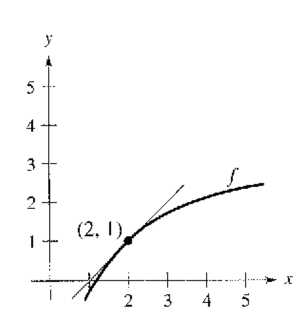
7. $y = \frac{1}{2}x^3 \qquad x = 2 \qquad \Delta x = dx = 0.1$
8. $y = 1 - 2x^2 \qquad x = 0 \qquad \Delta x = dx = -0.1$
9. $y = x^4 + 1 \qquad x = -1 \qquad \Delta x = dx = 0.01$
10. $y = 2x + 1 \qquad x = 2 \qquad \Delta x = dx = 0.01$

En los ejercicios 11 a 20, determinar la diferencial dy de la función indicada.

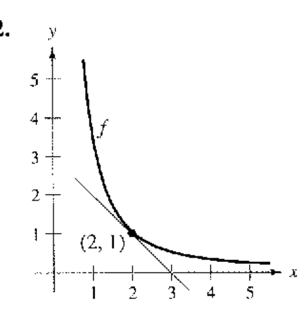
11. $y = 3x^2 - 4$
12. $y = 3x^{2/3}$
13. $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$
14. $y = \sqrt{9 - x^2}$
15. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
16. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
17. $y = 2x - \cot^2 x$
18. $y = x \operatorname{sen} x$
19. $y = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{6\pi x - 1}{2}\right)$
20. $y = \dfrac{\sec^2 x}{x^2 + 1}$

En los ejercicios 21 a 24, emplear diferenciales y la gráfica de f para aproximar *a*) $f(1.9)$ y *b*) $f(2.04)$.

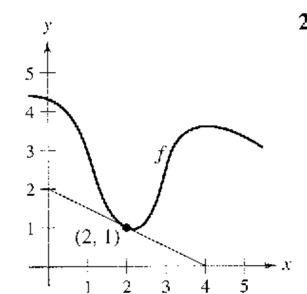
21.



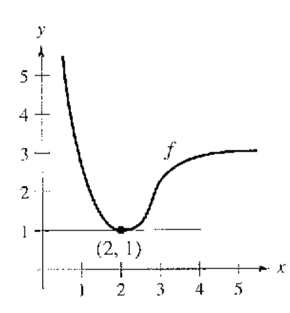
22.



23.

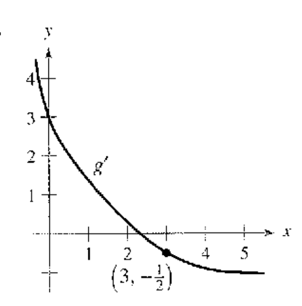


24.

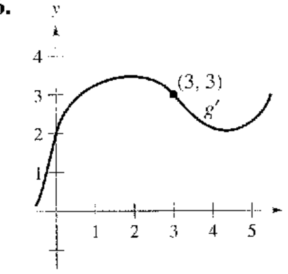


En los ejercicios 25 y 26, utilizar diferenciales y la gráfica de g' para aproximar *a*) $g(2.93)$ y *b*) $g(3.1)$ dado que $g(3) = 8$.

25.



26.



27. ***Área*** Se encuentra que la medición del lado de un cuadrado es igual a 12 pulgadas, con un posible error de $\frac{1}{64}$ de pulgada. Usar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del cuadrado.

28. ***Área*** Se encuentra que las mediciones de la base y la altura de un triángulo son iguales, respectivamente, a 36 y 50 cm. El posible error en cada medición es de 0.25 cm. Emplear diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del triángulo.

29. ***Área*** Se mide el radio del extremo de un tronco y se encuentra que es igual a 14 pulgadas, con un posible error de $\frac{1}{4}$ de pulgada. Utilizar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del extremo del tronco.

30. ***Volumen y área superficial*** La medición del borde de un cubo indica un valor de 12 pulgadas, con un error posible de 0.03 pulgadas. Utilizar diferenciales para aproximar el máximo error de propagación posible en el cálculo de *a*) el volumen del cubo y *b*) el área superficial del cubo.

31. ***Área*** La medición del lado de un cuadrado produce un valor igual a 15 cm, con un posible error de 0.05 cm.
    a) Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del cuadrado.
    b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del lado si el error en el cálculo del área no fue mayor a 2.5%.

32. ***Circunferencia*** La medición de la circunferencia de un círculo produce un valor de 56 pulgadas, con un posible error de 1.2 pulgadas.
    a) Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del círculo.

b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición de la circunferencia si el error en el cálculo del área no excede de 3%.

33. ***Volumen y área superficial*** Se mide el radio de una esfera y se encuentra un valor de 6 pulgadas, con un posible error de 0.02 pulgadas. Utilizar diferenciales para aproximar el máximo error posible en el cálculo de *a*) el volumen de la esfera, *b*) el área superficial de la esfera y *c*) los errores relativos en los apartados *a*) y *b*).

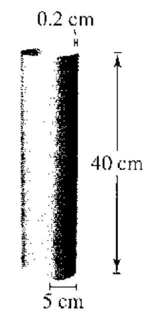
34. ***Utilidad*** La utilidad P de una compañía está dada por

$$P = (500x - x^2) - \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 77x + 3\,000\right).$$

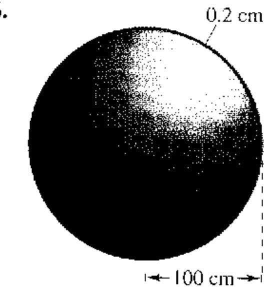
Aproximar el cambio y el cambio porcentual en la utilidad cuando los cambios de la producción van de $x = 115$ a $x = 120$ unidades.

Volumen **En los ejercicios 35 y 36, el espesor de cada cubierta es de 0.2 cm. Utilizar diferenciales para aproximar el volumen de cada cubierta.**

35.



36.



37. ***Péndulo*** El periodo de un péndulo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo en pies, g es la aceleración debida a la gravedad y T es el tiempo en segundos. El péndulo se ha sometido a un aumento de temperatura tal que la longitud ha aumentado en $\frac{1}{2}$%.

a) Encontrar el cambio porcentual aproximado en el periodo.

b) Utilizando el resultado del apartado *a*), encontrar el error aproximado en este reloj de péndulo en 1 día.

38. ***Ley de Ohm*** Una corriente de I amperes pasa por un resistor de R ohms. La **ley de Ohm** establece que el voltaje E aplicado al resistor es $E = IR$. Si el voltaje es constante, demostrar que la magnitud del error relativo en R provocado por el cambio en I es igual en magnitud al error relativo en I.

39. ***Mediciones de triángulos*** Se encuentra que la medición de un lado de un triángulo rectángulo es igual a 9.5 pulgadas y que el ángulo opuesto a ese lado es de 26°45′ con un error posible de 15′.

a) Aproximar el error porcentual en el cálculo de la longitud de la hipotenusa.

b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del ángulo si el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor que 2%.

40. ***Área*** Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del triángulo del ejercicio 39.

41. ***Movimiento de proyectiles*** El alcance R de un proyectil es

$$R = \frac{v_0^2}{32}(\text{sen } 2\theta)$$

donde v_0 es la velocidad inicial en pies por segundo y θ es el ángulo de elevación si $v_0 = 2\,200$ pies por segundo y θ cambia de 10° a 11°, utilizar diferenciales para aproximar el cambio en el alcance.

42. ***Agrimensura*** Un agrimensor que está a 50 pies de la base de un árbol mide el ángulo de elevación de la parte superior de este último y obtiene un valor de 71.5°. ¿Con qué precisión debe medirse el ángulo si el error porcentual en la estimación de la altura de este mismo será menor que 6%?

En los ejercicios 43 a 46, utilizar diferenciales para aproximar el valor de la expresión. Comparar su respuesta con la que se obtiene usando una calculadora.

43. $\sqrt{99.4}$ **44.** $\sqrt[3]{26}$

45. $\sqrt[4]{624}$ **46.** $(2.99)^3$

Comentario **En los ejercicios 47 y 48, proporcionar una breve explicación de por qué la aproximación es válida.**

47. $\sqrt{4.02} \approx 2 + \frac{1}{4}(0.02)$ **48.** $\tan 0.05 \approx 0 + 1(0.05)$

En los ejercicios 49 a 52, verificar la aproximación por medio de la recta tangente de la función en el punto indicado. Después utilizar una calculadora para representar la función y su aproximación en la misma ventana de observación.

	Función	*Aproximación*	*Punto*
49.	$f(x) = \sqrt{x + 4}$	$y = 2 + \dfrac{x}{4}$	$(0, 2)$
50.	$f(x) = \sqrt{x}$	$y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$	$(1, 1)$
51.	$f(x) = \tan x$	$y = x$	$(0, 0)$
52.	$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$	$y = 1 + x$	$(0, 1)$

Desarrollo de conceptos

53. Describir la variación en precisión de dy como una aproximación para Δy cuando Δx está disminuyendo.

54. Cuando se usan diferenciales, ¿qué se entiende por los términos *error propagado, error relativo* y *error porcentual*?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 55 a 58, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o brindar un ejemplo que lo demuestre.**

55. Si $y = x + c$, entonces $dy = dx$.

56. Si $y = ax + b$, entonces $\Delta y/\Delta x = dy/dx$.

57. Si y es derivable, entonces $\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y - dy) = 0$.

58. Si $y = f(x)$, f es creciente y derivable, y $\Delta x > 0$, entonces $\Delta y \geq dy$.

Ejercicios de repaso del capítulo 3

1. Proporcionar la definición de un punto crítico y representar gráficamente una función f que muestre los diferentes tipos de puntos críticos.

2. Considerar la función impar f que es continua y derivable y tiene los valores funcionales que se muestran en la tabla.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
$f(x)$	1	3	2	0	-1	-4	0

a) Determinar $f(4)$.
b) Determinar $f(-3)$.
c) Representar los puntos y realizar un dibujo posible de la gráfica de f en el intervalo $[-6, 6]$. ¿Cuál es el número más pequeño de puntos críticos en el intervalo? Explicar.
d) ¿Existe al menos un número real c en el intervalo $(-6, 6)$ donde $f'(c) = -1$? Explicar.
e) ¿Es posible que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no exista? Explicar la respuesta.
f) ¿Es necesario que $f'(x)$ exista en $x = 2$? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 3 y 4, determinar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado. Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función sobre el intervalo dado para confirmar los resultados.

3. $g(x) = 2x + 5\cos x, \quad [0, 2\pi]$
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 5 y 6, determinar si el teorema de Rolle puede aplicarse a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si el teorema de Rolle puede aplicarse, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) en los que $f'(c) = 0$.

5. $f(x) = (x-2)(x+3)^2, \quad [-3, 2]$
6. $f(x) = |x-2| - 2, \quad [0, 4]$

7. Considerar la función $f(x) = 3 - |x - 4|$.
a) Representar gráficamente la función y verificar que $f(1) = f(7)$.
b) Notar que $f'(x)$ no es igual a cero para ningún x en $[1, 7]$. Explicar por qué esto no contradice al teorema de Rolle.

8. ¿Puede aplicarse el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$? Explicar.

En los ejercicios 9 a 12, encontrar el (los) punto(s) garantizado(s) por el teorema del valor medio para el intervalo cerrado $[a, b]$.

9. $f(x) = x^{2/3}, \quad [1, 8]$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad [1, 4]$
11. $f(x) = x - \cos x, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
12. $f(x) = \sqrt{x} - 2x, \quad [0, 4]$

13. Para la función $f(x) = Ax^2 = Bx + C$, determinar el valor de c garantizado por el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$.

14. Demostrar el resultado del ejercicio 13 para $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 4]$.

En los ejercicios 15 a 18, determinar los puntos críticos (si los hay) y los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o es decreciente.

15. $f(x) = (x-1)^2(x-3)$
16. $g(x) = (x+1)^3$
17. $h(x) = \sqrt{x}(x-3), \quad x > 0$
18. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 19 y 20, utilizar el criterio de la primera derivada para encontrar cualesquiera extremos relativos de la función. Utilizar la calculadora para verificar los resultados.

19. $h(t) = \dfrac{1}{4}t^4 - 8t$
20. $g(x) = \dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2} - 1\right), \quad [0, 4]$

21. ***Movimiento armónico*** La altura de un objeto unido a un resorte está dada por la ecuación armónica

$$y = \tfrac{1}{3}\cos 12t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 12t$$

donde y se mide en pulgadas y t en segundos.
a) Calcular la altura y velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$ segundos.
b) Demostrar que el desplazamiento máximo del objeto es $\frac{5}{12}$ de pulgada.
c) Encontrar el periodo P de y, así como determinar la frecuencia f (número de oscilaciones por segundo) si $f = 1/P$.

22. ***Comentario*** La ecuación general que da la altura de un objeto oscilante unido a un resorte es

$$y = A\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

donde k es la constante de resorte y m es la masa del objeto.
a) Demostrar que el desplazamiento máximo del objeto es $\sqrt{A^2 + B^2}$.
b) Demostrar que el objeto oscila con una frecuencia de

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En los ejercicios 23 y 24, determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

23. $f(x) = x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$
24. $f(x) = (x+2)^2(x-4)$

En los ejercicios 25 y 26, utilizar el criterio de la segunda derivada para encontrar todos los extremos relativos.

25. $g(x) = 2x^2(1 - x^2)$
26. $h(t) = t - 4\sqrt{t+1}$

Para pensar **En los ejercicios 27 y 28, dibujar la gráfica de una función f que tenga las características indicadas.**

27. $f(0) = f(6) = 0$
$f'(3) = f'(5) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(x) > 0$ si $3 < x < 5$
$f'(x) < 0$ si $x > 5$
$f''(x) < 0$ si $x < 3$ o $x > 4$
$f''(x) > 0$ si $3 < x < 4$

28. $f(0) = 4,\ f(6) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 2$ o $x > 4$
$f'(2)$ no existe
$f'(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $2 < x < 4$
$f''(x) < 0$ si $x \neq 2$

29. ***Comentario*** El titular de un periódico señala que "La tasa (el ritmo) de crecimiento del déficit nacional está decreciendo". ¿Qué es lo que significa esto? ¿Qué implica este comentario en cuanto a la gráfica del déficit como una función del tiempo?

30. ***Costo de inventario*** El costo del inventario depende de los costos de pedidos y almacenamiento de acuerdo con el modelo de inventario.

$$C = \left(\frac{Q}{x}\right)s + \left(\frac{x}{2}\right)r.$$

Determinar el tamaño de pedido que minimizará el costo, suponiendo que las ventas ocurren a una tasa constante, Q es el número de unidades vendidas por año, r es el costo de almacenamiento de una unidad durante un año, s es el costo de colocar un pedido y x es el número de unidades por pedido.

31. ***Modelo matemático*** Los gastos para la defensa nacional D (en miles de millones de dólares) para años determinados de 1970 a 1999 se muestran en la tabla, donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1970. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

t	0	5	10	15	20
D	90.4	103.1	155.1	279.0	328.3

t	25	26	27	28	29
D	309.9	302.7	309.8	310.3	320.2

a) Utilizar las funciones de regresión de una calculadora para ajustar un modelo de la forma

$$D = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

a los datos.

b) Utilizar una calculadora para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Para el año que se muestra en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional es un máximo? ¿Cuándo es un mínimo?

d) Para los años que se indican en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional está creciendo a mayor velocidad?

32. ***Modelo matemático*** El gerente de un almacén registra las ventas anuales S (en miles de dólares) de un producto durante un periodo de 7 años, como se indica en la tabla, donde t es el tiempo en años, con $t = 7$ correspondiendo a 1997.

t	7	8	9	10	11	12	13
S	5.4	6.9	11.5	15.5	19.0	22.0	23.6

a) Utilizar las capacidades de regresión de una calculadora para determinar un modelo de la forma $S = at^3 + bt^2 + ct + d$ correspondiente a los datos.

b) Utilizar una calculadora para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Utilizar el cálculo para determinar el tiempo t en el que las ventas estuvieron creciendo a la mayor velocidad.

d) ¿Piensa que el modelo sería exacto para predecir las ventas futuras? Explicar.

En los ejercicios 33 a 40, determinar el límite.

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x^2 + 5}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x^2 + 5}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{x + 5}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-2x}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5\cos x}{x}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{6x}{x + \cos x}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 41 a 44, determinar cualesquiera asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función. Recurrir a una calculadora para verificar los resultados.

41. $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$

42. $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 + 2}$

43. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2$

44. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

En los ejercicios 45 a 48, utilizar una calculadora para representar gráficamente la función. Emplear la gráfica para aproximar cualesquiera extremos relativos o asíntotas.

45. $f(x) = x^3 + \dfrac{243}{x}$

46. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2x|$

47. $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 + 3x^2}$

48. $g(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$

En los ejercicios 49 a 66, analizar y dibujar la gráfica de la función.

49. $f(x) = 4x - x^2$

50. $f(x) = 4x^3 - x^4$

51. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

52. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

53. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)^2$

54. $f(x) = (x - 3)(x + 2)^3$

55. $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

56. $f(x) = (x - 2)^{1/3}(x + 1)^{2/3}$

57. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

58. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

59. $f(x) = \frac{4}{1 + x^2}$

60. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}$

61. $f(x) = x^3 + x + \frac{4}{x}$

62. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

63. $f(x) = |x^2 - 9|$

64. $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$

65. $f(x) = x + \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

66. $f(x) = \frac{1}{\pi}(2 \operatorname{sen} \pi x - \operatorname{sen} 2\pi x), \quad -1 \le x \le 1$

67. Determinar los puntos máximos y mínimos en la gráfica de

$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$

a) Sin utilizar cálculo.
b) Utilizando cálculo.

68. Considerar la función $f(x) = x^n$ para valores enteros positivos de n.

a) ¿Para qué valores de n la función tiene un mínimo relativo en el origen?
b) ¿Para qué valores de n la función tiene un punto de inflexión en el origen?

69. ***Distancia*** En la noche, el barco A se encuentra a 100 kilómetros en dirección este del barco B: El barco A navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco B lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cuál es la distancia?

70. ***Área máxima*** Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima, con lados paralelos a los ejes de coordenadas, que puede inscribirse en la elipse dada por

$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1.$

71. ***Longitud mínima*** Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene los ejes de coordenadas como lados, y la hipotenusa pasa por el punto (1, 8). Encontrar los vértices del triángulo de modo tal que la longitud de la hipotenusa sea mínima.

72. ***Longitud mínima*** Hay que apuntalar la fachada de un edificio con una viga que debe pasar sobre una cerca (valla) paralela de 5 pies de altura y a 4 pies de distancia del edificio. Determinar la longitud de la viga más corta que puede usarse.

73. ***Área máxima*** Tres lados de un trapezoide tienen la misma longitud s. De todos los trapezoides posibles de estas características, mostrar que uno de área máxima tiene un cuarto lado de longitud $2s$.

74. ***Área máxima*** Demostrar que el área más grande de cualquier rectángulo inscrito en un triángulo es la correspondiente a la mitad de la del triángulo.

75. ***Distancia*** Calcular (sin el uso de la trigonometría) la longitud de la tubería más larga que se puede transportar sin inclinarla por dos pasillos, de anchuras 4 y 6 pies, que forman esquina en el ángulo recto.

76. ***Distancia*** Volver a repetir el ejercicio 75, considerando que los corredores (pasillos) tienen anchos iguales a a y b metros.

77. ***Distancia*** Un pasadizo con 6 pies de ancho se junta con otro de 9 pies de ancho formando un ángulo recto. Encontrar la longitud del tubo más largo que puede transportarse sin inclinarse alrededor de esta esquina. [*Sugerencia*: Si L es la longitud de la tubería, demostrar que

$$L = 6 \csc \theta + 9 \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

donde θ es el ángulo entre el tubo y la pared del pasadizo más estrecho.]

78. ***Longitud*** Volver a repetir el ejercicio 77, dado que uno de los pasadizos es de a metros de ancho y el otro de b metros de ancho. Demostrar que el resultado es el mismo que en el ejercicio 76.

Costo mínimo **En los ejercicios 79 y 80, determinar la velocidad v, en millas por hora, que minimizará los costos en un viaje de entrega de 110 millas. El costo por hora del combustible es C dólares, y al conductor se le pagarán W dólares por hora. (Suponer que no hay otros costos aparte de los salarios y el combustible.)**

79. Costo del comb.: $C = \frac{v^2}{600}$
Conductor: $W = \$5$

80. Costo del comb.: $C = \frac{v^2}{500}$
Conductor: $W = \$7.50$

En los ejercicios 81 y 82, utilizar el método de Newton para aproximar cualesquiera ceros reales de la función con una precisión de hasta tres decimales. Utilizar la característica *cero* o *root* de una calculadora para verificar los resultados.

81. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

82. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

En los ejercicios 83 y 84, utilizar el método de Newton para aproximar, hasta tres lugares decimales, el (los) valor(es) del (los) punto(s) de intersección de las ecuaciones. Utilizar una calculadora para verificar los resultados.

83. $y = x^4$
$y = x + 3$

84. $y = \operatorname{sen} \pi x$
$y = 1 - x$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar la diferencial dy.

85. $y = x(1 - \cos x)$

86. $y = \sqrt{36 - x^2}$

87. ***Área superficial y volumen*** El diámetro de una esfera se mide y se obtiene un valor de 18 centímetros, con un error máximo posible de 0.05 centímetros. Utilizar diferenciales para aproximar los posibles error propagado y error porcentual al calcular el área de la superficie y el volumen de la esfera.

88. ***Función de demanda*** Una compañía descubre que la demanda de uno de sus productos es

$$p = 75 - \frac{1}{4}x.$$

Si x cambia de 7 a 8, encontrar y comparar los valores de Δp y dp.

SP Solución de problemas

1. Representar el polinomio de cuarto grado $p(x) = x^4 + ax^2 + 1$ para diversos valores de la constante a.
   a) Determinar el valor de a para el cual p tiene exactamente un mínimo relativo.
   b) Determinar los valores de a para los cuales p tiene exactamente un máximo relativo.
   c) Determinar los valores de a para los cuales p tiene exactamente dos mínimos relativos.
   d) Mostrar que la gráfica de p no puede tener exactamente dos extremos relativos.

2. *a)* Representar el polinomio de cuarto grado $p(x) = ax^4 = 6x^2$ para $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. ¿Para qué valores de la constante a para p tiene un mínimo o máximo relativo?
   b) Demostrar que p tiene un máximo relativo para todos los valores de la constante a.
   c) Determinar analíticamente los valores de a para los cuales p tiene un mínimo relativo.
   d) Sea $(x, y) = (x, p(x))$ un extremo relativo de p. Demostrar que (x, y) se encuentra en la gráfica de $y = -3x^2$. Verificar gráficamente este resultado representando $y = -3x^2$ junto con las siete curvas del apartado *a*).

3. Sea $f(x) = \dfrac{c}{x} + x^2$. Determinar todos los valores de la constante c tales que f tiene un mínimo relativo, pero no un máximo relativo.

4. *a)* Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, un polinomio cuadrático. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de f?
   b) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, un polinomio cúbico. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de f?
   c) Suponer que la función $y = f(x)$ satisface la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = ky\left(1 - \dfrac{y}{L}\right)$, donde k y L son constantes positivas. Demostrar que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en el punto donde $y = \dfrac{L}{2}$. (Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial logística**.)

5. Demostrar el teorema de Darboux: Sea f derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$ de modo tal que $f'(a) = y_1$ y $f'(b) = y_2$. Si d se encuentra entre y_1 y y_2, entonces existe c en (a, b) tal que $f'(c) = d$.

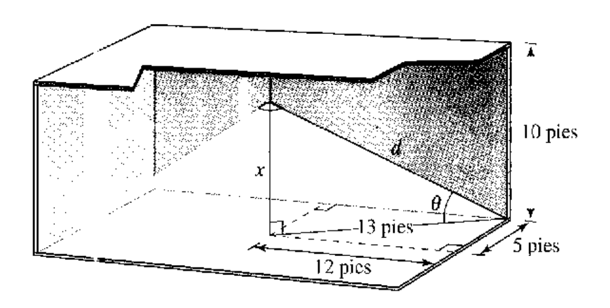
6. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar que si $f(a) = g(a)$ y $g'(x) > f'(x)$ para todo x en (a, b), entonces $g(b) > f(b)$.

7. Demostrar el siguiente **teorema del valor medio extendido**. Si f y f' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si f'' existe en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

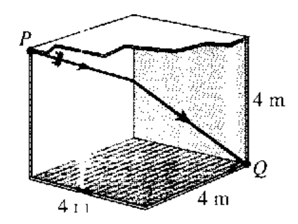
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

8. *a)* Sea $V = x^3$. Determinar dV y ΔV. Demostrar que para valores pequeños de x, la diferencia $\Delta V - dV$ es muy pequeña en el sentido de que existe ε tal que $\Delta V - dV = \varepsilon \Delta x$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.
   b) Generalizar este resultado demostrando que si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces $\Delta y - dy = \varepsilon \Delta x$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

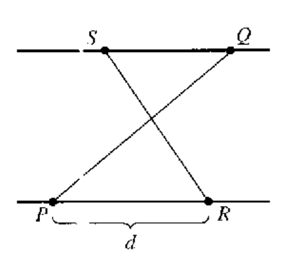
9. La cantidad de iluminación de una superficie es proporcional a la intensidad de la fuente luminosa, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente luminosa, y proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo al cual la luz incide sobre la superficie. Un cuarto rectangular mide 10 por 24 pies, con un techo de 10 pies. Determinar la altura a la cual la luz debe ubicarse para permitir que las esquinas del piso reciban la mayor cantidad posible de luz.



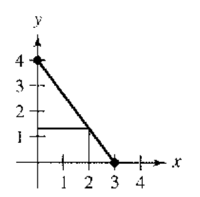
10. Considerar un cuarto en la forma de un cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto P desea desplazarse hasta el punto Q en la esquina opuesta, como se indica en la figura. Emplear el cálculo para determinar la trayectoria más corta. ¿Se puede resolver el problema sin el cálculo?

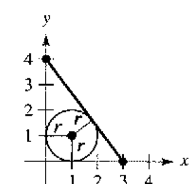


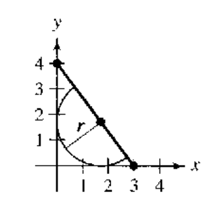
11. La recta que une P y Q cruza las dos rectas paralelas, como se muestra en la figura. El punto R está a 10 unidades de P. ¿A qué distancia de Q debe situarse el punto S de manera que la suma de las áreas de los dos triángulos sombreados sea un mínimo? ¿De qué modo para que la suma sea un máximo?



12. Las figuras muestran un rectángulo, un círculo y un semicírculo inscritos en un triángulo delimitado por los ejes de coordenadas y la porción del primer cuadrante de la recta con intersecciones (3, 0) y (0, 4). Encontrar las dimensiones de cada figura inscrita de manera tal que su área sea máxima. Establecer qué tipo de cálculo fue útil para determinar las dimensiones requeridas. Explicar el razonamiento.





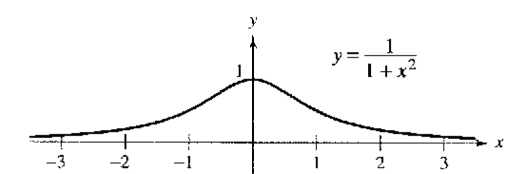


13. *a*) Demostrar que $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

b) Probar que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

c) Sea L un número real. Demostrar que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = L$.

14. Encontrar el punto sobre la gráfica de $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (ver la figura) donde la recta tangente tiene la pendiente más grande, y el punto donde la recta tangente tiene la pendiente menor.



15. *a*) Sea x un número positivo. Utilizar la función *table* de una calculadora para verificar que $\sqrt{1 + x} < \frac{1}{2}x + 1$.

b) Recurrir al teorema del valor medio para demostrar que $\sqrt{1 + x} < \frac{1}{2}x + 1$ para todos los números reales positivos x.

16. *a*) Sea x un número positivo. Utilizar la función *table* de una calculadora para verificar que $\operatorname{sen} x < x$.

b) Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que $x < x$ para todo número real positivo x.

17. El departamento de policía debe determinar el límite de velocidad sobre un puente de manera tal que la tasa de flujo de automóviles sea máxima por unidad de tiempo. Cuanto mayor es el límite de velocidad, tanto más separados deben estar los automóviles para mantener una distancia de frenado segura. Los datos experimentales respecto a la distancia de frenado d (en metros) para diversas velocidades v (en kilómetros por hora) se indican en la tabla.

v	20	40	60	80	100
d	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

a) Convertir las velocidades v en la tabla a velocidades s en metros por segundo. Utilizar las capacidades de regresión de la calculadora para determinar un modelo de la forma $d(s) = as^2 + bs + c$ para los datos.

b) Considerar dos vehículos consecutivos de longitud promedio igual a 5.5 metros, que viajan a una velocidad segura sobre el puente. Sea T la diferencia entre los tiempos (en segundos) cuando los parachoques frontales de los vehículos pasan por un punto dado sobre el puente. Verificar que esta diferencia de tiempos está dada por

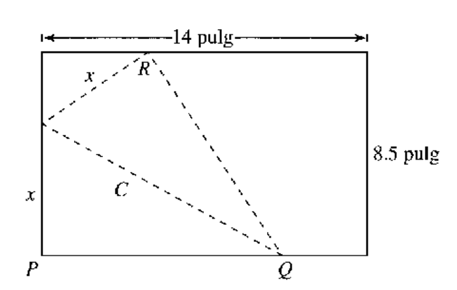
$$T = \frac{d(s)}{s} + \frac{5.5}{s}.$$

c) Utilizar una calculadora para representar gráficamente la función T y estimar la velocidad s que minimiza el tiempo entre vehículos.

d) Recurrir al cálculo para determinar la velocidad que minimiza T. ¿Cuál es el valor mínimo de T? Convertir la velocidad requerida a kilómetros por hora.

e) Determinar la distancia óptima entre vehículos para el límite de velocidad máxima determinado en el apartado *d*).

18. Una hoja de papel de tamaño cuartilla (8.5 × 14 pulgadas) se dobla de manera que la esquina P toca el borde opuesto de 14 pulgadas en R. (*Nota*: $PQ = \sqrt{C^2 - x^2}$.)



a) Demostrar que $C^2 = \dfrac{2x^3}{2x - 8.5}$.

b) ¿Cuál es el dominio de C?

c) Determinar el valor de x que minimiza a C.

d) Determinar la longitud mínima C.

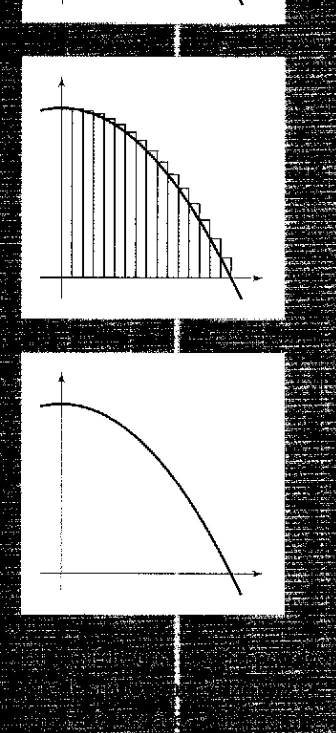
19. El polinomio $P(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$ es la aproximación cuadrática de la función f en $(a, f(a))$ si $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$ y $P''(a) = f''(a)$.

a) Encontrar la aproximación cuadrática de

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

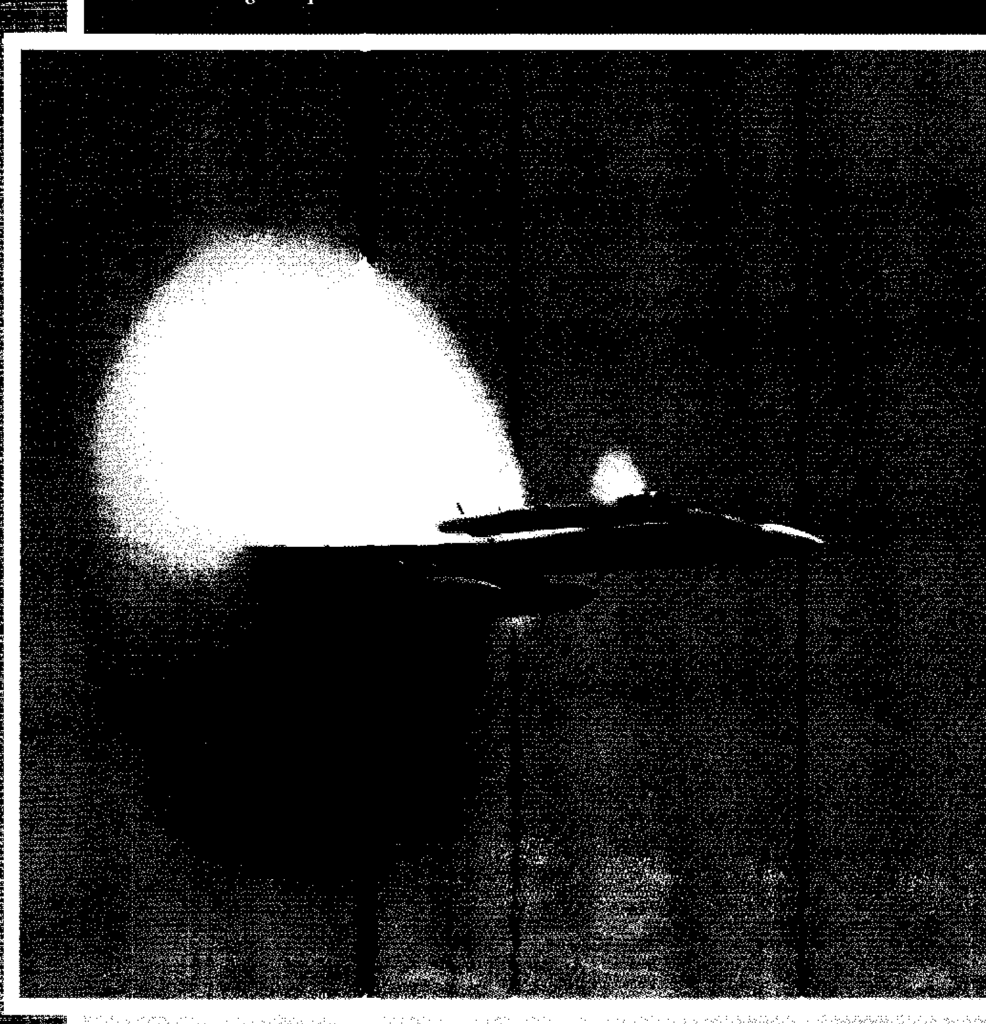
en (0, 0).

b) Utilizar una calculadora para representar P y f en la misma ventana de observación.



Integración

Esta foto de un jet rompiendo la barrera del sonido fue tomada por John Gay. Cuando se tomó la foto, ¿la velocidad del jet era constante o cambiante? ¿Por qué?



Sección 4.1 Antiderivadas o primitivas e integración indefinida

- **Escribir la función general de una ecuación diferencial.**
- **Usar la notación de la integral indefinida para las antiderivadas o primitivas.**
- **Utilizar las reglas de la integración básicas para encontrar antiderivadas.**
- **Encontrar una solución particular de una ecuación diferencial.**

EXPLORACIÓN

Determinación de antiderivadas o primitivas Para cada derivada, describir la función original F.

a) $F'(x) = 2x$

b) $F'(x) = x$

c) $F'(x) = x^2$

d) $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $F'(x) = \dfrac{1}{x^3}$

f) $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia se usó para determinar F?

Antiderivadas o primitivas

Suponer que se decide encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. Por lo que se sabe de derivadas, es posible afirmar que

$$F(x) = x^3 \text{ porque } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2.$$

La función F es una *antiderivada* de f.

Definición de una antiderivada o primitiva

Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Nótese que F es *una* antiderivada de f, en vez de *la* antiderivada de f. Para entender por qué, observar que

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5, \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^3 + 97$$

son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante c, la función dada por $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f.

TEOREMA 4.1 Representación de antiderivadas o primitivas

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

Demostración La prueba del teorema 4.1 en un sentido es directa. Esto es, si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$, y C es constante, entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Para probar este teorema en otro sentido, suponer que G es una antiderivada de f. Definir una función H tal que

$$H(x) = G(x) - F(x).$$

Si H no es constante en el intervalo I, deben existir a y b ($a < b$) en el intervalo tal que $H(a) \neq H(b)$. Además, como H es derivable en (a, b), se puede aplicar el teorema del valor medio para concluir que existe algún c en (a, b) porque

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}.$$

Debido a que $H(b) \neq H(a)$, se concluye que $H'(c) \neq 0$. Sin embargo, como $G'(c) = F'(c)$, se sabe que $H'(c) = G'(c) - F'(c) = 0$, lo cual contradice el hecho de que $H'(c) \neq 0$. En consecuencia, es posible concluir que $H(x)$ es una constante, C. De tal modo, $G(x) - F(x) = C$ y se llega a $G(x) = F(x) + C$.

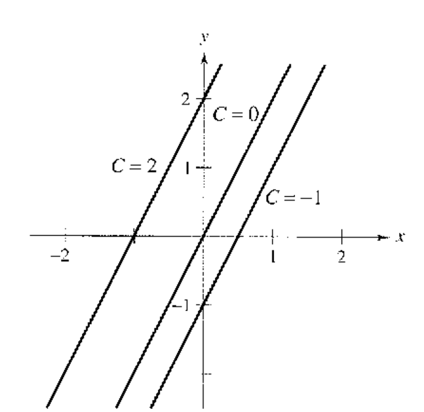
Si utiliza el teorema 4.1, se representa la familia completa de antiderivadas de una función agregando una constante a una antiderivada *conocida*. Por ejemplo, sabiendo que $D_x[x^2] = 2x$, es posible representar la familia de *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$ por

$G(x) = x^2 + C$ Familia de todas las antiderivadas de $f(x) = 2x$.

donde C es constante. La constante C recibe el nombre de **constante de integración**. La familia de funciones representadas por G es la **antiderivada general** de f, y $G(x) = x^2 = C$ es la **solución general** de la *ecuación diferencial*.

$G'(x) = 2x$. Ecuación diferencial.

Una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye a x y y a las derivadas de y. Por ejemplo, $y' = 3x$ y $y' = x^2 + 1$ son ejemplos de ecuaciones diferenciales.



Funciones de la forma $y = 2x + C$
Figura 4.1

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación diferencial

Determinar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución Para empezar, determinar una función cuya derivada es 2. Una función de esta característica es

$y = 2x$. $2x$ es *una* antiderivada de 2.

Ahora bien, utilizar el teorema 4.1 para concluir que la solución general de la ecuación diferencial es

$y = 2x + C$. Solución general.

Las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$ se muestran en la figura 4.1.

Notación para antiderivadas o primitivas

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente

$$dy = f(x)\,dx.$$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina **antiderivación** (o **integración indefinida**) y se denota mediante un signo integral $\int$. La solución general se denota mediante

Variable de integración

Constante de integración

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Integrando

NOTA En este texto, la notación $\int f(x)dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada o primitiva de f *en un intervalo*.

La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la *antiderivada o primitiva de f con respecto a x*. De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede verificarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$ La integración es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x)dx = F(x) + C$ entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$ La derivación es la "inversa" de la integración.

Estas dos ecuaciones permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ Regla de las potencias.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

NOTA La regla de las potencias para la integración tiene la restricción $n \neq -1$. El cálculo de $\int 1/x\, dx$ debe esperar hasta el análisis de la función logaritmo natural en el capítulo 5.

EJEMPLO 2 Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las antiderivadas o primitivas de $3x$.

Solución

$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx$	Regla del múltiplo constante.
$= 3\int x^1\,dx$	Reescribir x como x^1.
$= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$	Regla de potencia ($n = 1$).
$= \frac{3}{2}x^2 + C$	Simplificar.

De tal manera, las antiderivadas o primitivas de $3x$ son de la forma $\frac{3}{2}x^2 + C$, donde C es cualquier constante.

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. Es el caso del ejemplo 2, se podría haber escrito

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{3}{2}x^2 + 3C.$$

Sin embargo, como C representa *cualquier* constante, es tanto problemático como innecesario escribir $3C$ como la constante de integración. De tal modo, $\frac{3}{2}x^2 + 3C$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + C$.

En el ejemplo 2, advertir que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original → Reescribir → Integrar → Simplificar

TECNOLOGÍA Algunos programas de software tales como *Derive, Maple, Madcard, Mathematica* y el *TI-89*, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si se tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilizarlas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2\,\text{sen}\,x\,dx$	$2\int \text{sen}\,x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

Recordar que, por simple derivación, puede comprobarse si una primitiva es correcta. Así, en el ejemplo 3*b*, para saber si la primitiva $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ es correcta, basta con derivarla para obtener

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}.$$ Usar la derivación para verificar la antiderivada.

Las reglas básicas de integración listadas antes en esta sección permiten integrar cualquier función polinómica, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Integración de funciones polinómicas

a) $\int dx = \int 1\, dx$ — Se entiende que el integrando es uno.

$= x + C$ — Integrar.

b) $\int (x+2)\, dx = \int x\, dx + \int 2\, dx$

$= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2$ — Integrar.

$= \frac{x^2}{2} + 2x + C$ — $C = C_1 + C_2$.

La segunda línea en la solución suele omitirse.

c) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)\, dx = 3\left(\frac{x^5}{5}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + C$ — Integrar.

$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$ — Simplificar.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ — Reescribir como dos fracciones.

$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx$ — Reescribir con exponentes fraccionarios.

$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$ — Integrar.

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$ — Simplificar.

$= \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$

NOTA Cuando se integren los cocientes, no debe integrarse numerador y denominador por separado. Esto es incorrecto tanto en la integración como en la derivación. Al respecto, obsérvese el ejemplo 5.

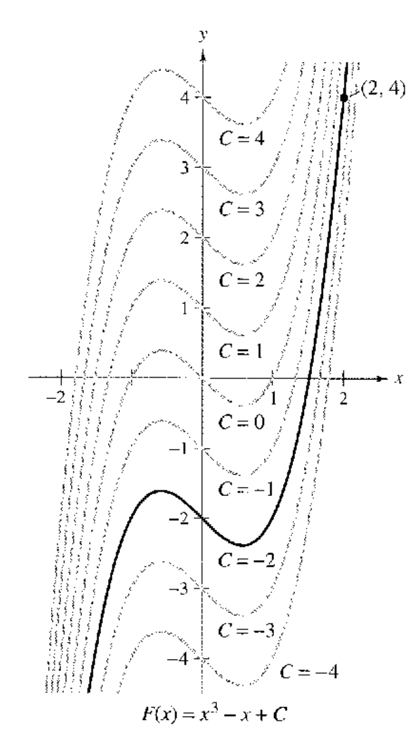
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C \text{ no es lo mismo que } \frac{\int (x+1)\, dx}{\int \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + C_1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C_2}.$$

EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx$ — Reescribir como un producto.

$= \int \sec x \tan x\, dx$ — Reescribir utilizando identidades trigonométricas.

$= \sec x + C$ — Integrar.



La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$

Figura 4.2

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Se ha visto que la ecuación $y = \int f(x)dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiriendo de las otras en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas o primitivas de f son traslaciones verticales una de otra. Por ejemplo, la figura 4.2 muestra las gráficas de varias de las antiderivadas o primitivas de la forma

$$y = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$

para diversos valores enteros de C. Cada una de estas antiderivadas o primitivas es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$$

En muchas aplicaciones de la integración, se da suficiente información para determinar una **solución particular**. Para hacer esto, sólo se necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x. Esta información recibe el nombre de **condición inicial**. Por ejemplo, en la figura 4.2, sólo una de las curvas pasa por el punto (2, 4). Para encontrar esta curva, se utiliza la siguiente información.

$$F(x) = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$

$$F(2) = 4 \qquad \text{Condición inicial.}$$

Utilizando la condición inicial en la solución general, es posible determinar que $F(2) = 8 - 2 + C = 4$, lo que implica que $C = -2$. De tal modo, se obtiene

$$F(x) = x^3 - x - 2. \qquad \text{Solución particular.}$$

EJEMPLO 7 Determinación de una solución particular

Encontrar la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

y determinar la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución Para encontrar la solución general, se integra para obtener

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx \qquad F(x) = \int F'(x)dx.$$

$$= \int x^{-2}\,dx \qquad \text{Reescribir como una potencia.}$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C \qquad \text{Integrar.}$$

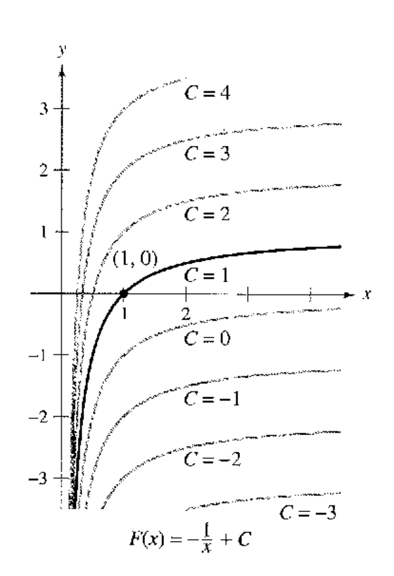
$$= -\frac{1}{x} + C, \quad x > 0. \qquad \text{Solución general.}$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resolver para C de la manera siguiente.

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$$

De tal modo, la solución particular, como se muestra en la figura 4.3, es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1, \quad x > 0. \qquad \text{Solución particular.}$$



La solución particular que satisface la condición inicial $f(1) = 0$ es $F(x) = -(1/x) + 1, x > 0$

Figura 4.3

Hasta ahora, en esta sección se ha utilizado x como variable de integración. En las aplicaciones, es a menudo conveniente utilizar una variable distinta. Así, en el siguiente ejemplo, la variable de integración es el *tiempo t*.

EJEMPLO 8 Solución de un problema de movimiento vertical

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t.
b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Solución

a) Considerar que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Las dos condiciones iniciales indicadas pueden escribirse de la siguiente manera.

$s(0) = 80$ La altura inicial es 80 pies.

$s'(0) = 64$ La velocidad inicial es de 64 pies por segundo.

Utilizando -32 pies/s^2 como la aceleración de la gravedad, se tiene

$$s''(t) = -32$$
$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1.$$

Empleando la velocidad inicial, se obtiene $s'(0) = 64 = -32(0) + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 64$. Después, integrando $s'(t)$, se obtiene

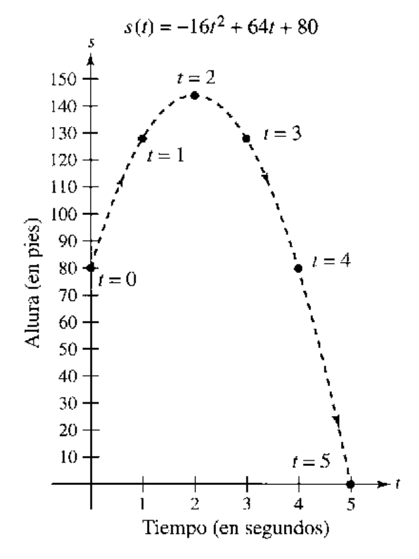
$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int (-32t + 64)\,dt = -16t^2 + 64t + C_2.$$

Al utilizar la altura inicial, se encuentra que

$$s(0) = 80 = -16(0^2) + 64(0) + C_2$$

lo que implica que $C_2 = 80$. De ese modo, la función posición es

$s(t) = -16t^2 + 64t + 80.$ Ver la figura 4.4.



Altura de una pelota en el tiempo t
Figura 4.4

b) Utilizando la función posición que se encontró en el apartado *a)*, es posible determinar el tiempo en que la pelota pega en el suelo al resolver la ecuación $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80 = 0$$
$$-16(t + 1)(t - 5) = 0$$
$$t = -1, 5$$

Como t debe ser positivo, se puede concluir que la pelota golpea el suelo 5 segundos después de haber sido lanzada.

NOTA En el ejemplo 8, obsérvese que la función posición tiene la forma

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

donde $g = -32$, v_0 es la velocidad inicial y s_0 es la altura inicial, como se presentó en la sección 2.2.

El ejemplo 8 muestra cómo utilizar el cálculo para analizar problemas de movimiento vertical en los que la aceleración es determinada por una fuerza gravitacional. Se puede utilizar una estrategia similar para analizar otros problemas de movimiento rectilíneo (vertical u horizontal) en los que la aceleración (o desaceleración) es el resultado de alguna otra fuerza, como se verá en los ejercicios 77-86.

Antes de hacer los ejercicios, se debe reconocer que uno de los pasos más importantes en la integración es *reescribir el integrando* en una forma que corresponda con las reglas básicas de integración. Para ilustrar este punto, a continuación se presentan algunos ejemplos adicionales.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\int x^{-1/2}\,dx$	$2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\int (t^2+1)^2\,dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\frac{t^5}{5} + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
$\int \frac{x^3+3}{x^2}\,dx$	$\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}(x-4)\,dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3}$

Ejercicios de la sección 4.1

En los ejercicios 1 a 4, verificar el enunciado demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\int \left(-\frac{9}{x^4}\right) dx = \frac{3}{x^3} + C$

2. $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C$

3. $\int (x-2)(x+2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$

4. $\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la solución general de la ecuación diferencial y verificar el resultado mediante derivación.

5. $\frac{dy}{dt} = 3t^2$

6. $\frac{dr}{d\theta} = \pi$

7. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$

8. $\frac{dy}{dx} = 2x^{-3}$

En los ejercicios 9 a 14, completar la tabla.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$			
10. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$			
11. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$			
12. $\int x(x^2+3)\,dx$			
13. $\int \frac{1}{2x^3}\,dx$			
14. $\int \frac{1}{(3x)^2}\,dx$			

En los ejercicios 15 a 34, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

15. $\int (x+3)\,dx$

16. $\int (5-x)\,dx$

17. $\int (2x - 3x^2)\,dx$

18. $\int (4x^3 + 6x^2 - 1)\,dx$

19. $\int (x^3 + 2)\,dx$

20. $\int (x^3 - 4x + 2)\,dx$

21. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\,dx$

22. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

23. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

24. $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1)\,dx$

25. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

26. $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

27. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

28. $\int \frac{x^2+2x-3}{x^4}\,dx$

29. $\int (x+1)(3x-2)\,dx$

30. $\int (2t^2-1)^2\,dt$

31. $\int y^2\sqrt{y}\,dy$

32. $\int (1+3t)t^2\,dt$

33. $\int dx$

34. $\int 3\,dt$

En los ejercicios 35 a 42, hallar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

35. $\int (2\,\text{sen}\,x + 3\cos x)\,dx$

36. $\int (t^2 - \text{sen}\,t)\,dt$

37. $\int (1 - \csc t \cot t)\,dt$

38. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta$

39. $\int (\sec^2\theta - \text{sen}\,\theta)\,d\theta$

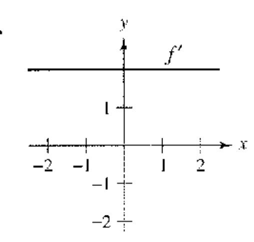
40. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy$

41. $\int (\tan^2 y + 1)\,dy$

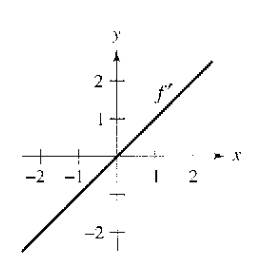
42. $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx$

En los ejercicios 43 a 46, se presenta la gráfica de la derivada de una función. Dibujar las gráficas de *dos* funciones que tengan la derivada señalada. (Hay más de una respuesta correcta.)

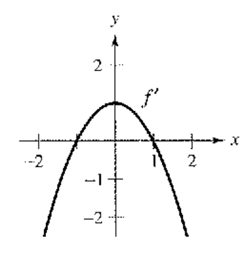
43.



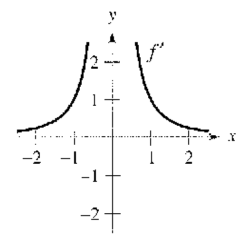
44.



45.

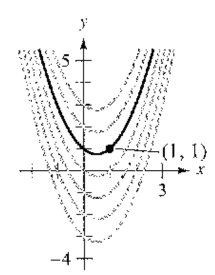


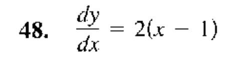
46.

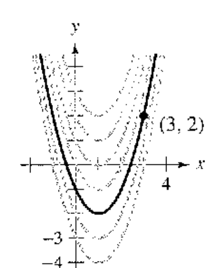


En los ejercicios 47 y 48, determinar la ecuación para y, dada la derivada y el punto indicado sobre la curva.

47. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

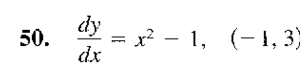


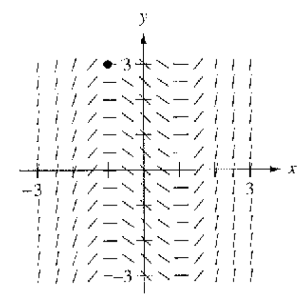
48.  $\dfrac{dy}{dx} = 2(x - 1)$



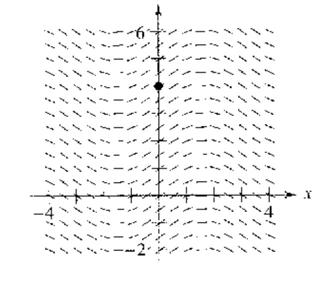
Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* (*o campo de direcciones*) está compuesto por segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pasa por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una computadora para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

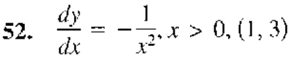
49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - 1, \quad (4, 2)$

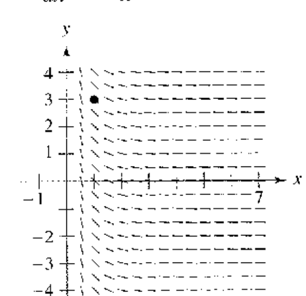
50.  $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1, \quad (-1, 3)$



51. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x, (0, 4)$



52.  $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}, x > 0, (1, 3)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 53 y 54, *a*) utilizar una computadora para hacer la gráfica de un campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) utilizar la integración y el punto indicado para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y *c*) hacer la gráfica de la solución y el campo de pendientes.**

53. $\dfrac{dy}{dx} = 2x, (-2, -2)$

54. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}, (4, 12)$

En los ejercicios 55 a 62, resolver la ecuación diferencial.

55. $f'(x) = 4x, f(0) = 6$

56. $g'(x) = 6x^2, g(0) = -1$

57. $h'(t) = 8t^3 + 5, h(1) = -4$

58. $f'(s) = 6s - 8s^3, f(2) = 3$

59. $f''(x) = 2, f'(2) = 5, f(2) = 10$

60. $f''(x) = x^2, f'(0) = 6, f(0) = 3$

61. $f''(x) = x^{-3/2}, f'(4) = 2, f(0) = 0$

62. $f''(x) = \sin x, f'(0) = 1, f(0) = 6$

63. ***Crecimiento de árboles*** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $dh/dt = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

a) Determinar la altura después de t años.

b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

64. ***Crecimiento de población*** La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días ($0 \leq t \leq 10$). Esto es, $dP/dt = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.

Desarrollo de conceptos

65. Usar la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente, dado que $f(0) = -4$.

a) Aproximar la pendiente de f en $x = 4$. Explicar.

b) ¿Es posible que $f(2) = 1$? Explicar.

c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$? Explicar.

d) Aproximar el valor de x donde f es máxima. Explicar.

e) Aproximar cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo en el cual es cóncava hacia abajo. Aproximar la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

f) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.

g) Dibujar una gráfica aproximada de f.

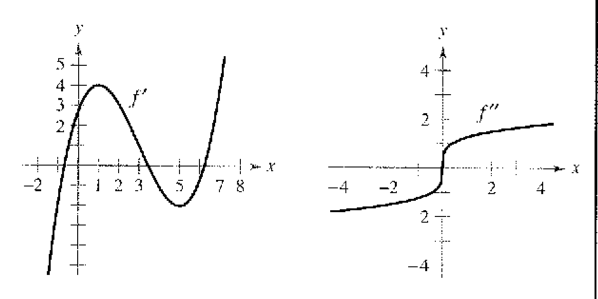


Figura para 65 **Figura para 66**

66. Las gráficas de f y f' pasan cada una por el origen. Utilizar la gráfica de f'' que se muestra en la figura para dibujar las gráficas de f y f'.

Movimiento vertical **En los ejercicios 67 a 70, utilizar $a(t) = -32$ pies/s² como la aceleración debida a la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

67. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 6 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Qué altura alcanzará la pelota?

68. Mostrar que la altura a la que llega un objeto lanzado hacia arriba desde un punto s_0 pies a una velocidad inicial de v_0 por segundo está dada por la función

$$f(t) = -16t^2 + v_0t + s_0.$$

69. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (cerca de 550 pies)?

70. Un globo aerostático, que asciende verticalmente con una velocidad de 16 pies por segundo, deja caer una bolsa de arena en el instante en el que está a 64 pies sobre el suelo.

a) ¿En cuántos segundos llegará la bolsa al suelo?

b) ¿A qué velocidad hará contacto con el suelo?

Movimiento vertical **En los ejercicios 71 a 74, emplear $a(t) = -9.8$ m/s² como aceleración de la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

71. Mostrar que la altura sobre el suelo de un objeto que se lanza hacia arriba desde un punto s_0 metros sobre el suelo a una velocidad inicial de v_0 metros por segundo está dada por la función

$$f(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0.$$

72. El Gran Cañón tiene una profundidad de 1 800 metros en su punto más profundo. Se deja caer una roca desde el borde sobre ese punto. Escribir la altura de la roca como una función del tiempo t en segundos. ¿Cuánto tardará la roca en llegar al suelo del cañón?

73. Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determinar su altura máxima.

74. ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

75. ***Gravedad lunar*** Sobre la Luna, la aceleración de la gravedad es de -1.6 m/s². En la Luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie de esta misma 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

76. ***Velocidad de escape*** La velocidad mínima que se requiere para que un objeto escape de su atracción gravitatoria se obtiene a partir de la solución de la ecuación

$$\int v\,dv = -GM\int \frac{1}{y^2}\,dy$$

donde v es la velocidad del objeto lanzado desde la Tierra, y es la distancia desde el centro terrestre, G es la constante de la gravitación y M es la masa de la Tierra. Demostrar que v y y están relacionados por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R es el radio terrestre.

Movimiento rectilíneo **En los ejercicios 77 a 80, considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x, donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t, $x'(t)$ su velocidad y $x''(t)$ su aceleración.**

77. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \le t \le 5$

a) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Encontrar los intervalos abiertos de t en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha.

c) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la aceleración es 0.

78. Repetir el ejercicio 77 para la función posición

$$x(t) = (t - 1)(t - 3)^2, \quad 0 \le t \le 5.$$

79. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el tiempo $t = 1$, su posición es $x = 4$. Encontrar las funciones posición y la aceleración de la partícula.

80. Una partícula, inicialmente en reposo, se mueve a lo largo del eje x de manera que su aceleración en el tiempo $t > 0$ está dada por $a(t) = \cos t$. En el tiempo $t = 0$, su posición es $x = 3$.

a) Determinar las funciones velocidad y la posición de la partícula.

b) Encontrar los valores de t para los cuales la partícula está en reposo.

81. ***Aceleración*** El fabricante de un automóvil indica en su publicidad que el vehículo tarda 13 segundos en acelerar desde 25 kilómetros por hora hasta 80 kilómetros por hora. Suponiendo aceleración constante, calcular lo siguiente.

a) La aceleración en m/s^2.

b) La distancia que recorre el automóvil durante los 13 segundos.

82. ***Desaceleración*** Un automóvil que viaja a 45 millas por hora recorre 132 pies, a desaceleración constante, luego de que se aplican los frenos para detenerlo.

a) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 30 millas por hora?

b) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 15 millas por hora?

c) Dibujar la recta de números reales desde 0 hasta 132 y hacer la gráfica de los puntos que se encontraron en los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se puede concluir?

83. ***Aceleración*** En el instante en que la luz de un semáforo se pone en verde, un automóvil que ha estado esperando en un crucero empieza a moverse con una aceleración constante de 6 pies/s^2. En el mismo instante, un camión que viaja a una velocidad constante de 30 pies por segundo rebasa al automóvil.

a) ¿A qué distancia del punto de inicio el automóvil rebasará al camión?

b) ¿A qué velocidad circulará el automóvil cuando rebase al camión?

84. ***Análisis de datos*** La tabla siguiente muestra las velocidades (en millas por hora) de dos automóviles a la entrada de una rampa en una autopista interestatal. El tiempo t está dado en segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
v_1	0	2.5	7	16	29	45	65
v_2	0	21	38	51	60	64	65

a) Reescribir la tabla convirtiendo las millas por hora en pies por segundo.

b) Utilizar los programas para regresión de una computadora para encontrar modelos cuadráticos para los datos del apartado *a*).

c) Aproximar la distancia recorrida por cada automóvil durante los 30 segundos. Explicar la diferencia en las distancias.

85. ***Aceleración*** Suponer que un avión totalmente cargado que parte desde el reposo tiene una aceleración constante mientras se mueve por la pista. El avión requiere 0.7 millas de pista y una velocidad de 160 millas por hora para despegar. ¿Cuál es la aceleración del avión?

86. ***Separación de aviones*** Dos aviones están en un patrón de aterrizaje de línea recta y, de acuerdo con las regulaciones de la FAA, debe mantener por lo menos una separación de 3 millas. El avión A está a 10 millas de su descenso y gradualmente reduce su velocidad desde 150 millas por hora hasta la velocidad de aterrizaje de 100 millas por hora. El avión B se encuentra a 17 millas del descenso y reduce su velocidad de manera gradual desde 250 millas por hora hasta una velocidad de aterrizaje de 115 millas por hora.

a) Asumiendo que la desaceleración de cada avión es constante, determinar las condiciones de la posición s_1 y s_2 para el avión A y el avión B. Dejar que $t = 0$ represente los tiempos en los que los aviones están a 10 y 17 millas del aeropuerto.

b) Utilizar una computadora para representar las funciones de la posición.

c) Encontrar una fórmula para la magnitud de la distancia d entre los dos aviones como una función de t. Utilizar una computadora para representar d. ¿Es $d < 3$ durante algún momento previo al aterrizaje del avión A? Si es así, determinar ese tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 a 92, determinar si el enunciado es falso o verdadero. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

87. Cada antiderivada o primitiva de una función polinómica de n grados es una función polinómica de grado $(n + 1)$.

88. Si $p(x)$ es una función polinómica, entonces p tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene al origen.

89. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas o primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.

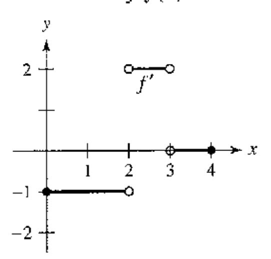
90. Si $f'(x) = g(x)$ entonces $\int g(x)dx = f(x) + C$.

91. $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$.

92. La antiderivada o primitiva de $f(x)$ es única.

93. Encontrar una función f tal que la gráfica de éste tenga una tangente horizontal en $(2, 0)$ y $f''(x) = 2x$.

94. Se muestra la gráfica de f'. Dibujar la gráfica de f dado que f es continua y $f(0) = 1$.



95. Si $f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 5 \end{cases}$, f es continua y $f(1) = 3$, determinar f. ¿Es f diferenciable en $x = 2$?

96. Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones que satisfacen $s'(x) = c(x)$ y $c'(x) = -s(x)$ para todo x. Si $s(0) = 0$ y $c(0) = 1$, demostrar que $[s(x)]^2 + [c(x)]^2 = 1$.

Preparación del examen Putnam

97. Suponer que f y g son funciones no constantes, derivables y de valores reales en R. Además, suponer que para cada par de números reales x y y, $f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ y $g(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$. Si $f'(0) = 0$, probar que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ para todo x.

Sección 4.2 Área

- **Emplear la notación sigma para escribir y calcular una suma.**
- **Entender el concepto de área.**
- **Aproximar el área de una región plana.**
- **Determinar el área de una región plana usando límites.**

Notación sigma

En la sección anterior, se estudió la antiderivación. En ésta se considerará en forma adicional un problema que se presentó en la sección 1.1: el de encontrar el área de una región en el plano. A primera vista, estas dos ideas parecen no relacionarse, aunque descubrirá en la sección 4.4 que se relacionan de manera estrecha por medio de un teorema muy importante conocido como el teorema fundamental del cálculo.

Esta sección se inicia introduciendo una notación concisa para sumas. Esta notación recibe el nombre de **notación sigma** debido a que utiliza la letra griega mayúscula sigma, Σ.

Notación sigma

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n$$

donde i es el **índice de suma**, a_i es el ***i*-ésimo término** de la suma **y los límites superior e inferior de la suma** son n y 1.

NOTA Los límites superior e inferior de la suma han de ser constantes respecto al índice de suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1. Cualquier entero menor o igual al límite superior es legítimo.

EJEMPLO 1 Ejemplos con la notación sigma

a) $\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

b) $\sum_{i=0}^{5} (i + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

c) $\sum_{j=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2 + 1) = \frac{1}{n}(1^2 + 1) + \frac{1}{n}(2^2 + 1) + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n}(n^2 + 1)$

e) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdot \cdot \cdot + f(x_n)\,\Delta x$

En los apartados *a)* y *b)*, obsérvese que la misma suma puede representarse de maneras diferentes utilizando la notación sigma.

Aunque puede utilizarse cualquier variable como índice de suma, suele preferirse i, j y k. Nótese en el ejemplo 1 que el índice de suma no aparece en los términos de la suma desarrollada.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para una interpretación geométrica de las fórmulas de suma, ver el artículo "Looking at $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ Geometrically" de Eric Hegblom en *Mathematics Teacher*.

LA SUMA DE LOS PRIMEROS CIEN ENTEROS

El maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran todos los enteros desde 1 hasta 100. Cuando Gauss regresó con la respuesta correcta muy poco tiempo después, el maestro no pudo evitar mirarle atónito. Lo siguiente fue lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \end{array}$$

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$$

Esto se generaliza por medio del teorema 4.2, donde

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100(101)}{2} = 5\,050$$

Las siguientes propiedades de la suma empleando la notación sigma se deducen de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y de la propiedad distributiva de la adición sobre la multiplicación. (En la primera propiedad, k es una constante.)

1. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

El siguiente teorema lista algunas fórmulas útiles para la suma de potencias. Una demostración de este teorema se incluye en el apéndice A.

TEOREMA 4.2 Fórmulas de suma empleando la notación sigma

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EJEMPLO 2 Evaluación de una suma

Hallar $\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10, 100, 1\,000$ y $10\,000$.

Solución Al aplicar el teorema 4.2, es posible escribir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1)$$ Factor constante $1/n^2$ fuera de la suma.

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$ Escribir como dos sumas.

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$ Aplicar el teorema 4.2.

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right]$$ Simplificar.

$$= \frac{n+3}{2n}.$$ Simplificar.

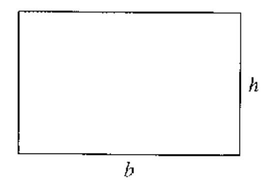
n	$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$
10	0.65000
100	0.51500
1 000	0.50150
10 000	0.50015

Después de esto se puede encontrar la suma sustituyendo los valores apropiados de n, como se muestra en la tabla de la izquierda.

En la tabla, las sumas parecen tender a un límite conforme n aumenta. Aunque la discusión de límites en el infinito en la sección 3.5 se aplica a una variable de x, donde x puede ser cualquier número real, muchos de los resultados siguen siendo válidos cuando una variable n se restringe a valores enteros positivos. Así, para encontrar el límite de $(n + 3)/2n$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2}.$$

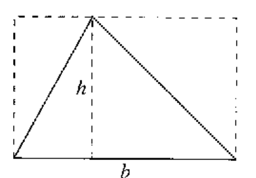
Área



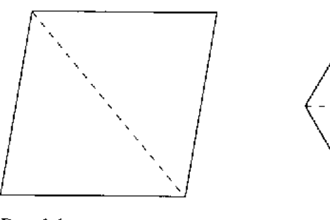
Rectángulo: $A = bh$
Figura 4.5

En la geometría euclideana, el tipo más simple de región plana es un rectángulo. Aunque la gente a menudo afirma que la *fórmula* para el área de un rectángulo es $A = bh$, como se muestra en la figura 4.5, resulta más apropiado decir que ésta es la *definición* del **área de un rectángulo.**

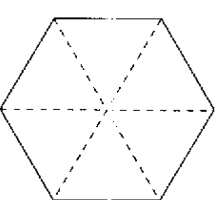
De esta definición, se pueden deducir fórmulas para áreas de muchas otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, se puede formar un rectángulo cuya área es dos veces la del triángulo, como se indica en la figura 4.6. Una vez que se sabe cómo encontrar el área de un triángulo, se puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se ilustra en la figura 4.7.



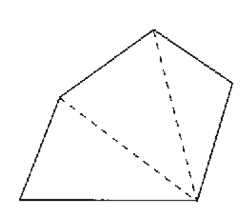
Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$
Figura 4.6



Paralelogramo

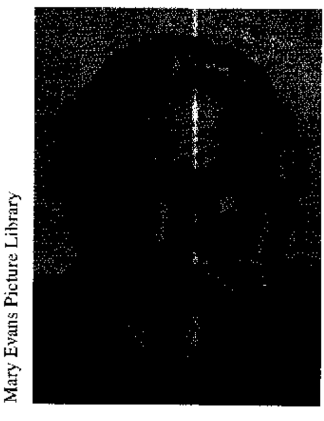


Hexágono



Polígono

Figura 4.7

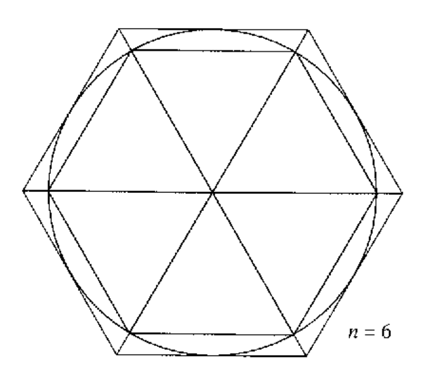


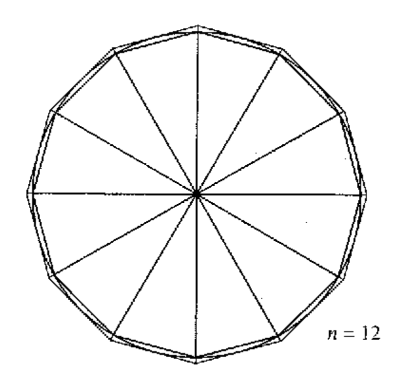
ARQUÍMEDES (287-212 A.C.)

Arquímedes utilizó el método de exhaución para deducir fórmulas para las áreas de elipses, segmentos parabólicos y sectores de una espiral. Se le considera como el más grande matemático aplicado de la antigüedad.

Hallar las áreas de regiones diferentes a las de los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de determinar fórmulas para las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por cónicas) mediante el método de *exhaución*. La descripción más clara de este método la hizo Arquímedes. En esencia, el método es un proceso de límite en el que el área se encierra entre dos polígonos (uno inscrito en la región y otro circunscrito alrededor de la región).

Por ejemplo, en la figura 4.8 el área de una región circular se aproxima mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito de n lados. Para cada valor de n el área del polígono inscrito es menor que el área del círculo, y el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n aumenta, las áreas de ambos polígonos van siendo cada vez mejores aproximaciones al área del círculo.





El método de exhaución para determinar el área de una región circular
Figura 4.8

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para un desarrollo alternativo de la fórmula para el área de un círculo, ver el artículo "Proof Whitout Words: Area of a Disk is πR^2" de Russell Jay Hendel en *Mathematics Magazine*.

Un proceso similar al que usó Arquímedes para determinar el área de una región plana se usa en los ejemplos restantes en esta sección.

El área de una región plana

Recordar de la sección 1.1 que los orígenes del cálculo están relacionados con dos problemas clásicos: el problema de la recta tangente y el problema del área. En el ejemplo 3 se inicia la investigación del problema del área.

EJEMPLO 3 Aproximación del área de una región plana

Emplear los cinco rectángulos de la figura 4.9*a*) y *b*) para determinar *dos* aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de

$$f(x) = -x^2 + 5$$

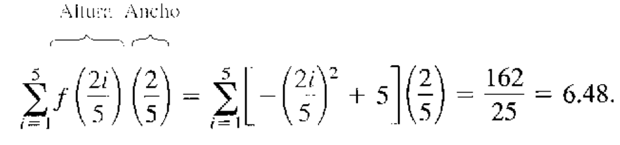
y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

y $f(x) = -x^2 + 5$

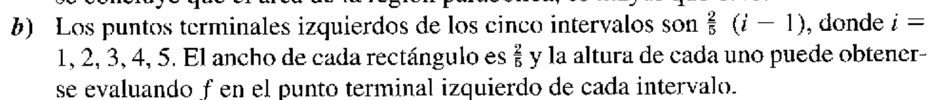
a) El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos

Solución

a) Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}i$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.



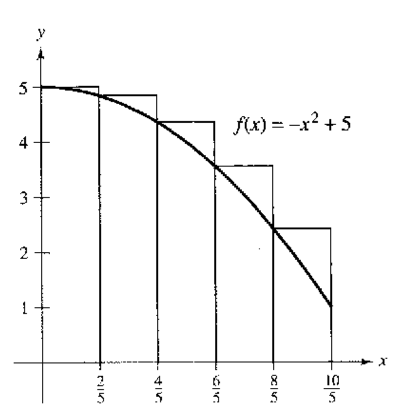
La suma de las áreas de los cinco rectángulos es



$$\sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

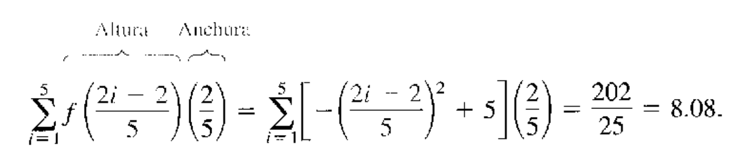
Como cada uno de los cinco rectángulos se encuentra dentro de la región parabólica, se concluye que el área de la región parabólica, es mayor que 6.48.

b) Los puntos terminales izquierdos de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}\ (i - 1)$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$ y la altura de cada uno puede obtenerse evaluando f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo.



b) El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos

Figura 4.9



$$\sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i-2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08.$$

Debido a que la región parabólica se encuentra contenida en la unión de las cinco regiones rectangulares, es posible concluir que el área de la región parabólica es menor que 8.08.

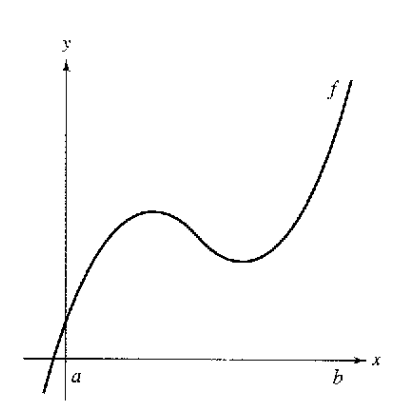
Combinando los resultados de los apartados *a*) y *b*), es posible concluir que

$$6.48 < (\text{Área de la región}) < 8.08.$$

NOTA Al incrementar el número de rectángulos utilizados en el ejemplo 3, se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región. Por ejemplo, al utilizar 25 rectángulos, cada uno de ancho $\frac{2}{25}$, puede concluirse que

$$7.17 < (\text{Área de la región}) < 7.49.$$

Sumas superior e inferior



La región bajo una curva
Figura 4.10

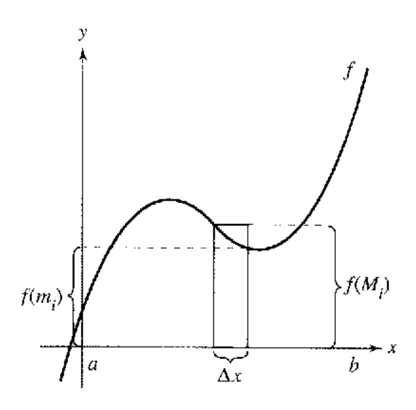
El procedimiento utilizado en el ejemplo 3 puede generalizarse de la manera siguiente. Considerar una región plana limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, como se muestra en la figura 4.10. La región está limitada en su parte inferior por el eje x y las fronteras izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Para aproximar el área de la región, se empieza subdiviendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$ como se muestra en la figura 4.11. Los puntos terminales de los intervalos son los siguientes.

$$a + 0(\Delta x) < a + 1(\Delta x) < a + 2(\Delta x) < \cdots < a + n(\Delta x)$$

Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en *cada* subintervalo.

$f(m_i) =$ valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo
$f(M_i) =$ valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo



El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$
Figura 4.11

A continuación, se define un **rectángulo inscrito** que se encuentra *dentro* de la i-ésima subregión y un rectángulo circunscrito que se extiende *fuera* de la i-ésima región. La altura del i-ésimo rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la altura del i-ésimo rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. Para *cada* i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito.

$$\begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{pmatrix} = f(m_i)\,\Delta x \le f(M_i)\,\Delta x = \begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{pmatrix}$$

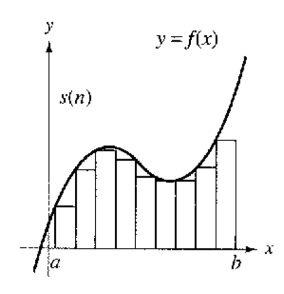
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior**.

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$$

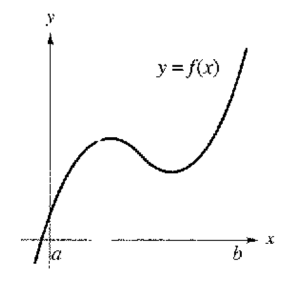
$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$$

En la figura 4.12, se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

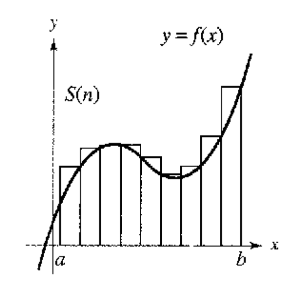
$$s(n) \le (\text{Área de región}) \le S(n)$$



El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región



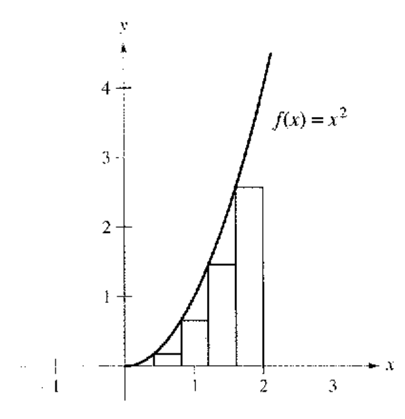
Área de la región



El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

Figura 4.12

EJEMPLO 4 Hallar las sumas superior e inferior de una región



Rectángulos inscritos

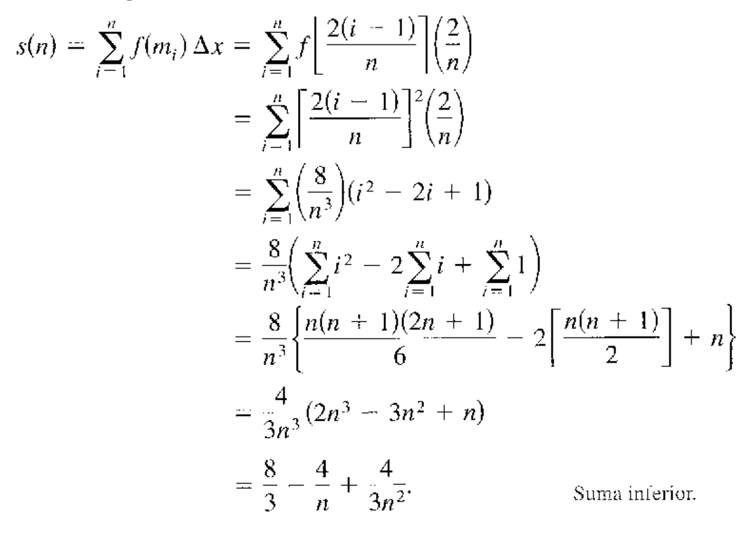
Determinar la suma superior e inferior de la región delimitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Para empezar, se divide el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos, cada uno de ancho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

La figura 4.13 muestra los puntos terminales de los subintervalos y varios de los rectángulos inscritos y circunscritos. Como f es creciente en el intervalo $[0, 2]$, el valor mínimo en cada subintervalo ocurre en el punto terminal izquierdo, y el valor máximo ocurre en el punto terminal derecho.

Puntos terminales izquierdos	*Puntos terminales derechos*
$m_i = 0 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i-1)}{n}$	$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$



Rectángulos circunscritos
Figura 4.13

Utilizando los puntos terminales izquierdos, la suma inferior es

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2 - 2i + 1) \\ &= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n\right\} \\ &= \frac{4}{3n^3}(2n^3 - 3n^2 + n) \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \end{aligned}$$

Suma inferior.

Empleando los puntos terminales derechos, la suma superior es

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n^3}\right)i^2 \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{4}{3n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \end{aligned}$$

Suma superior.

EXPLORACIÓN

Para la región dada en el ejemplo 4, calcular la suma inferior

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y la suma superior

$$S(n) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

para $n = 10\,000$ y $1\,000$. Utilizar los resultados para determinar el área de la región.

El ejemplo 4 ilustra algunos aspectos importantes acerca de las sumas inferior y superior. Primero, advertir que para cualquier valor de n, la suma inferior es menor (o igual) que la suma superior.

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

Segundo, la diferencia entre estas dos sumas disminuye cuando n aumenta. De hecho, si se toman los límites cuando $n \to \infty$, tanto en la suma superior como en la suma inferior se aproximan a $\frac{8}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3} \qquad \text{Límite de la suma inferior.}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3} \qquad \text{Límite de la suma superior.}$$

El siguiente teorema muestra que la equivalencia de los límites (cuando $n \to \infty$) de las sumas superior e inferior no es una mera coincidencia. Este teorema es válido para toda función continua no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. La demostración de este teorema es más adecuada para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 4.3 Límites de las sumas superior e inferior

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

Debido a que se alcanza el mismo límite tanto con el valor mínimo $f(m_i)$ como con el valor máximo $f(M_i)$, se sigue a partir del teorema del encaje o del emparedado (teorema 1.8) que la elección de x en el i-ésimo intervalo no afecta al límite. Esto significa que se está en libertad de elegir cualquier valor de x *arbitrario* en el i-ésimo subintervalo, como en la siguiente *definición del área de una región en el plano.*

Definición del área de una región en el plano

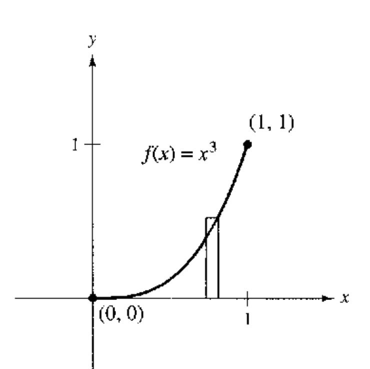
Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ (ver la figura 4.14).

El ancho del i-ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$
Figura 4.14

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante la definición de límite



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{4}$
Figura 4.15

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 4.15.

Solución Se empieza notando que f es continua y no negativa en el intervalo $[0, 1]$. Después, se divide el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. De acuerdo con la definición de área, elegir cualquier valor de x en el i-ésimo subintervalo. En este ejemplo, los puntos terminales derechos $c_i = i/n$ resultan adecuados.

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales derechos: } c_i = \frac{i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

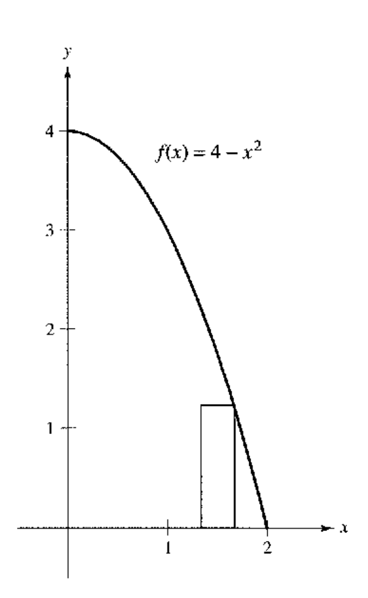
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

El área de la región es $\frac{1}{4}$.

EJEMPLO 6 Hallar el área mediante la definición de límite



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 1$ y $x = 2$ es $\frac{5}{3}$
Figura 4.16

Determinar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$, como se indica en la figura 4.16.

Solución La función f es continua y no negativa en el intervalo $[1, 2]$, y de tal modo se empieza dividiendo el intervalo en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. Eligiendo el punto terminal derecho

$$c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} \qquad \text{Puntos terminales derechos.}$$

de cada subintervalo, se obtiene

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$

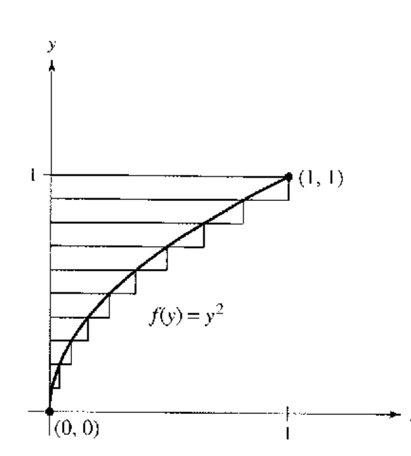
$$= 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{3}.$$

El área de la región es $\frac{5}{3}$.

El último ejemplo en esta sección considera una región limitada por el eje y (en vez del eje x).

EJEMPLO 7 Una región limitada por el eje y



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje y para $0 \le y \le 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.17

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de $f(y) = y^2$ y el eje y para $0 \le y \le 1$, como se muestra en la figura 4.17.

Solución Cuando f es una función continua y no negativa de y, puede seguirse utilizando el mismo procedimiento básico que se ilustró en los ejemplos 5 y 6. Se empieza dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta y = 1/n$. Después utilizando los puntos extremos superiores $c_i = i/n$, se obtiene

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales superiores: } c_i = \frac{i}{n}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}.$$

El área de la región es $\frac{1}{3}$.

Ejercicios de la sección 4.2

En los ejercicios 1 a 6, encontrar la suma. Usar la función de suma de la computadora para verificar el resultado.

1. $\sum_{i=1}^{5} (2i + 1)$
2. $\sum_{k=3}^{6} k(k - 2)$
3. $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$
4. $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$
5. $\sum_{k=1}^{4} c$
6. $\sum_{i=1}^{4} [(i - 1)^2 + (i + 1)^3]$

En los ejercicios 7 a 14, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

7. $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(9)}$
8. $\frac{5}{1+1} + \frac{5}{1+2} + \frac{5}{1+3} + \cdots + \frac{5}{1+15}$
9. $\left[5\left(\frac{1}{8}\right) + 3\right] + \left[5\left(\frac{2}{8}\right) + 3\right] + \cdots + \left[5\left(\frac{8}{8}\right) + 3\right]$
10. $\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{4}{4}\right)^2\right]$
11. $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[\left(\frac{2n}{n}\right)^3 - \frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
12. $\left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
13. $\left[2\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \left[2\left(1 + \frac{3n}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)$
14. $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

En los ejercicios 15 a 20, utilizar las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para calcular la suma. Utilizar la función de suma de la computadora para verificar el resultado.

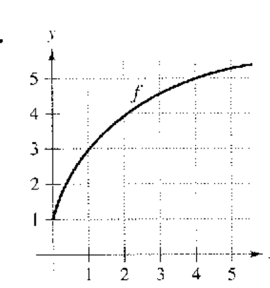
15. $\sum_{i=1}^{20} 2i$
16. $\sum_{i=1}^{15} (2i - 3)$
17. $\sum_{i=1}^{20} (i - 1)^2$
18. $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1)$
19. $\sum_{i=1}^{15} i(i - 1)^2$
20. $\sum_{i=1}^{10} i(i^2 + 1)$

En los ejercicios 21 y 22, usar la función de suma de una computadora para evaluar la suma. Después emplear las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para verificar la suma.

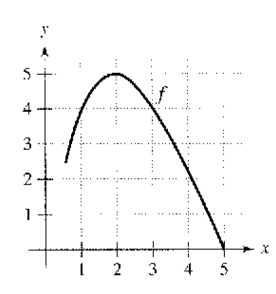
21. $\sum_{i=1}^{20} (i^2 - 3)$
22. $\sum_{i=1}^{15} (i^3 - 2i)$

En los ejercicios 23 a 26, delimitar el área de la región sombreada aproximando las sumas superior e inferior. Emplear rectángulos de ancho 1.

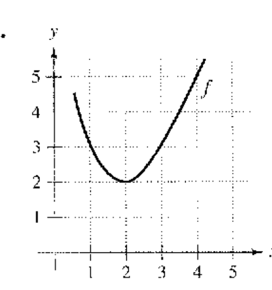
23.



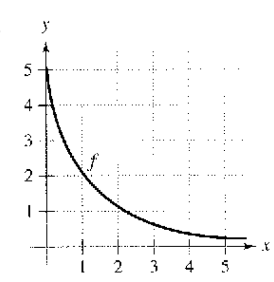
24.



25.

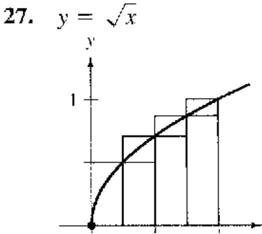


26.

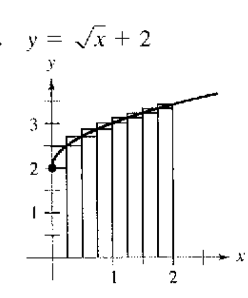


En los ejercicios 27 a 30, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho).

27. $y = \sqrt{x}$



28. $y = \sqrt{x} + 2$



29. $y = \dfrac{1}{x}$

30. $y = \sqrt{1 - x^2}$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar el límite de $s(n)$ cuando $n \to \infty$.

31. $s(n) = \dfrac{81}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

32. $s(n) = \dfrac{64}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

33. $s(n) = \dfrac{18}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

34. $s(n) = \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar las fórmulas de suma con notación sigma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Emplear el resultado para determinar la suma correspondiente a $n = 10, 100, 1\,000$ y $10\,000$.

35. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{n^2}$

36. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{4j+3}{n^2}$

37. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6k(k-1)}{n^3}$

38. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2(i-1)}{n^4}$

En los ejercicios 39 a 44, encontrar una fórmula para la suma de los n términos. Emplear la fórmula para determinar el límite cuando $n \to \infty$.

39. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i}{n^2}$

40. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

41. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2$

42. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

43. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

44. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$

45. ***Razonamiento numérico*** Considerar un triángulo de área 2 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$0 < 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} S(n) = 2$.

46. ***Razonamiento numérico*** Considerar un trapezoide de área 4 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$1 < 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < 1 + (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} S(n) = 4$.

En los ejercicios 47 a 56, utilizar el proceso de límite para encontrar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo indicado. Dibujar la región.

47. $y = -2x + 3, \quad [0, 1]$ **48.** $y = 3x - 4, \quad [2, 5]$

49. $y = x^2 + 2, \quad [0, 1]$ **50.** $y = x^2 + 1, \quad [0, 3]$

51. $y = 16 - x^2, \quad [1, 3]$ **52.** $y = 1 - x^2, \quad [-1, 1]$

53. $y = 64 - x^3, \quad [1, 4]$ **54.** $y = 2x - x^3, \quad [0, 1]$

55. $y = x^2 - x^3, \quad [-1, 1]$ **56.** $y = x^2 - x^3, \quad [-1, 0]$

En los ejercicios 57 a 62, emplear el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje y sobre el intervalo y indicado. Dibujar la región.

57. $f(y) = 3y, 0 \leq y \leq 2$ **58.** $g(y) = \frac{1}{2}y, 2 \leq y \leq 4$

59. $f(y) = y^2, 0 \leq y \leq 3$ **60.** $f(y) = 4y - y^2, 1 \leq y \leq 2$

61. $g(y) = 4y^2 - y^3, 1 \leq y \leq 3$ **62.** $h(y) = y^3 + 1, 1 \leq y \leq 2$

En los ejercicios 63 a 66, utilizar la *regla del punto medio*

$$\text{Área} \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo dado.

63. $f(x) = x^2 + 3, \quad [0, 2]$ **64.** $f(x) = x^2 + 4x, \quad [0, 4]$

65. $f(x) = \tan x, \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ **66.** $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Programación **Escribir un programa para una computadora con el fin de aproximar áreas utilizando la regla del punto medio. Suponer que la función es positiva sobre el intervalo dado y que los subintervalos son de igual ancho. En los ejercicios 67 a 70, emplear el programa para aproximar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo indicado, y completar la tabla.**

n	4	8	12	16	20
Aproximación de área					

67. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$ **68.** $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}, \quad [2, 6]$

69. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right), \quad [1, 3]$ **70.** $f(x) = \cos\sqrt{x}, \quad [0, 2]$

Desarrollo de conceptos

Aproximación **En los ejercicios 71 y 72, determinar cuál es el mejor valor que aproxima el área de la región entre el eje x y la gráfica de la función sobre el intervalo indicado. (Realizar la elección con base en un dibujo de la región y no efectuando cálculos.)**

71. $f(x) = 4 - x^2, \quad [0, 2]$

a) -2 *b)* 6 *c)* 10 *d)* 3 *e)* 8

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

72. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{4}, \quad [0, 4]$

a) 3 *b)* 1 *c)* -2 *d)* 8 *e)* 6

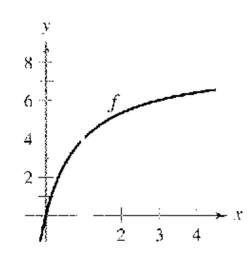
73. Con sus propias palabras y utilizando las figuras adecuadas, describa los métodos de las sumas superior e inferior en la aproximación del área de una región.

74. Proporcionar la definición del área de una región en el plano.

75. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{8x}{x + 1},$$

$x = 0$, $x = 4$, y $y = 0$, como se muestra en la figura.



a) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan a la suma inferior cuando $n = 4$. Encontrar esta suma inferior.

b) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan la suma superior cuando $n = 4$. Determinar esta suma superior.

c) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos cuyas alturas se determinan mediante los valores funcionales en el punto medio de cada subintervalo cuando $n = 4$. Determinar esta suma utilizando la regla del punto medio.

d) Verificar las siguientes fórmulas al aproximar el área de la región utilizando n subintervalos de igual ancho.

Suma inferior: $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left[(i - 1)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Suma superior: $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left[(i)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Regla del punto medio: $M(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

e) Utilizar una computadora y las fórmulas del apartado *d)* para completar la tabla.

n	4	8	20	100	200
$s(n)$					
$S(n)$					
$M(n)$					

f) Explicar por qué $s(n)$ aumenta y $S(n)$ disminuye para valores recientes de n, como se muestra en la tabla en el apartado *e*).

76. ***Método Monte Carlo*** El siguiente programa de computadora aproxima el área de la región bajo la gráfica de una función monótona y sobre el eje x entre $x = a$ y $x = b$. Correr el programa para $a = 0$ y $b = \pi/2$ para varios valores de N2. Explicar por qué funciona el método Monte Carlo. [*Adaptación del programa del Método Monte Carlo de James M. Sconyers, "Approximation of Area Under a Curve", MATHEMATICS TEACHER 77, núm. 2 (febrero 1984). Derechos reservados 1984 por el National Council of Teachers of Mathematics. Reproducido con autorización.*]

```
10  DEF FNF(X)=SIN(X)
20  A=0
30  B=π/2
40  PRINT "Input Number of Random Points"
50  INPUT N2
60  N1=0
70  IF FNF(A)>FNF(B) THEN YMAX=FNF(A) ELSE
    YMAX=FNF(B)
80  FOR I=1 TO N2
90  X=A+(B-A)*RND(1)
100 Y=YMAX*RND(1)
110 IF Y>=FNF(X) THEN GOTO 130
120 N1=N1+1
130 NEXT I
140 AREA=(N1/N2)*(B-A)*YMAX
150 PRINT "Approximate Area:"; AREA
160 END
```

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 y 78, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

77. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$.

78. Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, entonces los límites cuando $n \to \infty$ de su suma inferior $s(n)$ y de su suma superior $S(n)$ existen ambos y son iguales.

79. ***Comentario*** Utilizar la figura para escribir un pequeño párrafo donde se explique por qué la fórmula $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ es válida para todos los enteros positivos n.

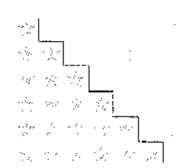


Figura para 79

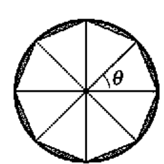


Figura para 80

80. ***Razonamiento gráfico*** Considerar un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Unir los vértices del polígono al centro del círculo, formando n triángulos congruentes (ver figura).

a) Determinar el ángulo central θ en términos de n.

b) Demostrar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} \theta$.

c) Sea A_n la suma de las áreas de los n triángulos. Hallar $\lim_{n\to\infty} A_n$.

81. ***Modelo matemático*** La tabla lista las mediciones de un terreno delimitado por un río y dos caminos rectos que se unen en ángulo recto, donde x y y se miden en pies (ver figura).

x	0	50	100	150	200	250	300
y	450	362	305	268	245	156	0

a) Utilizar las funciones de regresión de una computadora para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) Emplear una computadora para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Recurrir al modelo del apartado *a*) para estimar el área del terreno.

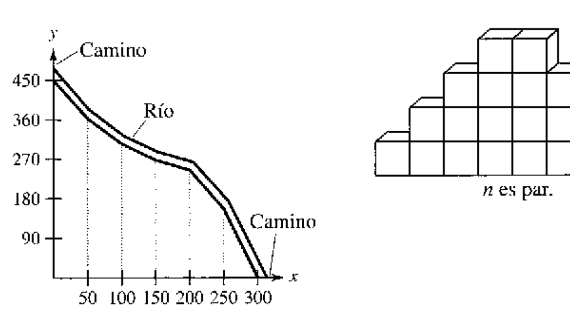


Figura para 81 **Figura para 82**

82. ***Bloques de construcción*** Un niño coloca n bloques cúbicos de construcción en una hilera para formar la base de un diseño triangular (ver figura). Cada hilera sucesiva contiene dos bloques menos que la hilera precedente. Encontrar una fórmula para el número de bloques utilizados en el diseño. (*Sugerencia:* El número de bloques constitutivos en el diseño depende de si n es par o impar.)

83. Demostrar cada fórmula mediante inducción matemática. (Quizá necesite revisar el método de prueba por inducción en un texto de precálculo.)

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n + 1)$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

Preparación del examen Putnam

84. Un dardo, lanzado al azar, incide sobre un blanco cuadrado. Suponiendo que cualesquiera de las dos partes del blanco de igual área son igualmente probables de ser golpeadas por el dardo, encontrar la probabilidad de que el punto de incidencia sea más cercano al centro que a cualquier borde. Escribir la respuesta en la forma $(a\sqrt{b} + c)/d$, donde a, b, c y d son enteros positivos.

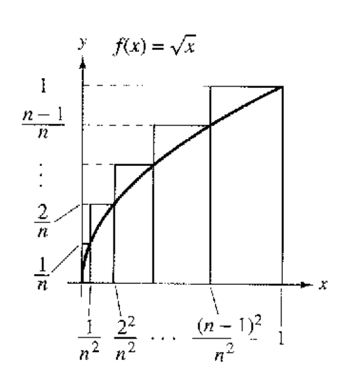
Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

Sección 4.3 Sumas de Riemann e integrales definidas

- **Entender la definición de una suma de Riemann.**
- **Hallar una integral definida utilizando límites.**
- **Calcular una integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas.**

Sumas de Riemann

En la definición de área dada en la sección 4.2, las particiones tenían subintervalos de *igual ancho*. Esto se hizo sólo por conveniencia de cálculo. El siguiente ejemplo muestra que no es necesario tener subintervalos de igual ancho.



Los subintervalos no tienen anchos iguales
Figura 4.18

EJEMPLO 1 Una partición con subintervalos de anchos desiguales

Considerar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x para $0 \leq x \leq 1$, como se muestra en la figura 4.18. Hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

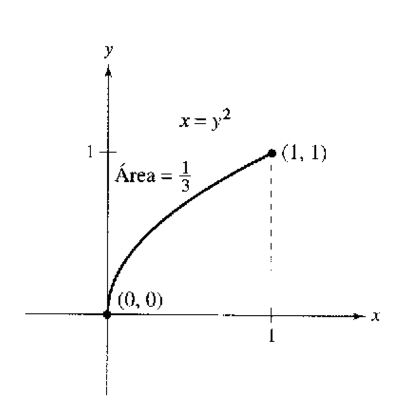
donde c_i es el punto terminal derecho de la partición dada por $c_i = i^2/n^2$ y Δx_i es el ancho del i-ésimo intervalo.

Solución El ancho del *i-ésimo* intervalo está dado por

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}\\ &= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2}\\ &= \frac{2i-1}{n^2}.\end{aligned}$$

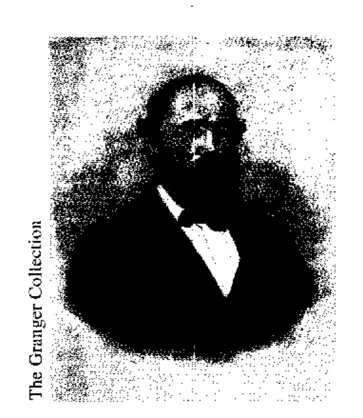
De tal modo, el límite es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



El área de la región acotada por la gráfica de $x = y^2$ y el eje y para $0 \leq y \leq 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.19

De acuerdo con el ejemplo 7 de la sección 4.2, se sabe que la región mostrada en la figura 4.19 tiene un área de $\frac{1}{3}$. Debido a que el cuadrado acotado por $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ tiene un área de 1, puede concluirse que el área de la región que se muestra en la figura 4.18 tiene un área de $\frac{2}{3}$. Esto concuerda con el límite que se encontró en el ejemplo 1, aun cuando en ese ejemplo se utilizó una partición con subintervalos de anchos desiguales. La razón por la que esta partición particular da el área apropiada es que cuando n crece, el *ancho del subintervalo más grande tiende a cero*. Ésta es la característica clave del desarrollo de las integrales definidas.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Riemann, matemático alemán, realizó su trabajo más notable en las áreas de geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales y la teoría de los números. Fueron los resultados de Riemann en física y matemáticas los que conformaron la estructura en la que se basa la teoría de la relatividad general de Einstein.

En la sección precedente, el límite de una suma se utilizó para definir el área de una región en el plano. La determinación del área por este medio es sólo una de las *muchas* aplicaciones que implican el límite de una suma. Un enfoque similar puede utilizarse para determinar cantidades tan diversas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes, trabajo y áreas superficiales. La siguiente definición honra el nombre de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Aunque la integral definida se había utilizado ya con anteriodidad, fue Riemann quien generalizó el concepto para cubrir una categoría más amplia de funciones.

En la definición siguiente de una suma de Riemann, notar que la función f no tiene otra restricción que haber sido definida en el intervalo $[a, b]$. (En la sección precedente, la función f se supuso continua y no negativa debido a que se trabajó con un área bajo una curva.)

Definición de una suma de Riemann

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

NOTA Las sumas vistas en la sección 4.2 son ejemplos de las sumas de Riemann, pero hay más sumas generales de Riemann que las cubren.

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δ es la **norma** de la partición y se denota por medio de $\|\Delta\|$. Si todos los intervalos tienen la misma anchura, la partición es **regular** y la norma se denota mediante

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}. \qquad \text{Partición ordinaria.}$$

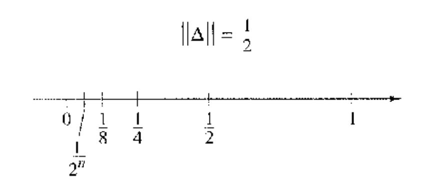
En una partición general, la norma se relaciona con el número de subintervalos en $[a, b]$ de la siguiente manera.

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \le n \qquad \text{Partición general.}$$

De tal modo, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto es $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$.

La afirmación recíproca de este enunciado no es cierta. Por ejemplo, sea Δ_n la partición del intervalo [0, 1] dado por

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdot \cdot \cdot < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1.$$



$n \to \infty$ no implica que $\|\Delta\| \to 0$
Figura 4.20

Como se muestra en la figura 4.20, para cualquier valor positivo de n, la norma de la partición Δ_n es $\frac{1}{2}$. De tal modo, como al dejar que n tienda a infinito no obliga a que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0. En una partición regular, sin embargo, los enunciados $\|\Delta\| \to 0$ y $n \to \infty$ son equivalentes.

Integrales definidas

Para definir la integral definida, considerar el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$$

Afirmar que este límite existe significa que para $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición con $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

(Esto debe ser cierto para cualquier elección de c_i en el i-ésimo subintervalo de Δ.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información acerca de la historia de la integral definida, ver el artículo "The Evolution of Integration", de A. Shenitzer y J. Steprāns en *The American Mathematical Monthly*.

Definición de una integral definida

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

No es coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. Se verá la razón en la siguiente sección cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. Por ahora es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un *número*, en tanto que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

Una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en $[a, b]$. Una demostración de este teorema está más allá del objetivo de este texto.

TEOREMA 4.4 La continuidad implica integrabilidad

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

EXPLORACIÓN

El recíproco del teorema 4.4 ¿Es verdadero el recíproco del teorema 4.4 ? Esto es, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explicar el razonamiento y proporcionar ejemplos.

Describir las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida como límite

Hallar la integral definida $\int_{-2}^{1} 2x\, dx$.

Solución La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en $[-2, 1]$. Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia computacional, definir Δ, subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de la misma anchura.

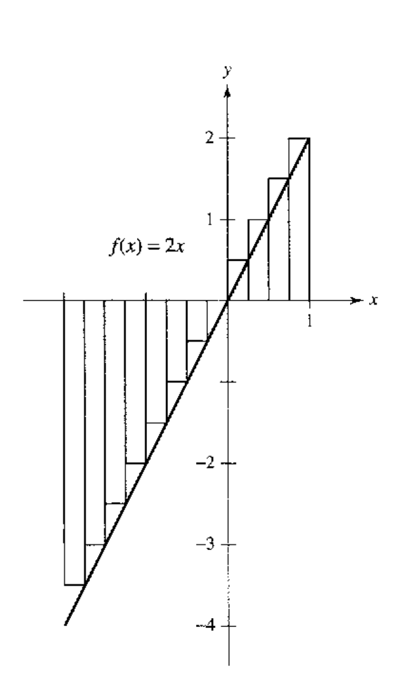
$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$

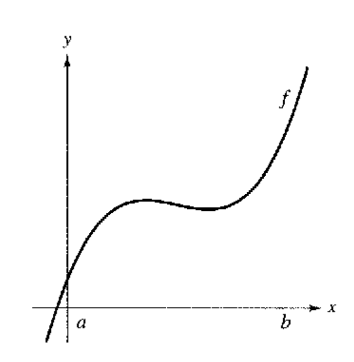
De este modo, la integral definida está dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\, dx &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n}\left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right) \\
&= -3.
\end{aligned}$$



Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región
Figura 4.21

Debido a que la integral definida en el ejemplo 2 es negativa, ésta *no* representa el área de la región que se muestra en la figura 4.21. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral definida sea interpretada como un área (como se definió en la sección 4.2), la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como se establece en el siguiente teorema. (La demostración de este teorema es directa: utilizar simplemente la definición de área dada en la sección 4.2.)



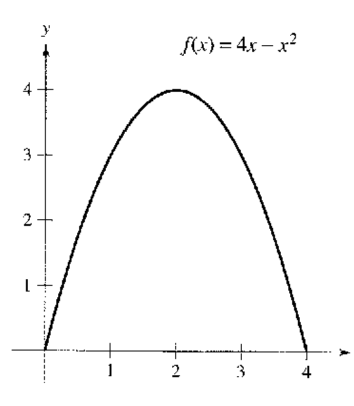
Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$
Figura 4.22

TEOREMA 4.5 La integral definida como área de una región

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(Ver figura 4.22.)



$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

Figura 4.23

Como un ejemplo del teorema 4.5. considerar la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

y el eje x, como se muestra en la figura 4.23. Debido a que f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[0, 4]$, el área de la región es

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

Una técnica directa para hallar una integral definida como ésta se analizará en la sección 4.4. Por ahora se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3 Áreas de figuras geométricas comunes

Dibujar la región correspondiente a cada integral definida. Evaluar después cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a) $\int_1^3 4\,dx$ ***b)*** $\int_0^3 (x + 2)\,dx$ ***c)*** $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

Solución Un dibujo de cada región se muestra en la figura 4.24.

a) Esta región es un rectángulo de 4 de alto por 2 de ancho.

$$\int_1^3 4\,dx = (\text{Área del rectángulo}) = 4(2) = 8$$

b) Esta región es un trapezoide con una altura de 3 y bases paralelas de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapezoide es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

$$\int_0^3 (x + 2)\,dx = (\text{Área del trapecio}) = \frac{1}{2}(3)(2 + 5) = \frac{21}{2}$$

c) Esta región es un semicírculo de radio 2. La fórmula para el área de un semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx = (\text{Área del semicírculo}) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$

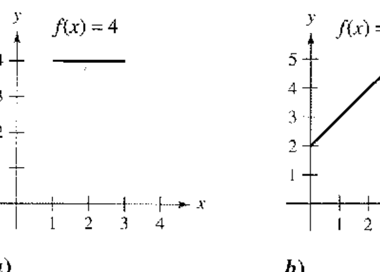
NOTA La variable de integración en una integral definida algunas veces se denomina como *variable muda* porque puede ser sustituida por cualquier otra variable sin cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, las integrales definidas

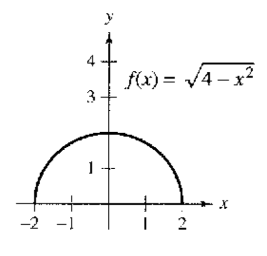
$$\int_0^3 (x + 2)\,dx$$

y

$$\int_0^3 (t + 2)\,dt$$

tienen el mismo valor.





a) ***b)*** ***c)***

Figura 4.24

Propiedades de las integrales definidas

La definición de la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ especifica que $a < b$. Ahora, es conveniente, sin embargo, extender la definición para cubrir casos en los cuales $a = b$ o $a > b$. Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

Definiciones de dos integrales definidas especiales

1. Si f está definida en $x = a$, entonces se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

EJEMPLO 4 Cálculo de integrales definidas

a) Debido a que la función seno se define en $x = \pi$, y los límites superior e inferior de integración son iguales, puede decirse que

$$\int_\pi^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

b) La integral $\int_3^0 (x + 2)\,dx$ es la misma que la dada en el ejemplo 3*b* excepto por el hecho de que los límites superior e inferior se intercambian. Debido a que la integral en el ejemplo 3*b* tiene un valor de $\frac{21}{2}$, puede escribir

$$\int_3^0 (x + 2)\,dx = -\int_0^3 (x + 2)\,dx = -\frac{21}{2}.$$

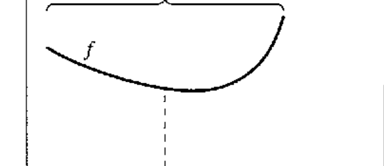


Figura 4.25

En la figura 4.25, la región más grande puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta. Como el segmento de recta tiene área cero, se concluye que el área de la región más grande es igual a la suma de las áreas de las dos regiones más pequeñas.

TEOREMA 4.6 Propiedad aditiva de intervalos

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 5 Empleo de la propiedad aditiva de intervalos

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx \qquad \text{Teorema 4.6}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad \text{Área del triángulo}$$

$$= 1$$

Debido a que la integral definida se describe como el límite de una suma, hereda las propiedades de la suma dadas en la parte superior de la página 260.

TEOREMA 4.7 Propiedades de las integrales definidas

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Observar que la propiedad 2 del teorema 4.7 puede extenderse a cualquier número finito de funciones. Por ejemplo,

$$\int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx.$$

EJEMPLO 6 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\displaystyle\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx$ utilizando los siguientes valores.

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\,dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

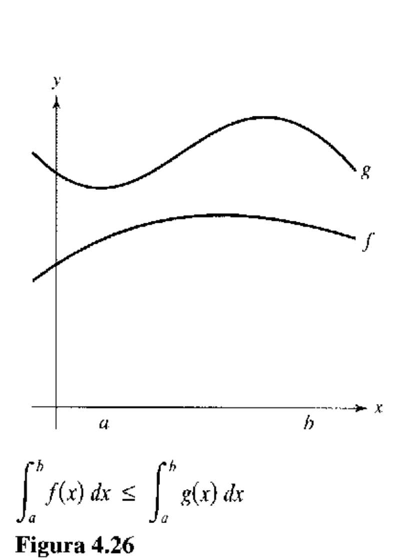
Solución

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx &= \int_1^3 (-x^2)\,dx + \int_1^3 4x\,dx + \int_1^3 (-3)\,dx \\ &= -\int_1^3 x^2\,dx + 4\int_1^3 x\,dx - 3\int_1^3 dx \\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

para $a \le x \le b$, las siguientes propiedades son ciertas. Primero, el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x (entre a y b) debe ser no negativa. Segundo, esta área debe ser menor o igual que el área de la región delimitada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como se muestra en la figura 4.26. Estos dos resultados se generalizan en el teorema 4.8. (Una demostración de este teorema se presenta en el apéndice A.)



$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Figura 4.26

> **TEOREMA 4.8 Conservación de desigualdades**
>
> **1.** Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces
>
> $$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx.$$
>
> **2.** Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces
>
> $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Ejercicios de la sección 4.3

En los ejercicios 1 y 2, utilizar el ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

sobre la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = 3i^2/n^2$.)

2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = i^3/n^3$.)

En los ejercicios 3 a 8, evaluar la integral definida mediante la definición de límite.

3. $\displaystyle\int_4^{10} 6\, dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{3} x\, dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx$

6. $\displaystyle\int_1^{3} 3x^2\, dx$

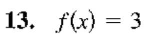
7. $\displaystyle\int_1^{2} (x^2 + 1)\, dx$

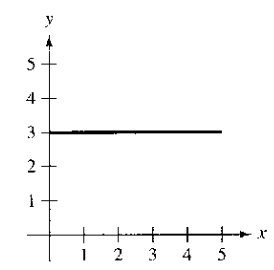
8. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3x^2 + 2)\, dx$

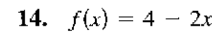
En los ejercicios 9 a 12, escribir el límite como una integral definida en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

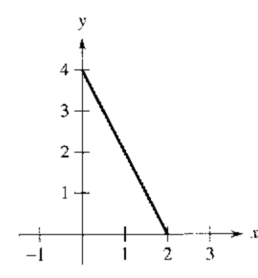
	Límite	*Intervalo*
9.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (3c_i + 10)\, \Delta x_i$	$[-1, 5]$
10.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 6c_i(4 - c_i)^2\, \Delta x_i$	$[0, 4]$
11.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i^2 + 4}\, \Delta x_i$	$[0, 3]$
12.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{c_i^2}\right) \Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 13 a 22, formular una integral definida que produce el área de la región. (No evaluar la integral.)

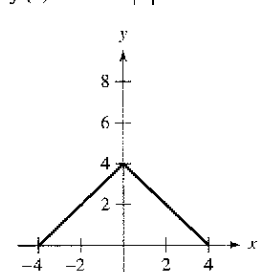
13. 
$f(x) = 3$



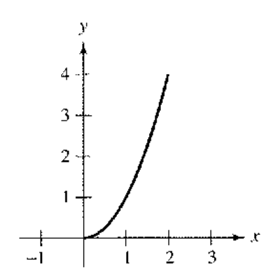
14. 
$f(x) = 4 - 2x$



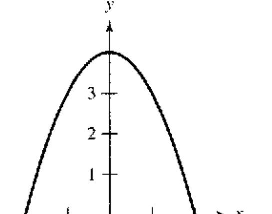
15. $f(x) = 4 - |x|$



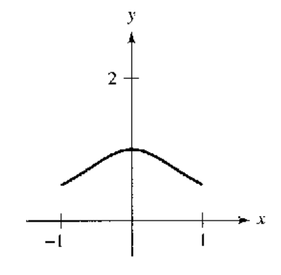
16. $f(x) = x^2$



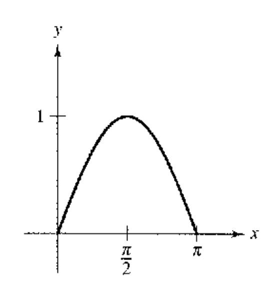
17. $f(x) = 4 - x^2$



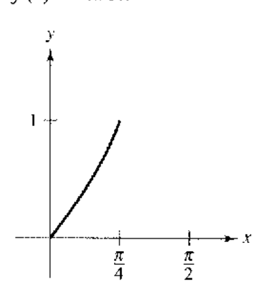
18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



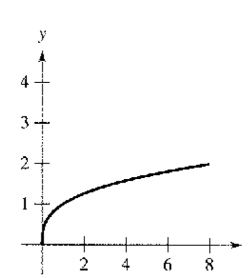
19. $f(x) = \operatorname{sen} x$



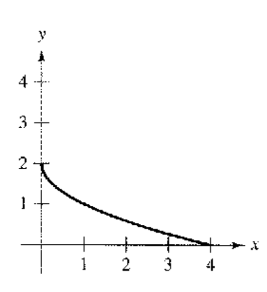
20. $f(x) = \tan x$



21. $g(y) = y^3$



22. $f(y) = (y - 2)^2$



En los ejercicios 23 a 32, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Luego, usar una fórmula geométrica para evaluar la integral ($a > 0, r > 0$).

23. $\int_0^3 4\,dx$

24. $\int_{-a}^{a} 4\,dx$

25. $\int_0^4 x\,dx$

26. $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$

27. $\int_0^2 (2x + 5)\,dx$

28. $\int_0^8 (8 - x)\,dx$

29. $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx$

30. $\int_{-a}^{a} (a - |x|)\,dx$

31. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

32. $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

En los ejercicios 33 a 40, evaluar la integral utilizando los siguientes valores.

$$\int_2^4 x^3\,dx = 60, \qquad \int_2^4 x\,dx = 6, \qquad \int_2^4 dx = 2$$

33. $\int_4^2 x\,dx$

34. $\int_2^2 x^3\,dx$

35. $\int_2^4 4x\,dx$

36. $\int_2^4 15\,dx$

37. $\int_2^4 (x - 8)\,dx$

38. $\int_2^4 (x^3 + 4)\,dx$

39. $\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\right) dx$

40. $\int_2^4 (6 + 2x - x^3)\,dx$

41. Dadas $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$ y $\int_5^7 f(x)\,dx = 3$, hallar

a) $\int_0^7 f(x)\,dx$. *b)* $\int_5^0 f(x)\,dx$.

c) $\int_5^5 f(x)\,dx$. *d)* $\int_0^5 3f(x)\,dx$.

42. Dadas $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, hallar

a) $\int_0^6 f(x)\,dx$. *b)* $\int_6^3 f(x)\,dx$.

c) $\int_3^3 f(x)\,dx$. *d)* $\int_3^6 -5f(x)\,dx$.

43. Dadas $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\,dx = -2$, hallar

a) $\int_2^6 [f(x) + g(x)]\,dx$. *b)* $\int_2^6 [g(x) - f(x)]\,dx$.

c) $\int_2^6 2g(x)\,dx$. *d)* $\int_2^6 3f(x)\,dx$.

44. Dadas $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$, hallar

a) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$. *b)* $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

c) $\int_{-1}^{1} 3f(x)\,dx$. *d)* $\int_0^1 3f(x)\,dx$.

45. Utilizar la tabla de valores para determinar las estimaciones inferiores y superiores de

$$\int_0^{10} f(x)\,dx.$$

Suponer que f es una función decreciente.

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	32	24	12	-4	-20	-36

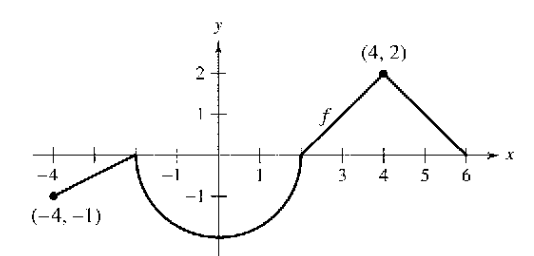
46. Utilizar la tabla de valores para estimar

$$\int_0^6 f(x)\,dx.$$

Utilizar tres subintervalos iguales y *a)* los puntos terminales izquierdos, *b)* los puntos terminales derechos y *c)* los puntos medios. Si f es una función creciente ¿cómo se compara cada estimación con el valor real? Explicar el razonamiento.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	0	8	18	30	50	80

47. ***Para pensar*** La gráfica de f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.

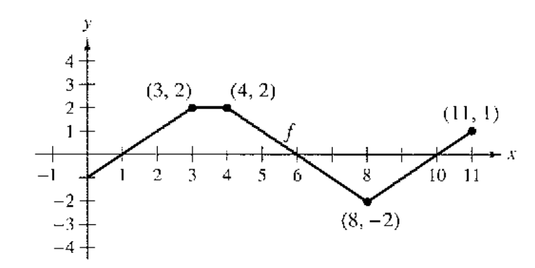


a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ b) $\int_2^6 f(x)\,dx$

c) $\int_{-4}^2 f(x)\,dx$ d) $\int_{-4}^6 f(x)\,dx$

e) $\int_{-4}^6 |f(x)|\,dx$ f) $\int_{-4}^6 [f(x) + 2]\,dx$

48. ***Para pensar*** La gráfica de f consta de segmentos de recta, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\int_0^1 -f(x)\,dx$ b) $\int_3^4 3f(x)\,dx$

c) $\int_0^7 f(x)\,dx$ d) $\int_5^{11} f(x)\,dx$

e) $\int_0^{11} f(x)\,dx$ f) $\int_4^{10} f(x)\,dx$

49. ***Para pensar*** Considerar la función f que es continua en el intervalo $[-5, 5]$ y para la cual

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 4.$$

Evaluar cada integral.

a) $\int_0^5 [f(x) + 2]\,dx$

b) $\int_{-2}^3 f(x + 2)\,dx$

c) $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es par)

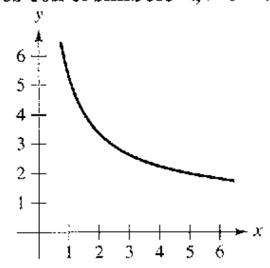
d) $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es impar)

50. ***Para pensar*** Una función f se define como se indica a continuación. Emplear fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^8 f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}$$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 51 y 52, utilizar la figura para llenar los espacios con el símbolo <, > o =.



51. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal izquierdo del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad \int_1^5 f(x)\,dx$$

52. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad \int_1^5 f(x)\,dx$$

53. Determinar si la función $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ es integrable en el intervalo $[3, 5]$. Explicar.

54. Proporcionar un ejemplo de una función que sea integrable en el intervalo $[-1, 1]$, pero no continua en $[-1, 1]$.

En los ejercicios 55 a 58, determinar cuáles valores se aproximan mejor a la integral definida. Realizar la selección con base en un dibujo.

55. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

a) 5 b) −3 c) 10 d) 2 e) 8

56. $\int_0^{1/2} 4 \cos \pi x\,dx$

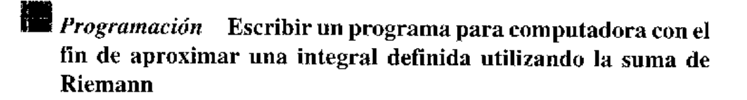
a) 4 b) $\frac{4}{3}$ c) 16 d) 2π e) −6

57. $\int_0^1 2 \operatorname{sen} \pi x\,dx$

a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) 4 d) $\frac{5}{4}$

58. $\int_0^9 \left(1 + \sqrt{x}\right) dx$

a) −3 b) 9 c) 27 d) 3



Programación **Escribir un programa para computadora con el fin de aproximar una integral definida utilizando la suma de Riemann**

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

donde los subintervalos sean de igual ancho. La salida debe proporcionar tres aproximaciones de la integral donde c_i es el punto terminal del lado izquierdo $I(n)$, el punto medio $M(n)$, y el punto terminal del lado derecho $D(n)$ de cada subintervalo. En los ejercicios 59 a 62, usar el programa para aproximar la integral definida y completar la tabla.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$					
$M(n)$					
$R(n)$					

59. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{x^2+1}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^3 x \operatorname{sen} x\,dx$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 68, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

63. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

64. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$

65. Si la norma de una partición tiende a cero, entonces el número de subintervalos tiende a infinito.

66. Si f es creciente en $[a, b]$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

67. El valor de

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

debe ser positivo.

68. El valor de

$$\int_2^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

es cero.

69. Encontrar la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 + 3x$$

en el intervalo $[0, 8]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, y donde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$ y $c_4 = 8$.

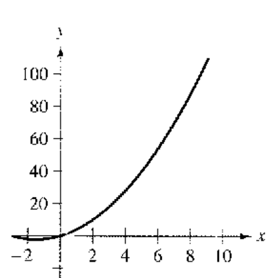


Figura para 69

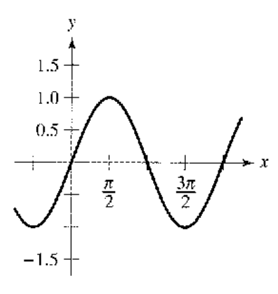


Figura para 70

70. Determinar la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi$ y $x_4 = 2\pi$, y donde $c_1 = \pi/6$, $c_2 = \pi/3$, $c_3 = 2\pi/3$ y $c_4 = 3\pi/2$.

71. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

72. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

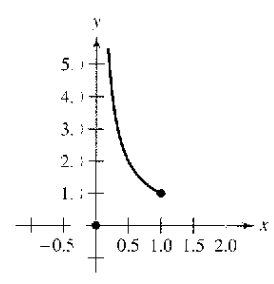
73. ***Para pensar*** Determinar si la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Explicar.

74. Suponer que la función f se define en $[0, 1]$, como se muestra en la figura.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$



Demostrar que $\int_0^1 f(x)dx$ no existe. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema 4.4?

75. Encontrar las constantes a y b que maximizan el valor de

$$\int_a^b (1 - x^2)\,dx.$$

Explicar el razonamiento.

76. Evaluar, si es posible, la integral $\displaystyle\int_0^2 [\![x]\!]\,dx$.

77. Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2]$$

utilizando una suma de Riemann apropiada.

Sección 4.4 El teorema fundamental del cálculo

- **Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del valor medio para integrales.**
- **Encontrar el valor medio de una función sobre un intervalo cerrado.**
- **Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.**

El teorema fundamental del cálculo

Se han visto ya dos de las principales ramas del cálculo: el cálculo diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el cálculo integral (el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fue descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo**.

De manera informal, el teorema establece que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, considerar las aproximaciones que se muestran en la figura 4.27. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el *cociente* $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió utilizando el *producto* $\Delta y \Delta x$ (el área de un rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa.

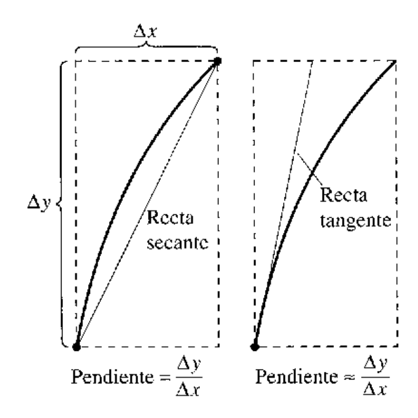
EXPLORACIÓN

Integración y antiderivación
A lo largo de este capítulo, se ha estado utilizado el signo de integral para denotar una antiderivada o primitiva (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

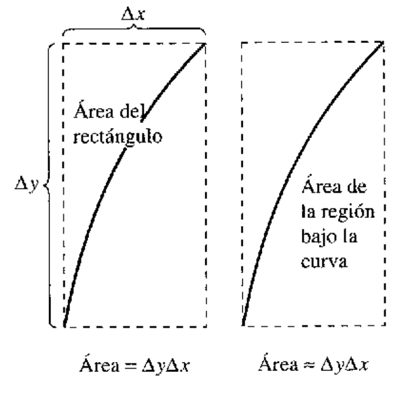
Antiderivación: $\int f(x)\,dx$

Integración definida: $\int_a^b f(x)\,dx$

El uso de este mismo símbolo para ambas operaciones hace parecer que estarán relacionadas. En los primeros trabajos con cálculo, sin embargo, no se sabía que las dos operaciones estaban relacionadas. ¿A qué se aplicó primero el símbolo $\int$: a la antiderivación o a la integración definida? Explicar el razonamiento. (*Sugerencia:* el símbolo fue utilizado primero por Leibniz y proviene de la letra *S*.)



a) Derivación



b) Integración definida

La derivación y la integración definida tienen una relación "inversa"
Figura 4.27

TEOREMA 4.9 El teorema fundamental del cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdot \cdot \cdot - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta importante ecuación indica que al aplicar el teorema del valor medio siempre es posible encontrar una colección de c_i tal que la *constante* $F(b) - F(a)$ es una suma de Reimann de f en $[a, b]$. Tomando el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

La siguiente guía puede ayudar a comprender el uso del teorema fundamental del cálculo.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= F(x) \Big]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\, dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \Big[F(x) + C\Big]_a^b \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

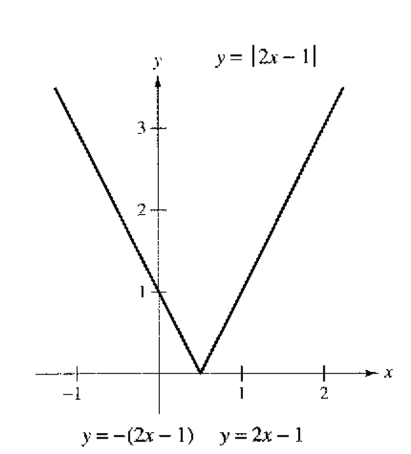
a) $\int_1^2 (x^2 - 3)\, dx$ *b)* $\int_1^4 3\sqrt{x}\, dx$ *c)* $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$

Solución

a) $\int_1^2 (x^2 - 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$

b) $\int_1^4 3\sqrt{x}\, dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\, dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$

c) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$



La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$
Figura 4.28

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto

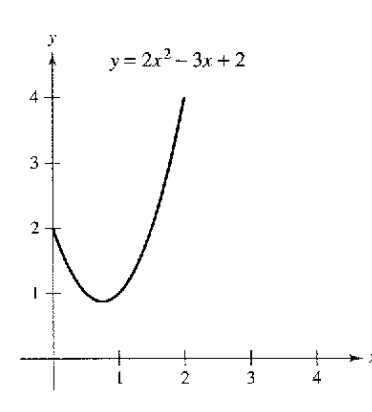
Calcular $\int_0^2 |2x - 1|\, dx$.

Solución Utilizando la figura 4.28 y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned} \int_0^2 |2x - 1|\, dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\, dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\, dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.29

EJEMPLO 3 Empleo del teorema fundamental para encontrar un área

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.29.

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\, dx \quad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2.$$

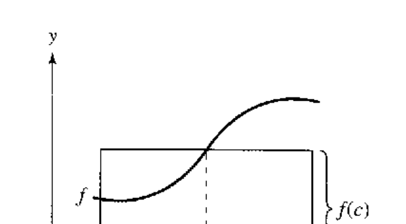
$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \quad \text{Encontrar la antiderivada.}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \quad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$

$$= \frac{10}{3} \quad \text{Simplificar.}$$

El teorema del valor medio para integrales

En la sección 4.2, se vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscrito y circunscrito hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 4.30.



Rectángulo de valor medio:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Figura 4.30

> **TEOREMA 4.10 Teorema del valor medio para integrales**
>
> Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Demostración

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Como $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ para todo x en $[a, b]$, se puede aplicar el teorema 4.8 para escribir

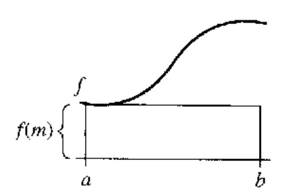
$$\int_a^b f(m)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(M)\,dx \qquad \text{Véase figura 4.31.}$$

$$f(m)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(M)(b-a)$$

$$f(m) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(M)$$

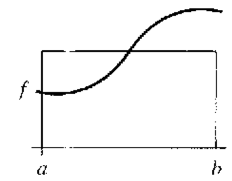
De acuerdo con la tercera desigualdad, puede aplicarse el teorema del valor medio para concluir que existe alguna c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



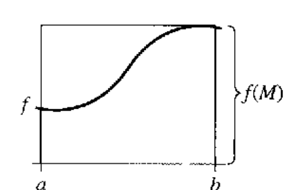
Rectángulo inscrito (menor que el área real)

$$\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$$



Rectángulo del valor medio (igual al área real)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



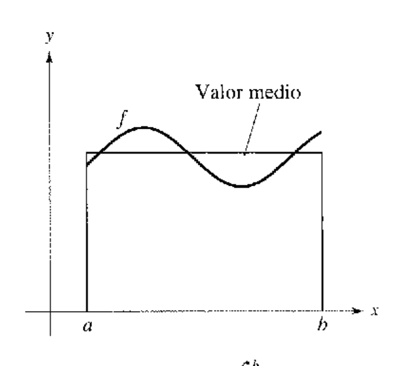
Rectángulo circunscrito (mayor que el área real)

$$\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$$

Figura 4.31

NOTA Adviértase que el teorema 4.10 no especifica cómo determinar c. Sólo garantiza la existencia de al menos un número c en el intervalo.

Valor medio de una función



Valor medio $= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Figura 4.32

El valor de $f(c)$ dado en el teorema del valor medio para integrales recibe el nombre de **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.

> **Definición del valor medio de una función en un intervalo**
>
> Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es
>
> $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

NOTA Obsérvese en la figura 4.32 que el área de la región bajo la gráfica f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, supóngase que se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x = (b-a)/n$. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dado por

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdot\cdot\cdot + f(c_n)]. \qquad \text{Porcentaje de } f(c_1), \ldots, f(c_n).$$

Al multiplicar y dividir entre $(b-a)$, puede escribirse la media como

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x.$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es sólo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma. En el capítulo 7, se estudiarán otras aplicaciones, tales como volumen, longitud de arco, centros de masa y trabajo.

EJEMPLO 4 Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución El valor medio está dado por

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\Big[x^3 - x^2\Big]_1^4$$
$$= \frac{1}{3}[64 - 16 - (1 - 1)] = \frac{48}{3} = 16.$$

(Ver figura 4.33.)

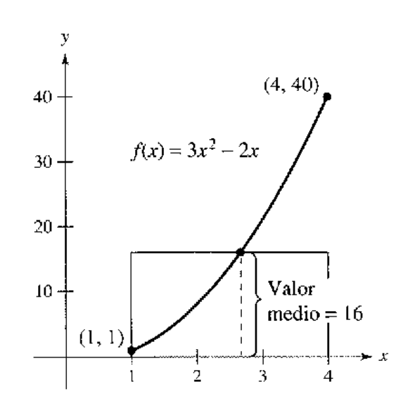
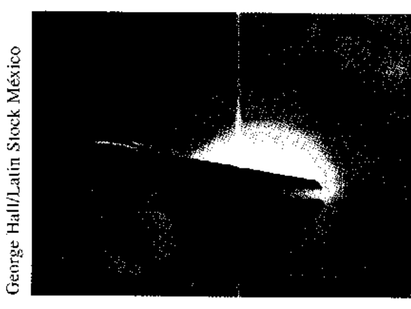


Figura 4.33



La primera persona en volar a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, volando en un avión Rocket *X-1* a una altura de 12.2 kilómetros, Yeager alcanzó 295.9 metros por segundo. Si Yeager hubiera volado a una altura menor a 11.275 kilómetros, su velocidad de 295.9 metros por segundo no hubiera "roto la barrera del sonido". La foto muestra un *Tomcat* F-14, un avión bimotor supersónico. Normalmente, el *Tomcat* puede alcanzar alturas de 15.24 km y velocidades que superan en más del doble la velocidad del sonido (707.78 m/s).

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a diferentes velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \le x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \le x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \le x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \le x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \le x \le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver figura 4.34). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]?

Solución Se empieza con la integración $s(x)$ en el intervalo [0, 80]. Para hacer esto, se puede dividir la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11.5} s(x)\,dx = \int_0^{11.5} (-4x + 341)\,dx = \Big[-2x^2 + 341x\Big]_0^{11.5} = 3\,657$$

$$\int_{11.5}^{22} s(x)\,dx = \int_{11.5}^{22} (295)\,dx = \Big[295x\Big]_{11.5}^{22} = 3097.5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)\,dx = \int_{22}^{32} \left(\tfrac{3}{4}x + 278.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{8}x^2 + 278.5x\Big]_{22}^{32} = 2\,987.5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)\,dx = \int_{32}^{50} \left(\tfrac{3}{2}x + 254.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{4}x^2 + 254.5x\Big]_{32}^{50} = 5\,688$$

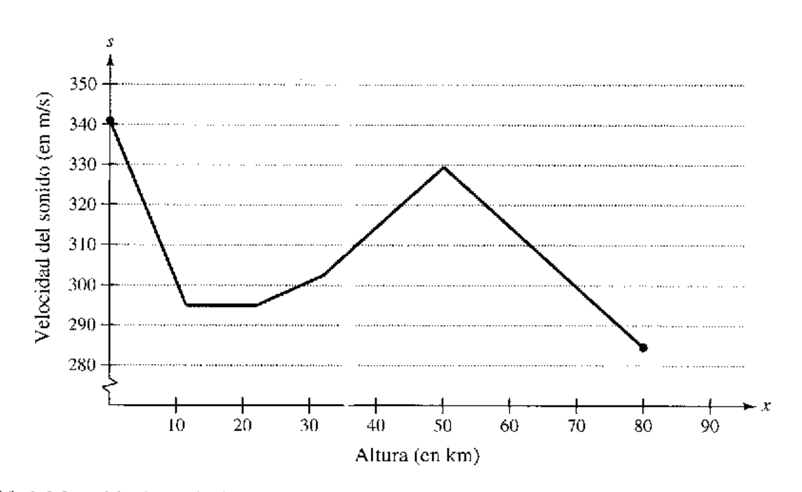
$$\int_{50}^{80} s(x)\,dx = \int_{50}^{80} \left(-\tfrac{3}{2}x + 404.5\right)dx = \Big[-\tfrac{3}{4}x^2 + 404.5x\Big]_{50}^{80} = 9\,210$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene

$$\int_0^{80} s(x)\,dx = 24\,640.$$

De tal modo, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)\,dx = \frac{24\,640}{80} = 308 \text{ metros por segundo}$$

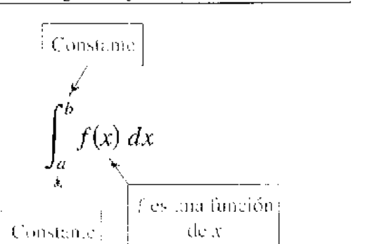


La velocidad del sonido depende de la altura
Figura 4.34

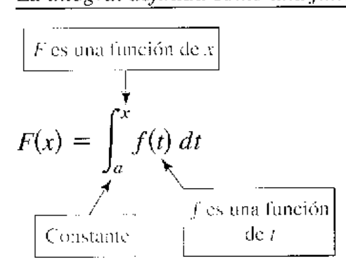
El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de integración b y x como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable x se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar x de dos maneras diferentes, se usa temporalmente t como la variable de integración. (Recordar que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número



La integral definida como una función de x



EXPLORACIÓN

Emplear una computadora para hacer la gráfica de la función

$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

para $0 \le x \le \pi$. ¿Reconoce esta gráfica? Explicar.

EJEMPLO 6 La integral definida como función

Calcular la función

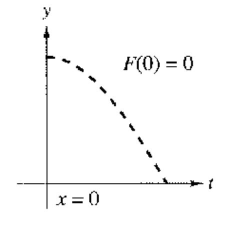
$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

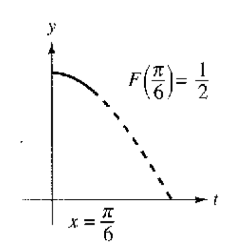
en $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$.

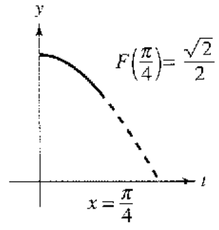
Solución Se podrían calcular cinco integrales definidas diferentes, una para cada uno de los límites superiores dados. Sin embargo, es mucho más simple fijar x (como una constante) por el momento para obtener

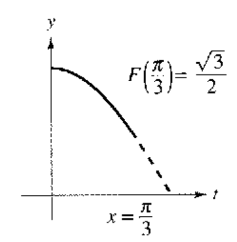
$$\int_0^x \cos t\,dt = \text{sen}\,t\Big]_0^x = \text{sen}\,x - \text{sen}\,0 = \text{sen}\,x.$$

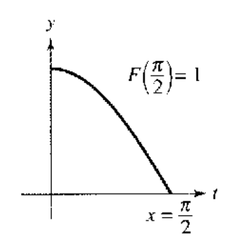
Después de esto, utilizando $F(x) = \text{sen}\,x$, es posible obtener los resultados que se muestran en la figura 4.35.











$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde 0 hasta x

Figura 4.35

Podría considerarse la función $F(x)$ como la *acumulación* del área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = x$. Para $x = 0$, el área es 0 y $F(0) = 0$. Para $x = \pi/2$, $F(\pi/2) = 1$ produce el área acumulada bajo la curva coseno del intervalo completo $[0, \pi/2]$. Esta interpretación de una integral como una **función acumulación** se usa a menudo en aplicaciones de la integración.

En el ejemplo 6, advertir que la derivada de F es el integrando original (sólo que con la variable cambiada). Esto es,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t\, dt\right] = \cos x.$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, denominado el **segundo teorema fundamental del cálculo.**

TEOREMA 4.11 El segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x).$$

Demostración Empezar definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

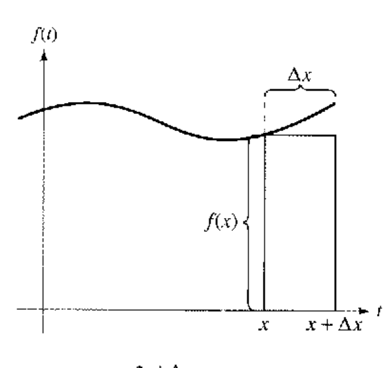
Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\right].
\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), se sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \le c \le x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. De tal modo, se obtiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Es posible plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$.



$f(x)\,\Delta x \approx \displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$

Figura 4.36

NOTA Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considerar la aproximación

$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

se dice que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, como se muestra en la figura 4.36.

Notar que el segundo teorema del cálculo indica que toda f continua admite una antiderivada o primitiva. Sin embargo, ésta no necesita ser una función elemental. (Recordar la discusión de las funciones elementales en la sección P.3.)

EJEMPLO 7 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Calcular $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$.

Solución Advertir que $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. De tal modo, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible escribir

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}.$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Encontrar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt$.

Solución Haciendo $u = x^3$, es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena.}\\
&= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx} && \text{Definición de } \frac{dF}{du}.\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt \text{ por } F(x).\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } u \text{ por } x^3.\\
&= (\cos u)(3x^2) && \text{Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.}\\
&= (\cos x^3)(3x^2) && \text{Reescribir como función de } x.
\end{aligned}$$

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, se puede verificar la derivada del modo siguiente.

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_{\pi/2}^{x^3} = \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

En esta forma, se tiene la posibilidad de aplicar la regla de las potencias para verificar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Ejercicios de la sección 4.4

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, utilizar una computadora para hacer la gráfica del integrando. Emplear la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.**

1. $\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1}\, dx$ **2.** $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

3. $\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+1}\, dx$ **4.** $\int_{-2}^{2} x\sqrt{2-x}\, dx$

En los ejercicios 5 a 26, hallar la integral definida de la función algebraica. Utilizar una computadora para verificar el resultado.

5. $\int_0^1 2x\, dx$ **6.** $\int_2^7 3\, dv$

7. $\int_{-1}^{0} (x-2)\, dx$ **8.** $\int_2^5 (-3v+4)\, dv$

9. $\int_{-1}^{1} (t^2-2)\, dt$ **10.** $\int_1^3 (3x^2+5x-4)\, dx$

11. $\int_0^1 (2t-1)^2\, dt$ **12.** $\int_{-1}^{1} (t^3-9t)\, dt$

13. $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-1\right) dx$ **14.** $\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right) du$

15. $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}}\, du$ **16.** $\int_{-3}^{3} v^{1/3}\, dv$

17. $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{t}-2\right) dt$ **18.** $\int_1^8 \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx$

19. $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3}\, dx$ **20.** $\int_0^2 (2-t)\sqrt{t}\, dt$

21. $\int_{-1}^{0} \left(t^{1/3}-t^{2/3}\right) dt$ **22.** $\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\, dx$

23. $\int_0^3 |2x-3|\, dx$ **24.** $\int_1^4 (3-|x-3|)\, dx$

25. $\int_0^3 |x^2-4|\, dx$ **26.** $\int_0^4 |x^2-4x+3|\, dx$

En los ejercicios 27 a 32, hallar la integral definida de la función trigonométrica. Emplear una computadora para verificar el resultado.

27. $\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\, dx$

28. $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

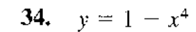
29. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x\, dx$

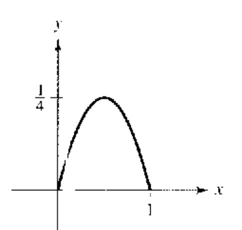
30. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\csc^2 x)\, dx$

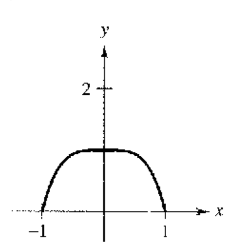
31. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

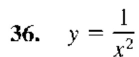
32. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t)\, dt$

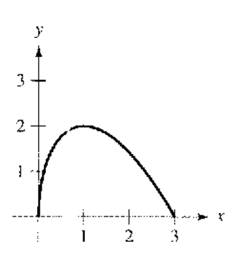
En los ejercicios 33 a 38, determinar el área de la región indicada.

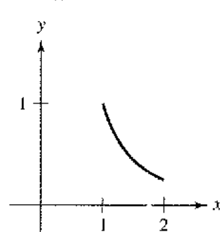
33. $y = x - x^2$ 
34. $y = 1 - x^4$

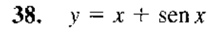


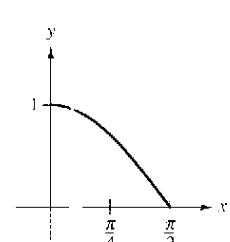


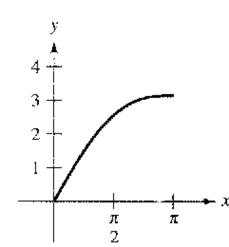
35. $y = (3 - x)\sqrt{x}$ 
36. $y = \frac{1}{x^2}$





37. $y = \cos x$ 
38. $y = x + \operatorname{sen} x$





En los ejercicios 39 a 42, encontrar el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $y = 3x^2 + 1,\quad x = 0,\quad x = 2,\quad y = 0$

40. $y = 1 + \sqrt[3]{x},\quad x = 0,\quad x = 8,\quad y = 0$

41. $y = x^3 + x,\quad x = 2,\quad y = 0$ **42.** $y = -x^2 + 3x,\quad y = 0$

En los ejercicios 43 a 46, determinar el (los) valor(es) de *c* cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo indicado.

43. $f(x) = x - 2\sqrt{x},\quad [0, 2]$ **44.** $f(x) = \frac{9}{x^3},\quad [1, 3]$

45. $f(x) = 2\sec^2 x,\quad [-\pi/4, \pi/4]$

46. $f(x) = \cos x,\quad [-\pi/3, \pi/3]$

En los ejercicios 47 a 50, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado y todos los valores de *x* en el intervalo para los cuales la función sea igual a su valor promedio.

47. $f(x) = 4 - x^2,\quad [-2, 2]$ **48.** $f(x) = \frac{4(x^2+1)}{x^2},\quad [1, 3]$

49. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad [0, \pi]$ **50.** $f(x) = \cos x,\quad [0, \pi/2]$

51. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el reposo. Emplear la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en 8 segundos.

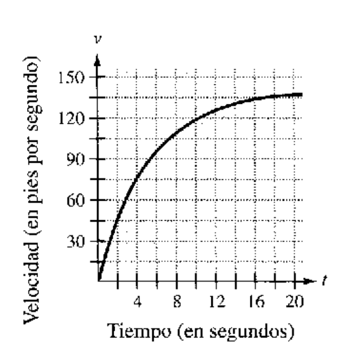


Figura para 51

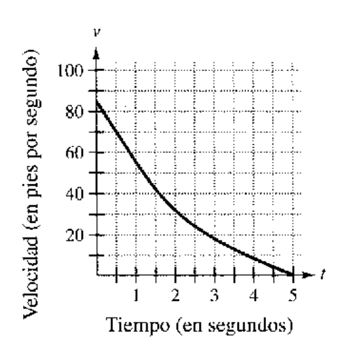


Figura para 52

52. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad de un automóvil tan pronto como el conductor aplica los frenos. Emplear la gráfica para estimar qué distancia recorre el auto antes de detenerse.

Desarrollo de conceptos

53. Enunciar el teorema fundamental del cálculo.

54. La gráfica de f se muestra en la figura.

   a) Calcular $\int_1^7 f(x)dx$

   b) Determinar el valor medio de f en el intervalo $[1, 7]$.

   c) Determinar las respuestas a los apartados *a*) y *b*) si la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba.

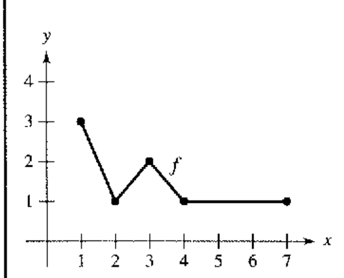


Figura para 54

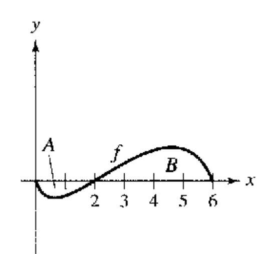


Figura para 55 a 60

En los ejercicios 55 a 60, utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura. La región sombreada A tiene un área de 1.5, y $\int_0^6 f(x)dx = 3.5$. Utilizar esta información para completar lo que falta.

55. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx =$

56. $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx =$

57. $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|\,dx =$

58. $\displaystyle\int_0^2 -2f(x)\,dx =$

59. $\displaystyle\int_0^6 [2 + f(x)]\,dx =$

60. El valor medio de f sobre el intervalo $[0, 6]$ es .

61. ***Fuerza*** La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de $\sec x$, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$, y $F(0) = 500$.

   a) Encontrar F como una función de x.

   b) Determinar la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

62. ***Flujo sanguíneo*** La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es

$$v = k(R^2 - r^2)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Determinar el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de la arteria. (Usar 0 y R como los límites de integración.)

63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo

$$V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$$

donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Ventas medias*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

   a) Utilizar una computadora para hacer la gráfica $f(t) = 0.5\,\text{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

   b) Recurrir a una computadora para hacer la gráfica $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a*) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelo matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

   a) Emplear una computadora para determinar un modelo de la forma $v = at^3 = bt^2 + ct + d$ para los datos.

   b) Utilizar una computadora para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.

   c) Emplear el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

66. ***Modelo matemático*** Un gerente de un almacén desea estimar el número de clientes que entran en la tienda desde la tarde hasta la hora de cierre a las 9 p.m. La tabla muestra el número de clientes N que entra a la tienda durante un minuto elegido al azar cada hora desde $t-1$ hasta t, con $t=0$ correspondiente a la tarde.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	6	7	9	12	15	14	11	7	2

a) Dibujar un histograma de los datos.
b) Estimar el número total de clientes que entran en la tienda entre la tarde y las 9 p.m.
c) Utilizar las capacidades de regresión de una computadora para determinar un modelo de la forma $N(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.
d) Recurrir a una computadora para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.
e) Utilizar una computadora para evaluar $\int_0^9 N(t)dt$ y usar el resultado para estimar el número de clientes que entran a la tienda entre la tarde y las 9 p.m. Comparar esto con la respuesta en el apartado *b*).
f) Estimar el número medio de clientes que entran en la tienda por minuto entre las 3 p.m. y las 7 p.m.

En los ejercicios 67 a 72, encontrar F como una función de x y calcularla en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

67. $F(x) = \int_0^x (t-5)\,dt$ **68.** $F(x) = \int_2^x (t^3 + 2t - 2)\,dt$

69. $F(x) = \int_1^x \frac{10}{v^2}\,dv$ **70.** $F(x) = \int_2^x -\frac{2}{t^3}\,dt$

71. $F(x) = \int_1^x \cos\theta\,d\theta$ **72.** $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

73. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Determinar el intervalo abierto más grande en el cual g está creciendo. Encontrar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

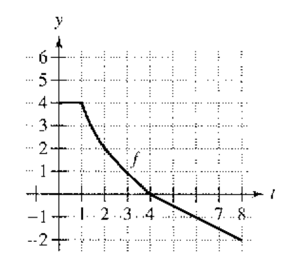


Figura para 73

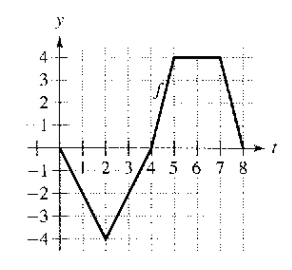


Figura para 74

74. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es una función cuya gráfica se muestra.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Encontrar el intervalo abierto más grande en el cual g esté creciendo. Determinar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

En los ejercicios 75 a 80, *a*) integrar para determinar F como una función de x y *b*) demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo derivando el resultado del apartado *a*).

75. $F(x) = \int_0^x (t+2)\,dt$ **76.** $F(x) = \int_0^x t(t^2+1)\,dt$

77. $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t}\,dt$ **78.** $F(x) = \int_4^x \sqrt{t}\,dt$

79. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec^2 t\,dt$ **80.** $F(x) = \int_{\pi/3}^x \sec t\tan t\,dt$

En los ejercicios 81 a 86, utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

81. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t)\,dt$ **82.** $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$

83. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^4+1}\,dt$ **84.** $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t}\,dt$

85. $F(x) = \int_0^x t\cos t\,dt$ **86.** $F(x) = \int_0^x \sec^3 t\,dt$

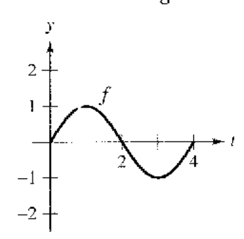
En los ejercicios 87 a 92, encontrar $F'(x)$.

87. $F(x) = \int_x^{x+2} (4t+1)\,dt$ **88.** $F(x) = \int_{-x}^x t^3\,dt$

89. $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t}\,dt$ **90.** $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t^3}\,dt$

91. $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen} t^2\,dt$ **92.** $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta$

93. ***Análisis gráfico*** Aproximar la gráfica de g en el intervalo $0 \le x \le 4$, donde $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Identificar la coordenada x de un extremo de g.



94. Utilizar la gráfica de la función f que se muestra en la figura de la siguiente página y la función g definida por $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Completar la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$										

b) Dibujar los puntos de la tabla en el apartado *a* y graficar g.
c) ¿Dónde tiene g un mínimo? Explicar.

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar *directamente* el teorema 4.12, reconociendo la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$. Notar que la función compuesta en el integrando tiene una *función exterior* f y una *función interior* g. Además, la derivada $g'(x)$ está presente como un factor del integrando.

Función exterior

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Función interior

Derivada de la función interior

EJEMPLO 1 Reconocimiento del modelo de $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int (x^2 + 1)^2(2x)\,dx$.

Solución Tomando $g(x) = x^2 + 1$, se obtiene

$$g'(x) = 2x$$

y

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla de las potencias para la integración y el teorema 4.12, es posible escribir

$$\int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{f(g(x))}\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C.$$

Es fácil comprobar, mediante la regla de la cadena, que la derivada de $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ es, en efecto, el integrando de la integral original.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico computarizado, tal como *Maple, Derive, Mathematica, Mathcad* o *TI-89*, para resolver las integrales dadas en los ejemplos 1 y 2. ¿Se obtienen las mismas antiderivadas o primitivas que las que se citan en los ejemplos?

EJEMPLO 2 Reconocimiento del modelo $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int 5 \cos 5x\,dx$.

Solución Tomando $g(x) = 5x$, se obtiene

$$g'(x) = 5$$

y

$$f(g(x)) = f(5x) = \cos 5x.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla del coseno para la integración y el teorema 4.12, puede escribirse

$$\int \overbrace{(\cos 5x)}^{f(g(x))}\overbrace{(5)}^{g'(x)}\,dx = \operatorname{sen} 5x + C.$$

Lo anterior se verifica derivando sen $5x + C$ para obtener el integrando original.

Los integrandos en los ejemplos 1 y 2 corresponden exactamente al patrón $f(g(x))g'(x)$ (sólo se tiene que reconocer el patrón). Es posible extender esta técnica de manera considerable utilizando la regla del múltiplo constante.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Muchos integrandos contienen la parte esencial (la parte variable) de $g'(x)$, aunque está faltando un múltiplo constante. En tales casos, es posible multiplicar y dividir por el múltiplo constante necesario, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir por una constante

Determinar $\int x(x^2+1)^2\,dx$.

Solución Esto es similar a la integral dada en el ejemplo 1, salvo porque al integrando le falta un factor 2. Al reconocer que $2x$ es la derivada de x^2+1, se toma $g(x) = x^2+1$ y se incluye el término $2x$ de la manera siguiente.

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \int (x^2+1)^2\left(\frac{1}{2}\right)(2x)\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 2.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2+1)^2}^{f(g(x))}\,\overbrace{(2x)}^{g'}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right] + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C \qquad \text{Simplificar.}$$

En la práctica, la mayoría de la gente no escribiría tantos pasos como los que se muestran en el ejemplo 3. Por ejemplo, podría calcularse la integral escribiendo simplemente

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^2\,2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C.$$

NOTA Asegurarse de ver que *la regla del múltiplo constante* se aplica sólo a *constantes*. No se puede multiplicar y dividir por una variable y después mover la variable fuera del signo integral. Por ejemplo,

$$\int (x^2+1)^2\,dx \neq \frac{1}{2x}\int (x^2+1)^2(2x)\,dx.$$

Después de todo, si fuera legítimo mover cantidades variables fuera del signo de la integral, se podría sacar el integrando completo y simplificar el proceso completo. Sin embargo, el resultado sería incorrecto.

Cambio de variables

Con un **cambio de variables** formal se puede reescribir por completo la integral en términos de u y du (o cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede implicar más pasos escritos que el reconocimiento de patrones ilustrado en los ejemplos 1 a 3, resulta útil para integrandos complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Esto es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$, y la integral en el teorema 4.12 toma la forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C.$$

EJEMPLO 4 Cambio de variable

Encontrar $\int \sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Primero, sea u la función interior, $u = 2x - 1$. Calcular después la diferencial du de manera que $du = 2\,dx$. Ahora, utilizando $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}$ y $dx = du/2$, sustituir para obtener

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x-1}\,dx &= \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) && \text{Integrar en términos de } u.\\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C && \text{Antiderivada en términos de } u.\\
&= \frac{1}{3}u^{3/2} + C && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C. && \text{Antiderivada en términos de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Como la integración suele ser más difícil que la derivación, verificar la respuesta en un problema de integración mediante la derivación. Así, en el ejemplo 4 debe derivarse $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$ para verificar que se obtiene el integrando original.

EJEMPLO 5 Cambio de variables

Encontrar $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x, se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra.

$$u = 2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = (u+1)/2 \qquad \text{Resolver para } x \text{ en términos de } u.$$

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{u+1}{2}\right)u^{1/2}\left(\frac{du}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C\\
&= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Para completar el cambio de variable en el ejemplo 5, debe resolverse para x en términos de u. Algunas veces esto es muy difícil. Por fortuna no siempre es necesario, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Cambio de variables

Determinar $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx$.

Solución Debido a que $\operatorname{sen}^2 3x = (\operatorname{sen} 3x)^2$, podemos tomar $u = \operatorname{sen} 3x$. Entonces

$$du = (\cos 3x)(3)\, dx.$$

Luego, debido a que $\cos 3x \, dx$ es parte de la integral original, puede escribirse

$$\frac{du}{3} = \cos 3x \, dx.$$

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx &= \int u^2 \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3}\int u^2\, du \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C \\ &= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se realiza un cambio de variable, cerciorarse de que la respuesta se escribe utilizando las mismas variables que en el integrando original. Así, en el ejemplo 6, no debe dejar la respuesta como

$$\frac{1}{9}u^3 + C$$

sino más bien, reemplazar u por $\operatorname{sen} 3x$.

Es posible verificar lo anterior derivando.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x\right] &= \left(\frac{1}{9}\right)(3)(\operatorname{sen} 3x)^2(\cos 3x)(3) \\ &= \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\end{aligned}$$

Como la derivación produce el integrando original, se ha obtenido la antiderivada o primitiva correcta.

Los pasos que se utilizan para la integración por sustitución se resumen en la siguiente guía.

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte *interna* de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$.
3. Reescribir la integral en términos de la variable u.
4. Encontrar la integral resultante en términos de u.
5. Reemplazar u por $g(x)$ para obtener una antiderivada o primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

La regla general de las potencias para integrales

Una de las sustituciones de u más comunes incluye cantidades en el integrando que se elevan a una potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución, se le da un nombre especial: la **regla general de las potencias para integrales**. Una prueba de esta regla sigue directamente de la regla (simple) de las potencias para la integración, junto con el teorema 4.12.

TEOREMA 4.13 La regla general de las potencias para integrales

Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 7 Sustitución y regla general de las potencias

a) $$\int 3(3x-1)^4\, dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4}\overbrace{(3)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(3x-1)^5}{5}}^{u^5/5} + C$$

b) $$\int (2x+1)(x^2+x)\, dx = \int \overbrace{(x^2+x)^1}^{u^1}\overbrace{(2x+1)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} + C$$

c) $$\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\, dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}}\overbrace{(3x^2)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C = \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$$

d) $$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\, dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}}\overbrace{(-4x)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$$

e) $$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2}\overbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}^{du} = -\overbrace{\frac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$$

Suponer que se pide encontrar una de las siguientes integrales. ¿Cuál elegiría? Explicar la respuesta.

a) $\int \sqrt{x^3+1}\, dx$ o

$\int x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$

b) $\int \tan(3x)\sec^2(3x)\, dx$ o

$\int \tan(3x)\, dx$

Algunas integrales cuyos integrandos incluyen cantidades elevadas a potencias no pueden determinarse mediante la regla general de las potencias. Considerar las dos integrales

$$\int x(x^2+1)^2\, dx \quad \text{y} \quad \int (x^2+1)^2\, dx.$$

La sustitución $u = x^2 + 1$ funciona en la primera integral pero no en la segunda. En la segunda, la sustitución falla porque al integrando le falta el factor x necesario para formar du. Por fortuna, *esta integral particular* puede hacerse desarrollando el integrando como $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ y utilizando la regla (simple) de las potencias para integrar cada término.

Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se usa la sustitución de du en una integral definida, muchas veces es conveniente determinar los límites de integración para la variable u en vez de convertir la antiderivada o primitiva de nuevo a la variable x y calcularla en los límites originales. Este cambio de variable se establece explícitamente en el siguiente teorema. La demostración sigue del teorema 4.12 en combinación con el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4.14 Cambio de variable para integrales definidas

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\,dx$.

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx.$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$.	Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$.

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + 1)^3(2x)\,dx$$

Límites de integración para x.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Límites de integración para u.

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

Intentar reescribir la antiderivada o primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable x y calcular la integral definida en los límites originales de integración, como se muestra.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 + 1)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

Notar que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 9 Cambio de variables

Calcular $A = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx.$

Solución Para calcular esta integral, considerar que $u = \sqrt{2x-1}$. Después, obtener

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x - 1 \\ u^2 + 1 &= 2x \\ \frac{u^2+1}{2} &= x \\ u\, du &= dx. \end{aligned}$$

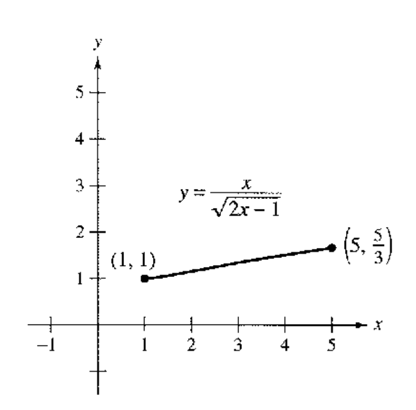
Diferenciar cada lado.

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1,\ u = \sqrt{2-1} = 1.$	Cuando $x = 5,\ u = \sqrt{10-1} = 3.$

Ahora, sustituir para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx &= \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right) u\, du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\, du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$



La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$

Figura 4.37

Geométricamente, es posible interpretar la ecuación

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_1^3 \frac{u^2+1}{2}\, du$$

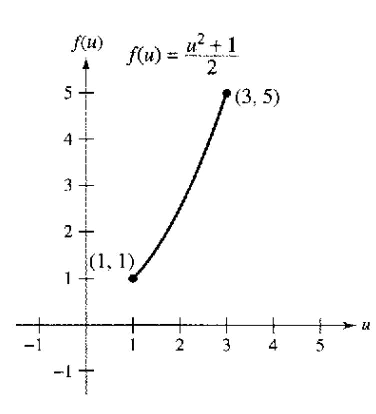
en el sentido de que las dos regiones *diferentes* que se ilustran en las figuras 4.37 y 4.38 tienen la *misma* área.

Al calcular integrales definidas por cambio de variable (sustitución), es posible que el límite superior de integración correspondiente a la nueva variable u sea más pequeño que el límite inferior. Si esto ocurre, no hay que reordenar los límites. Simplemente se calcula la integral de la manera usual. Por ejemplo, después de sustituir $u = \sqrt{1-x}$ en la integral

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{1/2}\, dx$$

se obtiene $u = \sqrt{1-1} = 0$ cuando $x = 1$, y $u = \sqrt{1-0} = 1$ cuando $x = 0$. De tal modo, la forma correcta de esta integral en la variable u es

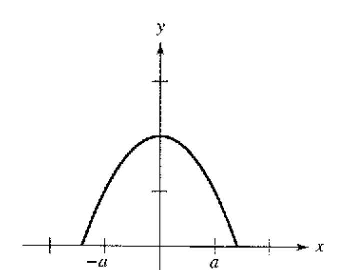
$$-2\int_1^0 (1-u^2)^2 u^2\, du.$$



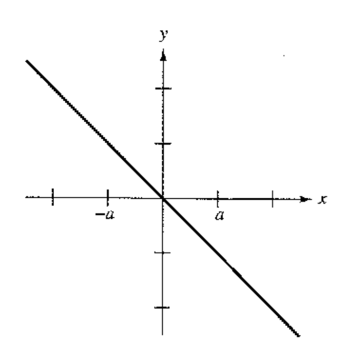
La región después de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$

Figura 4.38

Integración de funciones pares e impares



Función par



Función impar
Figura 4.39

Incluso con un cambio de variable, la integración puede ser difícil. En ocasiones se puede simplificar el cálculo de una integral definida (en un intervalo que es simétrico respecto al eje y o respecto al origen) reconociendo que el integrando es una función par o impar (ver figura 4.39).

TEOREMA 4.15 Integración de funciones pares e impares

Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
2. Si f es una función *impar*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demostración Como f es par, se sabe que $f(x) = f(-x)$. Utilizando el teorema 4.12 con la sustitución $u = -x$, se obtiene

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Por último, utilizando el teorema 4.6, se llega a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera propiedad. La demostración de la segunda propiedad se deja al lector (ver el ejercicio 133).

EJEMPLO 10 Integración de una función impar

Calcular $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx$.

Solución Haciendo $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$ se obtiene

$$\begin{aligned}f(-x) &= \operatorname{sen}^3(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)\cos(-x)\\ &= -\operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -f(x).\end{aligned}$$

De tal modo, f es una función impar, y debido a que f es simétrica respecto al origen en $[-\pi/2, \pi/2]$, es posible aplicar el teorema 4.15 para concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx = 0.$$

$f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$

Como f es una función impar,
$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$
Figura 4.40

NOTA De acuerdo con la figura 4.40 puede verse que las dos regiones a cualquier lado del eje tienen la misma área. Sin embargo, como una se encuentra por debajo del eje x y otra está por encima del mismo, la integración produce un efecto de cancelación. (Se verá más al respecto en la sección 7.1.)

Ejercicios de la sección 4.5

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla identificando u y du para la integral.

$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1. $\int (5x^2+1)^2(10x)\,dx$		
2. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$		
3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$		
4. $\int \sec 2x \tan 2x\,dx$		
5. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$		
6. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$		

En los ejercicios 7 a 34, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

7. $\int (1+2x)^4(2)\,dx$
8. $\int (x^2-9)^3(2x)\,dx$
9. $\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)\,dx$
10. $\int \sqrt[3]{(1-2x^2)}(-4x)\,dx$
11. $\int x^3(x^4+3)^2\,dx$
12. $\int x^2(x^3+5)^4\,dx$
13. $\int x^2(x^3-1)^4\,dx$
14. $\int x(4x^2+3)^3\,dx$
15. $\int t\sqrt{t^2+2}\,dt$
16. $\int t^3\sqrt{t^4+5}\,dt$
17. $\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$
18. $\int u^2\sqrt{u^3+2}\,du$
19. $\int \frac{x}{(1-x^2)^3}\,dx$
20. $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$
21. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$
22. $\int \frac{x^2}{(16-x^3)^2}\,dx$
23. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$
25. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$
26. $\int \left[x^2+\frac{1}{(3x)^2}\right]dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx$
28. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$
29. $\int \frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}\,dx$
30. $\int \frac{t+2t^2}{\sqrt{t}}\,dt$
31. $\int t^2\left(t-\frac{2}{t}\right)dt$
30. $\int \left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4t^2}\right)dt$
33. $\int (9-y)\sqrt{y}\,dy$
34. $\int 2\pi y(8-y^{3/2})\,dy$

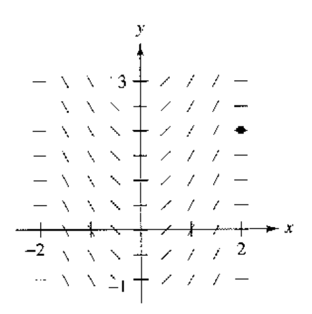
En los ejercicios 35 a 38, resolver la ecuación diferencial.

35. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$
36. $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}$
37. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$
38. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$

■ ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 39 a 42, se indican una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* consiste en segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto dado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar la computadora para graficar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

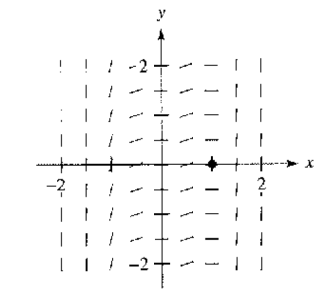
39. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{4-x^2}$

$(2, 2)$



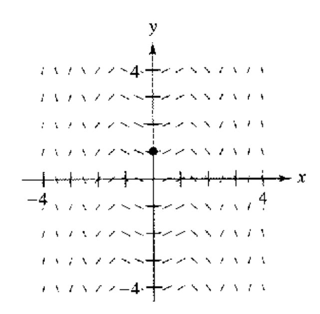
40. $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3-1)^2$

$(1, 0)$



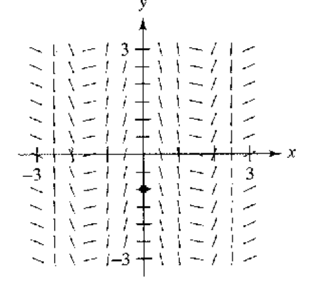
41. $\frac{dy}{dx} = x\cos x^2$

$(0, 1)$



42. $\frac{dy}{dx} = -2\sec(2x)\tan(2x)$

$(0, -1)$



En los ejercicios 43 a 56, encontrar la integral indefinida.

43. $\int \pi \operatorname{sen} \pi x \, dx$ **44.** $\int 4x^3 \operatorname{sen} x^4 \, dx$

45. $\int \operatorname{sen} 2x \, dx$ **46.** $\int \cos 6x \, dx$

47. $\int \frac{1}{\theta^2} \cos \frac{1}{\theta} \, d\theta$ **48.** $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

49. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx$

50. $\int \sec(1 - x) \tan(1 - x) \, dx$

51. $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$ **52.** $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$

53. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x} \, dx$ **54.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \, dx$

55. $\int \cot^2 x \, dx$ **56.** $\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

En los ejercicios 57 a 62, encontrar una ecuación para la función *f* que tiene la derivada dada y cuya gráfica pasa por el punto indicado.

	Derivada	*Punto*
57.	$f'(x) = \cos \frac{x}{2}$	$(0, 3)$
58.	$f'(x) = \pi \sec \pi x \tan \pi x$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
59.	$f'(x) = \operatorname{sen} 4x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{3}{4}\right)$
60.	$f'(x) = \sec^2(2x)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
61.	$f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$	$(2, 10)$
62.	$f'(x) = -2x\sqrt{8 - x^2}$	$(2, 7)$

En los ejercicios 63 a 70, encontrar la integral indefinida mediante el método que se muestra en el ejemplo 5.

63. $\int x\sqrt{x + 2} \, dx$ **64.** $\int x\sqrt{2x + 1} \, dx$

65. $\int x^2\sqrt{1 - x} \, dx$ **66.** $\int (x + 1)\sqrt{2 - x} \, dx$

67. $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}} \, dx$ **68.** $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 4}} \, dx$

69. $\int \frac{-x}{(x + 1) - \sqrt{x + 1}} \, dx$ **70.** $\int t \sqrt[3]{t - 4} \, dt$

En los ejercicios 71 a 82, calcular la integral definida. Utilizar una computadora para verificar el resultado.

71. $\int_{-1}^{1} x(x^2 + 1)^3 \, dx$ **72.** $\int_{2}^{4} x^2(x^3 + 8)^2 \, dx$

73. $\int_{1}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1} \, dx$ **74.** $\int_{0}^{1} x\sqrt{1 - x^2} \, dx$

75. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \, dx$ **76.** $\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}} \, dx$

77. $\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} \, dx$ **78.** $\int_{0}^{2} x \sqrt[3]{4 + x^2} \, dx$

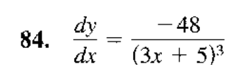
79. $\int_{1}^{2} (x - 1)\sqrt{2 - x} \, dx$ **80.** $\int_{1}^{5} \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} \, dx$

81. $\int_{0}^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

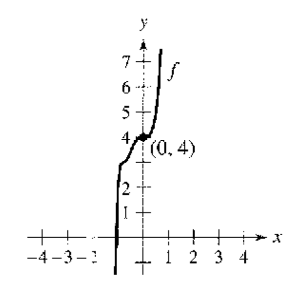
82. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + \cos x) \, dx$

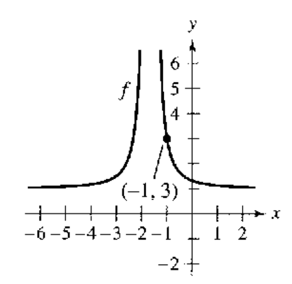
Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 83 a 86, se muestra la gráfica de una función *f*. Emplear la ecuación diferencial y el punto dado para determinar una ecuación de la función.**

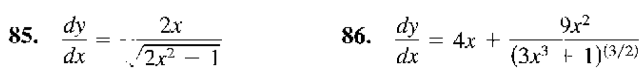
83. $\frac{dy}{dx} = 18x^2(2x^3 + 1)^2$



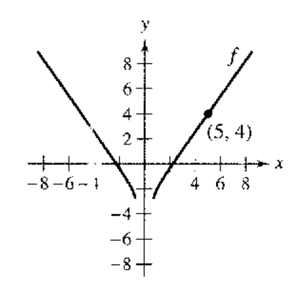
84. $\frac{dy}{dx} = \frac{-48}{(3x + 5)^3}$

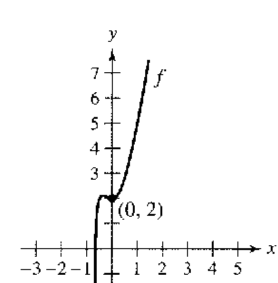






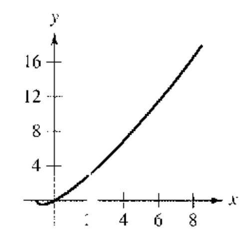
85. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$ **86.** $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{9x^2}{(3x^3 + 1)^{(3/2)}}$

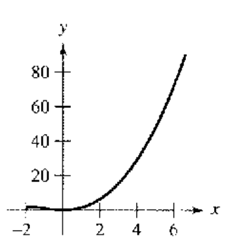




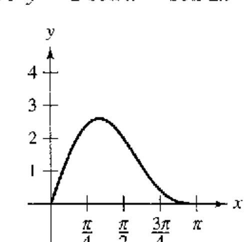
En los ejercicios 87 a 92, encontrar el área de la región. Emplear una computadora para verificar el resultado.

87. $\int_{0}^{7} x \sqrt[3]{x + 1} \, dx$ **88.** $\int_{-2}^{6} x^2 \sqrt[3]{x + 2} \, dx$

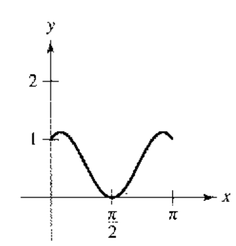




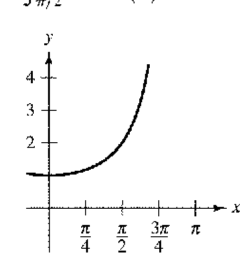
89. $y = 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x$



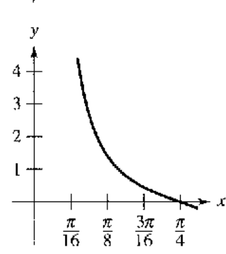
90. $y = \text{sen}\,x + \cos 2x$



91. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$



92. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x \cot 2x\, dx$



En los ejercicios 93 a 98, utilizar una computadora para evaluar la integral. Hacer la gráfica de la región cuya área está dada por la integral definida.

93. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\, dx$ **94.** $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x+2}\, dx$

95. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3}\, dx$ **96.** $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x-1}\, dx$

97. $\displaystyle\int_0^3 \left(\theta + \cos\frac{\theta}{6}\right) d\theta$ **98.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,2x\, dx$

Comentario **En los ejercicios 99 y 100, encontrar la integral indefinida en dos formas. Explicar cualquier diferencia en las formas de las respuestas.**

99. $\displaystyle\int (2x-1)^2\, dx$

100. $\displaystyle\int \text{sen}\,x \cos x\, dx$

En los ejercicios 101 a 104, calcular la integral utilizando las propiedades de las funciones pares e impares como una ayuda.

101. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2(x^2+1)\, dx$ **102.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^3\, dx$

103. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2\,x \cos x\, dx$ **104.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}\,x \cos x\, dx$

105. Emplear $\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$ para calcular cada integral definida sin utilizar el teorema fundamental del cálculo.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 -x^2\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-2}^{0} 3x^2\, dx$

106. Emplear la simetría de las gráficas de las funciones seno y coseno como ayuda para el cálculo de cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \text{sen}\,x\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}\,x \cos x\, dx$

En los ejercicios 107 y 108, escribir la integral como la suma de la integral de una función impar y la integral de una función par. Utilizar esta simplificación para calcular la integral.

107. $\displaystyle\int_{-4}^{4} (x^3 + 6x^2 - 2x - 3)\, dx$ **108.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}\,3x + \cos 3x)\, dx$

Desarrollo de conceptos

109. Describir por qué

$$\int x(5-x^2)^3\, dx \neq \int u^3\, du$$

donde $u = 5 - x^2$.

110. Sin integrar, explicar por qué

$$\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^2\, dx = 0.$$

111. ***Flujo de efectivo*** La tasa de desembolso de dQ/dt de una donación federal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de $100 - t$. El tiempo t se mide en días ($0 \leq t \leq 100$) y Q es la cantidad que queda para ser desembolsada. Determinar la cantidad que queda para desembolsarse después de 50 días. Suponer que todo el dinero se gastará en 100 días.

112. ***Depreciación*** La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $t + 1$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500 000 dólares, y su valor decreció 100 000 dólares en el primer año. Estimar su valor después de 4 años.

113. ***Precipitación*** La precipitación mensual normal en el aeropuerto de Seattle-Tacoma puede aproximarse mediante el modelo

$$R = 3.121 + 2.399\,\text{sen}\,(0.524t + 1.377)$$

donde R se mide en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero. (*Fuente: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration*)

a) Determinar los extremos de la función en el periodo de un año.

b) Emplear integración para aproximar la precipitación anual normal. (*Sugerencia:* Integrar sobre el intervalo [0, 12].)

c) Aproximar el promedio de la precipitación mensual durante los meses de octubre, noviembre y diciembre.

114. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un producto de temporada están dadas por el modelo

$$S = 74.50 + 43.75 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero. Determinar las ventas medias para cada periodo.

a) El primer trimestre $(0 \leq t \leq 3)$
b) El segundo trimestre $(3 \leq t \leq 6)$
c) El año completo $(0 \leq t \leq 12)$

115. ***Suministro de agua*** Un modelo para la tasa de flujo de agua en una estación de bombeo en un día determinado es

$$R(t) = 53 + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3.6\right) + 9 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + 8.9\right)$$

donde $0 \leq t \leq 24$. R es la tasa de flujo en miles de galones por hora y t es el tiempo en horas.

a) Utilizar una computadora para hacer la gráfica de la función de la tasa de flujo y aproximar la tasa de flujo máximo en la estación de bombeo.
b) Aproximar el volumen total del agua bombeada en un día.

116. ***Electricidad*** La intensidad de corriente alterna en un circuito eléctrico es

$$I = 2 \operatorname{sen}(60\pi t) + \cos(120\pi t)$$

donde I se mide en amperes y t se mide en segundos. Determinar la intensidad media para cada intervalo de tiempo.

a) $0 \leq t \leq \frac{1}{60}$
b) $0 \leq t \leq \frac{1}{240}$
c) $0 \leq t \leq \frac{1}{30}$

Probabilidad **En los ejercicios 117 y 118, la función**

$$f(x) = kx^n(1-x)^m, \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y k es una constante, puede utilizarse para representar diversas distribuciones de probabilidad. Si k se elige de manera tal que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

la probabilidad de que x caerá entre a y b $(0 \leq a \leq b \leq 1)$ es

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

117. La probabilidad de que una persona recuerde entre a y b% del material aprendido en un experimento es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x\sqrt{1-x}\,dx$$

donde x representa el porcentaje recordado. (Ver la figura.)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?
b) ¿Cuál es el porcentaje medio de lo que se recuerda? Esto es, ¿para qué valor de b es cierto que la probabilidad de recordar de 0 a b es 0.5?

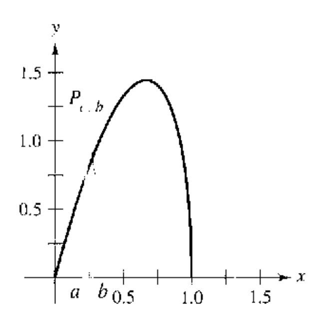


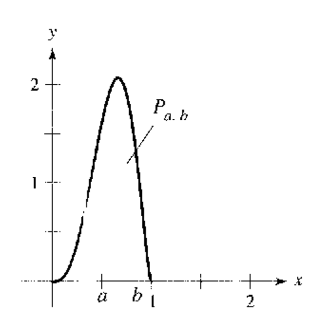
Figura para 117

118. La probabilidad de que se tomen muestras de un mineral de una región que contiene entre a y b% de hierro es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{1\,155}{32} x^3(1-x)^{3/2}\,dx$$

donde x representa el porcentaje de hierro. (Ver la figura.) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contendrá entre

a) 0 y 25% de hierro?
b) 50 y 100% de hierro?



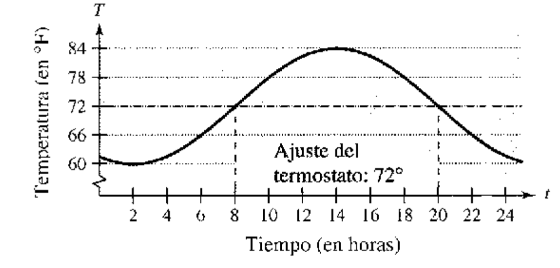
119. ***Temperatura*** La temperatura en grados Fahrenheit en una casa es

$$T = 72 + 12 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right]$$

donde t es el tiempo en horas, con $t = 0$ representando la media noche. El costo horario de refrigeración de una casa es de 0.10 dólares por grado.

a) Encontrar el costo C de refrigeración de la casa si el termostato se ajusta en 72°F calculando la integral

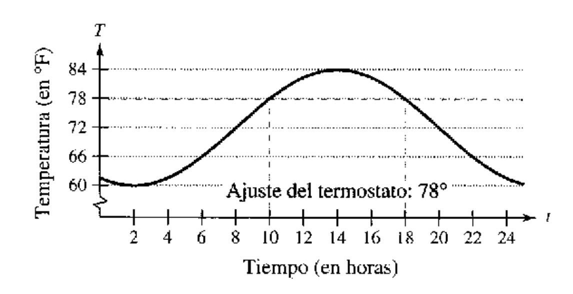
$$C = 0.1\int_8^{20}\left[72 + 12 \operatorname{sen}\frac{\pi(t-8)}{12} - 72\right]dt. \text{ (Ver figura.)}$$



b) Encontrar el ahorro al reajustar el termostato en 78 °F calculando la integral

$$C = 0.1\int_{10}^{18}\left[72 + 12 \operatorname{sen}\frac{\pi(t-8)}{12} - 78\right] dt.$$

(Ver la figura.)



120. ***Manufactura*** Un fabricante de fertilizantes encuentra que las ventas nacionales de fertilizantes siguen el patrón estacional

$$F = 100\,000\left[1 + \operatorname{sen}\frac{2\pi(t-60)}{365}\right]$$

donde F se mide en libras y t representa el tiempo en días, con $t = 1$ correspondiente al primero de enero. El fabricante desea establecer un programa para producir una cantidad uniforme de fertilizante cada día. ¿Cuál debe ser esta cantidad?

121. ***Análisis gráfico*** Considerar las funciones f y g, donde

$$f(x) = 6 \operatorname{sen} x \cos^2 x \quad \text{y} \quad g(t) = \int_0^t f(x)\, dx.$$

a) Emplear una computadora para hacer la gráfica de f y g en la misma ventana de observación.

b) Explicar por qué g es no negativa.

c) Identificar los puntos sobre la gráfica de g que corresponden a los extremos de f.

d) ¿Cada uno de los ceros de f corresponden a un extremo de g? Explicar.

e) Considerar la función

$$h(t) = \int_{\pi/2}^{t} f(x)\, dx.$$

Utilizar una computadora para hacer la gráfica de h. ¿Cuál es la relación entre g y h? Verificar la suposición.

122. Determinar $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(i\pi/n)}{n}$ evaluando una integral definida apropiada sobre el intervalo [0, 1].

123. *a*) Demostrar que $\int_0^1 x^2(1-x)^5\, dx = \int_0^1 x^5(1-x)^2\, dx$.

b) Demostrar que $\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx$.

124. *a*) Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$.

b) Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, donde n es un entero positivo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 125 a 130, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

125. $\int (2x+1)^2\, dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

126. $\int x(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) + C$

127. $\int_{-10}^{10} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, dx = 2\int_0^{10} (bx^2 + d)\, dx$

128. $\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = \int_a^{b+2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

129. $4\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = -\cos 2x + C$

130. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x + C$

131. Suponer que f es continua en todos lados y que c es una constante. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(x)\, dx = c\int_a^b f(cx)\, dx.$$

132. *a*) Verificar que $\operatorname{sen} u - u\cos u + C = \int u \operatorname{sen} u\, du.$.

b) Utilizar el apartado *a*) para demostrar que $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx = 2\pi$.

133. Completar la prueba del teorema 4.15.

134. Demostrar que si f es continua en la recta numérica real completa, entonces

$$\int_a^b f(x+h)\, dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\, dx.$$

Preparación del examen Putnam

135. Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales que satisfacen

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

Demostrar que la ecuación $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ tiene al menos un cero real.

136. Encontrar todas las funciones continuas positivas $f(x)$, para $0 \le x \le 1$, tales que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)x\, dx = \alpha$$

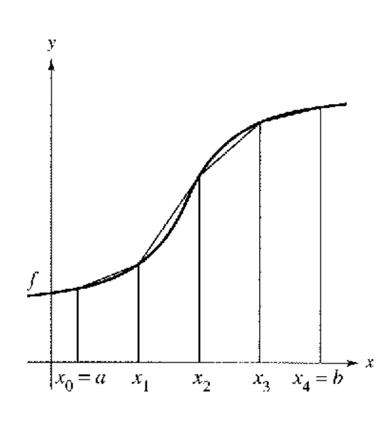
$$\int_0^1 f(x)x^2\, dx = \alpha^2$$

donde α es un número real.

Sección 4.6 Integración numérica

- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios.**
- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de Simpson.**
- **Analizar los errores de aproximación en la regla de los trapecios y en la regla de Simpson.**

La regla de los trapecios



El área de la región puede aproximarse utilizando cuatro trapecios
Figura 4.41

Algunas funciones elementales simplemente no tienen antiderivadas o primitivas que sean funciones elementales. Por ejemplo, no hay función elemental que tenga alguna de las siguientes funciones como su derivada.

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}, \qquad \sqrt{x}\cos x, \qquad \frac{\cos x}{x}, \qquad \sqrt{1-x^3}, \qquad \operatorname{sen} x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva (antiderivada), el teorema fundamental del cálculo no es de utilidad y hay que recurrir a una técnica de aproximación. Estas técnicas se describen en esta sección.

Una forma de aproximar una integral definida consiste en utilizar n trapecios, como se muestra en la figura 4.41. En la formulación de este método, se supone que f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$. De tal modo, la integral definida

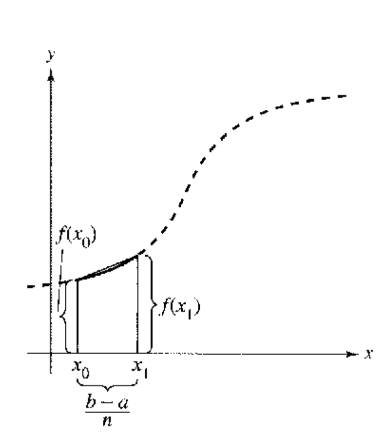
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

representa el área de la región delimitada por la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$. Primero, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$, de modo tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Luego se forma un trapecio para cada subintervalo (ver la figura 4.42). El área del i-ésimo trapecio es

$$\text{Área del } i\text{-ésimo trapecio} = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right).$$



El área del primer trapecio es

$$\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Figura 4.42

Esto implica que la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right] \\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].
\end{aligned}$$

Haciendo $\Delta x = (b - a)/n$, puede tomarse el límite cuando $n \to \infty$ para obtener

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{[f(a) - f(b)]\,\Delta x}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{[f(a) - f(b)](b-a)}{2n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= 0 + \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.16 La regla de los trapecios

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Además, como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA Observar que los coeficientes en la regla de los trapecios siguen el siguiente patrón.

1 2 2 2 . . . 2 2 1

EJEMPLO 1 Aproximación con la regla de los trapecios

Utilizar la regla de los trapecios para aproximar

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$, como se muestra en la figura 4.43.

Solución Cuando $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$, y se obtiene

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{8}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 0\right) = \frac{\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)}{4} \approx 1.896.$$

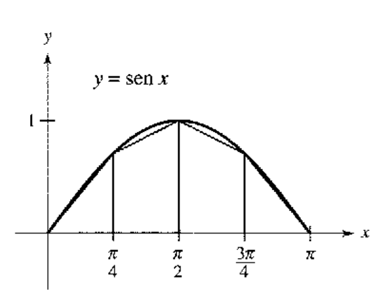
Cuando $n = 8$, $\Delta x = \pi/8$, y se obtiene

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{16}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right.$$

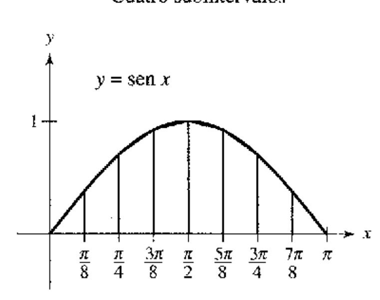
$$\left. + 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(2 + 2\sqrt{2} + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right) \approx 1.974.$$

Para esta integral particular, se podría haber encontrado una antiderivada y determinado que el área exacta de la región es 2.



Cuatro subintervalos



Ocho subintervalos

Aproximaciones trapezoidales
Figura 4.43

TECNOLOGÍA La mayoría de las computadoras y de los sistemas algebraicos computarizados cuenta con programas incorporados que es posible utilizar para aproximar el valor de una integral definida. Utilizar un programa de este tipo para aproximar la integral del ejemplo 1. ¿Qué tan precisa es su aproximación?

Cuando se usa uno de estos programas, debe tenerse cuidado con sus limitaciones. Muchas veces, no se le da una indicación del grado de exactitud de la aproximación. Otras, se le puede dar una aproximación por completo equivocada. Por ejemplo, utilizar un programa de integración numérica incorporada para calcular

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx.$$

La computadora producirá un mensaje de error, ¿no es así?

Es interesante comparar la regla de los trapecios con la regla del punto medio que se dio en la sección 4.2 (ejercicios 63 a 66). En la regla de los trapecios, se promedian los valores de la función en los puntos extremos de los subintervalos, pero la regla del punto medio toma los valores de la función de los puntos medios de los subintervalos.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla del punto medio.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla de los trapecios.}$$

NOTA Hay dos puntos importantes que deben señalarse respecto a la regla de los trapecios (o a la regla del punto medio). Primero, la aproximación tiende a volverse más exacta a medida que n aumenta. Así, en el ejemplo 1, si $n = 16$, la regla de los trapecios produce una aproximación de 1.994. Segundo, aunque podría utilizarse el teorema fundamental para calcular la integral en el ejemplo 1, este teorema no puede utilizarse para calcular una integral tan simple como $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^2 dx$ debido a que $\operatorname{sen} x^2$ no tiene una antiderivada elemental. Sin embargo, es posible aplicar con facilidad la regla de los trapecios a esta integral.

Regla de Simpson

Una manera de ver la aproximación que permite la regla de trapecios de una integral definida consiste en decir que en cada subintervalo se aproxima f por medio de un polinomio de *primer* grado. En la regla de Simpson, que recibe ese nombre en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761), se lleva este procedimiento un paso adelante y aproxima f mediante polinomios de *segundo* grado.

Antes de presentar la regla de Simpson, enunciamos un teorema sobre las integrales de polinomios de grado 2 (o menor).

TEOREMA 4.17 Integral de $p(x) = Ax^2 = Bx = C$

Si $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$

Demostración

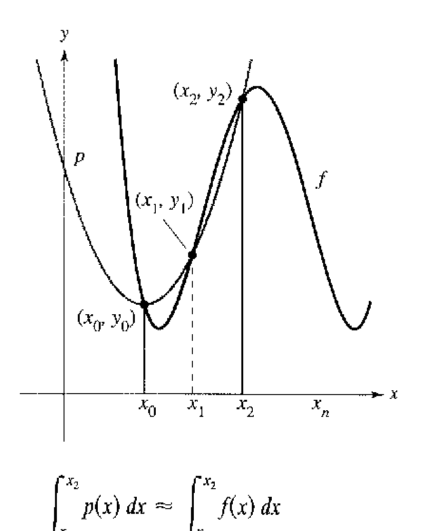
$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\,dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\
&= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_a^b \\
&= \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a) \\
&= \left(\frac{b-a}{6}\right)[2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(b + a) + 6C]
\end{aligned}$$

Mediante la expansión y la agrupación de términos, la expresión dentro de los corchetes se convierte en

$$\underbrace{(Aa^2 + Ba + C)}_{p(a)} + \underbrace{4\left[A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C\right]}_{4p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{(Ab^2 + Bb + C)}_{p(b)}$$

y puede escribirse

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$



$$\int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

Figura 4.44

Para formular la regla de Simpson con el fin de aproximar una integral definida, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta vez, sin embargo, se requiere que n sea par, y los subintervalos se agrupan en pares tales que

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < x_2}_{[x_0,\, x_2]} < \underbrace{x_3 < x_4}_{[x_2,\, x_4]} < \cdot \cdot \cdot < \underbrace{x_{n-2} < x_{n-1} < x_n}_{[x_{n-2},\, x_n]} = b.$$

En cada subintervalo (doble) $[x_{i-2}, x_i]$ puede aproximarse f por medio de un polinomio p de grado menor que o igual a 2. (Ver el ejercicio 55.) Por ejemplo, en el subintervalo $[x_0, x_2]$, elegir el polinomio de menor grado que pasa a través de los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como se muestra en la figura 4.44. Ahora, utilizando p como una aproximación de f en este subintervalo, se tiene, por el teorema 4.17,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2)\right]\\ &= \frac{2[(b-a)/n]}{6}\left[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)\right]\\ &= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right].\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento en el intervalo completo $[a, b]$ se produce el siguiente teorema.

> **TEOREMA 4.18 La regla de Simpson (*n* es par)**
>
> Sea f continua en $[a, b]$. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ es
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdot \cdot \cdot + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$
>
> Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA Observar que los coeficientes en la regla de Simpson tienen el siguiente patrón.

1 4 2 4 2 4 . . . 4 2 4 1

En el ejemplo 1, la regla de los trapecios se utilizó para estimar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. En el siguiente ejemplo, se aplica la regla de Simpson a la misma integral.

EJEMPLO 2 Aproximación con la regla de Simpson

Emplear la regla de Simpson para aproximar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right) \approx 2.005.$$

Cuando $n = 8$, se tiene $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx 2.0003.$

NOTA En el ejemplo 1, la regla de los trapecios con $n = 8$ aproxima $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ como 1.974. En el ejemplo 2, la regla de Simpson con $n = 8$ produjo una aproximación de 2.0003. La antiderivada o primitiva produciría el valor verdadero de 2.

Análisis de errores

Al usar una técnica de aproximación, es importante conocer la precisión del resultado. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, proporciona las fórmulas para estimar los errores que implica en el uso de la regla de Simpson y de la regla de los trapecios.

TEOREMA 4.19 Errores en la regla de los trapecios y en la de Simpson

Si f tiene una segunda derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de los trapecios es

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}[\text{máx}\,|f''(x)|], \quad a \leq x \leq b. \qquad \text{Regla de los trapecios.}$$

Además, si éste tiene cuarta derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_0^b f(x)\,dx$ mediante la regla de Simpson es

$$E \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}[\text{máx}\,|f^{(4)}(x)|], \quad a \leq x \leq b. \qquad \text{Regla de Simpson.}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, utilizarlo para calcular la integral definida del ejemplo 3. Obtener un valor de

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1.14779.$$

("ln" representa la función logarítmica natural, la cual se estudiará en la sección 5.1.)

El teorema 4.19 establece que los errores generados por la regla de los trapecios y la regla de Simpson tienen cotas superiores dependientes de los valores extremos de $f''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además, estos errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños *incrementando n*, siempre que $f''(x)$ y $f^{(4)}$ sean continuas y, en consecuencia, acotadas en $[a, b]$.

EJEMPLO 3 El error aproximado en la regla de los trapecios

Determinar un valor de n tal que la regla de los trapecios se aproximará al valor de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con un error menor que 0.01.

Solución Primero se hace $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y se halla la segunda derivada de f.

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2} \quad \text{y} \quad f''(x) = (1+x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$ es $|f''(0)| = 1$. De tal modo, por el teorema 4.19, puede escribirse

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(0)| = \frac{1}{12n^2}(1) = \frac{1}{12n^2}.$$

Para obtener un error E menor que 0.01, debe elegirse n tal que $1/(12n^2) \leq 1/100$.

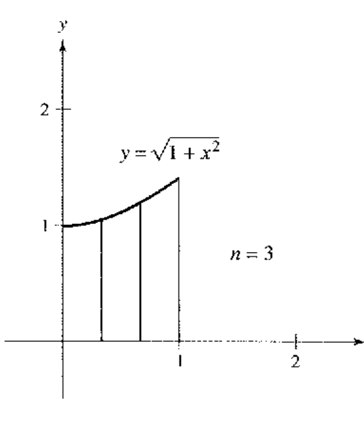
$$100 \leq 12n^2 \quad \Rightarrow \quad n \geq \sqrt{\tfrac{100}{12}} \approx 2.89$$

Así, basta tomar $n = 3$ (debido a que n debe ser mayor o igual a 2.89) y aplicar la regla de los trapecios, como se ilustra en la figura 4.45, para obtener

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[\sqrt{1+0^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{1+1^2}\right] \approx 1.154.$$

De tal modo, con un error no mayor que 0.01, se sabe que

$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1.164.$$



$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1.164$

Figura 4.45

Ejercicios de la sección 4.6

En los ejercicios 1 a 10, usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida para un valor dado de n. Redondear la respuesta hasta cuatro decimales y comparar los resultados con el valor exacto de la integral definida.

1. $\int_0^2 x^2\,dx, \quad n = 4$
2. $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx, \quad n = 4$
3. $\int_0^2 x^3\,dx, \quad n = 4$
4. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx, \quad n = 4$
5. $\int_0^2 x^3\,dx, \quad n = 8$
6. $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx, \quad n = 8$
7. $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx, \quad n = 8$
8. $\int_1^3 (4 - x^2)\,dx, \quad n = 4$
9. $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx, \quad n = 4$
10. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx, \quad n = 4$

En los ejercicios 11 a 20, aproximar la integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$. Comparar estos resultados con la aproximación de la integral utilizando una computadora.

11. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx$
12. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$
13. $\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1 - x}\,dx$
14. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x\,dx$
15. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos x^2\,dx$
16. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \tan x^2\,dx$
17. $\int_1^{1.1} \operatorname{sen} x^2\,dx$
18. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$
19. $\int_0^{\pi/4} x \tan x\,dx$
20. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Desarrollo de conceptos

21. Si la función f es cóncava hacia arriba en el intervalo $[a, b]$, ¿la regla de los trapecios producirá un resultado mayor que o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$? Explicar por qué.
22. La regla de los trapecios y la regla de Simpson producen aproximaciones de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ basadas en aproximaciones polinómicas de f. ¿Qué grado de polinomio se usa para cada una?

En los ejercicios 23 a 28, utilizar las fórmulas de error del teorema 4.19 para estimar el error en la aproximación de la integral, con $n = 4$, utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

23. $\int_0^2 x^3\,dx$
24. $\int_1^3 (2x + 3)\,dx$
25. $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$
26. $\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$
27. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$
28. $\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx$

En los ejercicios 29 a 34, utilizar las fórmulas del error en el teorema 4.19 con el fin de encontrar n tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

29. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$
30. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$
31. $\int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx$
32. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
33. $\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx$
34. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

En los ejercicios 35 a 38, emplear un sistema algebraico por computadora y las fórmulas del error para determinar n de manera tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

35. $\int_0^2 \sqrt{1 + x}\,dx$
36. $\int_0^2 (x + 1)^{2/3}\,dx$
37. $\int_0^1 \tan x^2\,dx$
38. $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$

39. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 4$.

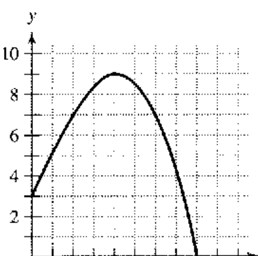


Figura para 39

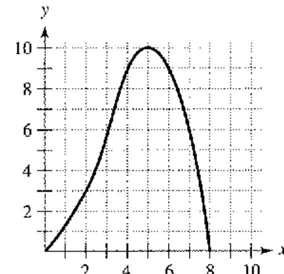


Figura para 40

40. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 8$.

41. ***Programación*** Escribir un programa para computadora con el fin de aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Empezar con el programa escrito en la sección 4.3, ejercicios 59 a 62, y advertir que la regla de los trapecios puede escribirse como $T(n) = \frac{1}{2}[L(n) + R(n)]$ y la regla de Simpson, como

$$S(n) = \tfrac{1}{3}[T(n/2) + 2M(n/2)].$$

[Recordar que $L(n)$, $M(n)$ y $R(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos terminales del lado izquierdo, los puntos medios y los puntos terminales del lado derecho de subintervalos con igual ancho.]

Programación **En los ejercicios 42 a 44, emplear el programa en el ejercicio 41 para aproximar la integral definida y completar la tabla.**

n	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4					
8					
10					
12					
16					
20					

42. $\int_0^4 \sqrt{2 + 3x^2}\, dx$ **43.** $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ **44.** $\int_0^4 \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

45. ***Área*** Emplear la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x} \cos x$, $y = 0$ y $x = \pi/2$.

46. ***Circunferencia*** **La integral elíptica**

$$8\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

proporciona la circunferencia de una elipse. Emplear la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar la circunferencia.

47. ***Trabajo*** Para determinar el tamaño del motor requerido en la operación de una prensa, una compañía debe conocer la cantidad de trabajo realizado cuando la prensa mueve un objeto linealmente 5 pies. La fuerza variable para desplazar el objeto es

$$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$$

donde F está dada en libras y x produce la posición de la unidad en pies. Emplear la regla de Simpson con $n = 12$ para aproximar el trabajo W (en pies-libras) realizado a través de un ciclo si

$$W = \int_0^5 F(x)\, dx.$$

48. La tabla presenta varias mediciones recopiladas en un experimento para aproximar una función continua desconocida $y = f(x)$.

a) Aproximar la integral $\int_0^2 f(x)\, dx$ utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14

x	1.25	1.50	1.75	2.00
y	7.25	7.64	8.08	8.14

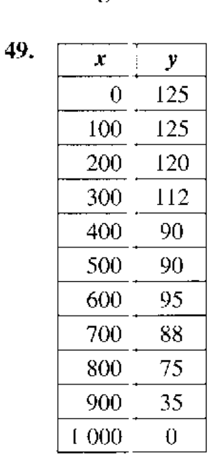
b) Utilizar una computadora para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para los datos. Integrar el polinomio resultante en [0, 2] y comparar el resultado con el apartado *a)*.

Aproximación de Pi **En los ejercicios 49 y 50, utilizar la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar π utilizando la ecuación dada. (En la sección 5.7, se podrán calcular las integrales utilizando funciones trigonométricas inversas.)**

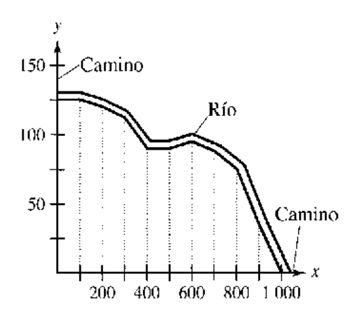
49. $\pi = \int_0^{1/2} \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ **50.** $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$

Área **En los ejercicios 51 y 52, utilizar la regla de los trapecios para estimar el número de metros cuadrados de tierra en un lote donde x y y se miden en metros, como se muestra en las figuras. La tierra es acotada por un río y dos caminos rectos que se juntan en ángulos rectos.**

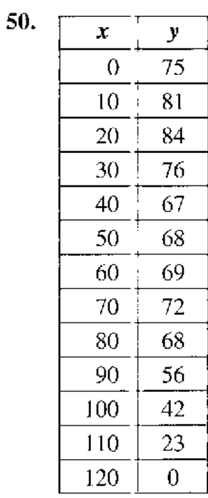
49.



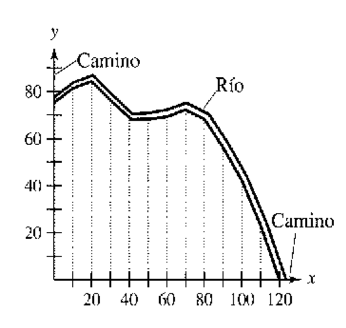
x	y
0	125
100	125
200	120
300	112
400	90
500	90
600	95
700	88
800	75
900	35
1 000	0



50.



x	y
0	75
10	81
20	84
30	76
40	67
50	68
60	69
70	72
80	68
90	56
100	42
110	23
120	0



53. Demostrar que la regla de Simpson es exacta cuando aproxima la integral de una función polinómica cúbica, y demostrar el resultado par $\int_0^1 x^3\, dx$, $n = 2$.

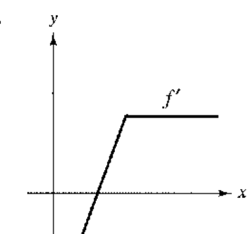
54. Usar la regla de Simpson con $n = 10$ y un sistema algebraico por computadora para aproximar t en la ecuación integral

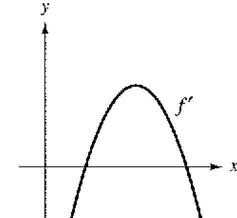
$$\int_0^t \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx = 2.$$

55. Demostrar que se puede encontrar un polinomio $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por cualesquiera tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), donde las x_i son distintas.

Ejercicios de repaso del capítulo 4

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f.

1. 

2. 

En los ejercicios 3 a 8, determinar la integral indefinida.

3. $\int (2x^2 + x - 1)\, dx$

4. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

5. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2}\, dx$

6. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}\, dx$

7. $\int (4x - 3 \operatorname{sen} x)\, dx$

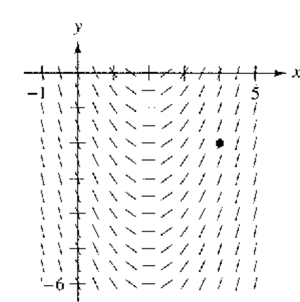
8. $\int (5 \cos x - 2 \sec^2 x)\, dx$

9. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -2x$ cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 1)$.

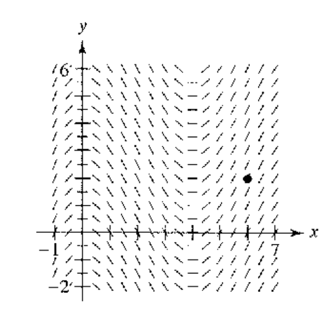
10. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x - 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$ en ese punto.

Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendiente, una de las cuales pase a través del punto indicado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilizar una computadora para hacer la gráfica de la solución.**

11. $\frac{dy}{dx} = 2x - 4, \quad (4, -2)$



12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad (6, 2)$



13. ***Velocidad y aceleración*** Un avión que está despegando de una pista recorre 3 600 pies antes de elevarse. El avión parte desde el reposo, se desplaza con aceleración constante y efectúa el recorrido en 30 segundos. ¿A qué velocidad despega?

14. ***Velocidad y aceleración*** La velocidad de un automóvil que viaja en línea recta se reduce de 45 a 30 millas por hora en una distancia de 264 pies. Encontrar la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

15. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo.
    a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima?
    b) ¿Cuál es la altura máxima?
    c) ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?
    d) ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?

16. ***Velocidad y aceleración*** Repetir el ejercicio 15 para una velocidad inicial de 40 metros por segundo.

En los ejercicios 17 a 20, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

17. $\frac{1}{4(1)} + \frac{1}{4(2)} + \frac{1}{4(3)} + \cdots + \frac{1}{4(8)}$

18. $\frac{1+2}{2(1)} + \frac{2+2}{2(2)} + \frac{3+2}{2(3)} + \cdots + \frac{12+2}{2(12)}$

19. $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

20. $3\left(2 + \frac{4}{n}\right) + \cdots + 3n\left(2 + \frac{(n+1)^2}{n}\right)$

En los ejercicios 21 a 24, utilizar las propiedades de las sumas y el teorema 4.2 para calcular las sumas.

21. $\sum_{i=1}^{10} 3i$

22. $\sum_{i=1}^{20} (4i - 1)$

23. $\sum_{i=1}^{20} (i + 1)^2$

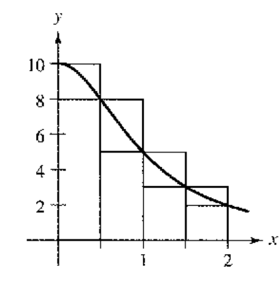
24. $\sum_{i=1}^{12} i(i^2 - 1)$

25. Escribir en notación sigma *a*) la suma de los primeros diez enteros impares positivos, *b*) la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos y *c*) $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.

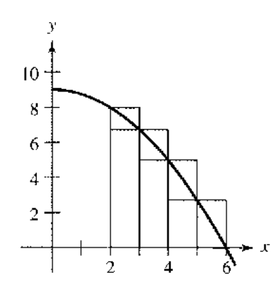
26. Calcular cada suma para $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$ y $x_5 = 7$.
    a) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$
    b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}$
    c) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i - x_i^2)$
    d) $\sum_{i=2}^{5} (x_i - x_{i-1})$

En los ejercicios 27 y 28, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región utilizando el número indicado de subintervalos de igual ancho.

27. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$



28. $y = 9 - \frac{1}{4}x^2$



En los ejercicios 29 a 32, recurrir al proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo dado. Dibujar la región.

29. $y = 6 - x, \quad [0, 4]$

30. $y = x^2 + 3, \quad [0, 2]$

31. $y = 5 - x^2, \quad [-2, 1]$

32. $y = \frac{1}{4}x^3, \quad [2, 4]$

33. Emplear el proceso de límite para encontrar el área de la región acotada por $x = 5y - y^2$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = 5$.

34. Considerar la región acotada por $y = mx$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$.

a) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/4$.

b) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/n$.

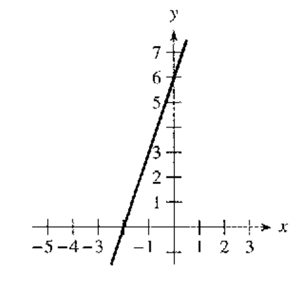
c) Encontrar el área de la región dejando que n tienda a infinito en ambas sumas en el apartado *b*). Demostrar que en cada caso se obtiene la fórmula para el área de un triángulo.

En los ejercicios 35 y 36, escribir el límite común integral definido en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

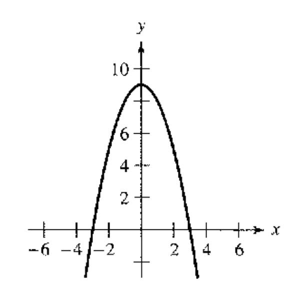
	Límite	*Intervalo*
35.	$\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (2c_i - 3)\, \Delta x_i$	$[4, 6]$
36.	$\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} 3c_i(9 - c_i^2)\, \Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 37 y 38, formular una integral definida que produzca el área de la región. (No calcular la integral.)

37. $f(x) = 3x + 6$



38. $f(x) = 9 - x^2$



En los ejercicios 39 y 40, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Utilizar después una fórmula geométrica para calcular la integral.

39. $\displaystyle\int_0^5 (5 - |x - 5|)\, dx$

40. $\displaystyle\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

41. Dadas $\displaystyle\int_2^6 f(x)\, dx = 10$ y $\displaystyle\int_2^6 g(x)\, dx = 3$, calcular

a) $\displaystyle\int_2^6 [f(x) + g(x)]\, dx.$

b) $\displaystyle\int_2^6 [f(x) - g(x)]\, dx.$

c) $\displaystyle\int_2^6 [2f(x) - 3g(x)]\, dx.$

d) $\displaystyle\int_2^6 5f(x)\, dx.$

42. Dadas $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx = 4$ y $\displaystyle\int_3^6 f(x)\, dx = -1$, calcular

a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\, dx.$

b) $\displaystyle\int_6^3 f(x)\, dx.$

c) $\displaystyle\int_4^4 f(x)\, dx.$

d) $\displaystyle\int_3^6 -10f(x)\, dx.$

En los ejercicios 43 a 50, emplear el teorema fundamental del cálculo para calcular la integral definida.

43. $\displaystyle\int_0^4 (2 + x)\, dx$

44. $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^2 + 2)\, dt$

45. $\displaystyle\int_{-1}^1 (4t^3 - 2t)\, dt$

46. $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^4 + 2x^2 - 5)\, dx$

47. $\displaystyle\int_4^9 x\sqrt{x}\, dx$

48. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

49. $\displaystyle\int_0^{3\pi/4} \operatorname{sen} \theta\, d\theta$

50. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

En los ejercicios 51 a 56, dibujar la gráfica de la región cuya área está dada por la integral, y encontrar el área.

51. $\displaystyle\int_1^3 (2x - 1)\, dx$

52. $\displaystyle\int_0^2 (x + 4)\, dx$

53. $\displaystyle\int_3^4 (x^2 - 9)\, dx$

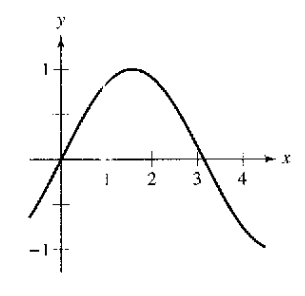
54. $\displaystyle\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)\, dx$

55. $\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\, dx$

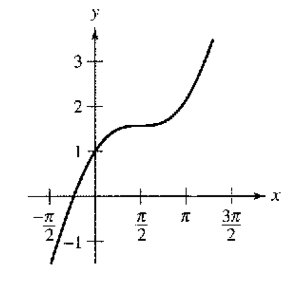
56. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1 - x)\, dx$

En los ejercicios 57 y 58, determinar el área de la región dada.

57. $y = \operatorname{sen} x$



58. $y = x + \cos x$



En los ejercicios 59 y 60, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y determinar su área.

59. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 9$

60. $y = \sec^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 61 y 62, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo indicado. Determinar los valores de x a los cuales la función toma su valor medio, y graficar la función.

61. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad [4, 9]$

62. $f(x) = x^3, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 63 a 66, emplear el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

63. $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\sqrt{1 + t^3}\, dt$

64. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$

65. $F(x) = \displaystyle\int_{-3}^x (t^2 + 3t + 2)\, dt$

66. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \csc^2 t\, dt$

En los ejercicios 67 a 80, encontrar la integral definida.

67. $\displaystyle\int (x^2 + 1)^3\, dx$

68. $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

69. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}\, dx$

70. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3 + 3}\, dx$

71. $\displaystyle\int x(1 - 3x^2)^4\, dx$

72. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{(x^2 + 6x - 5)^2}\, dx$

73. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

74. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x^2\, dx$

75. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \cos\theta}}\, d\theta$

76. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$

77. $\displaystyle\int \tan^n x \sec^2 x\, dx, \qquad n \neq -1$

78. $\displaystyle\int \sec 2x \tan 2x\, dx$

79. $\displaystyle\int (1 + \sec \pi x)^2 \sec \pi x \tan \pi x\, dx$

80. $\displaystyle\int \cot^4 \alpha \csc^2 \alpha\, d\alpha$

En los ejercicios 81 a 88, calcular la integral definida. Utilizar una computadora para verificar el resultado.

81. $\displaystyle\int_{-1}^2 x(x^2 - 4)\, dx$

82. $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3 + 1)^3\, dx$

83. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx$

84. $\displaystyle\int_3^6 \frac{x}{3\sqrt{x^2 - 8}}\, dx$

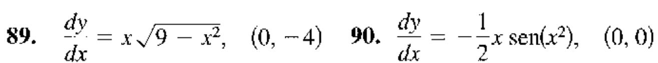
85. $2\pi\displaystyle\int_0^1 (y + 1)\sqrt{1 - y}\, dy$

86. $2\pi\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x + 1}\, dx$

87. $\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\, dx$

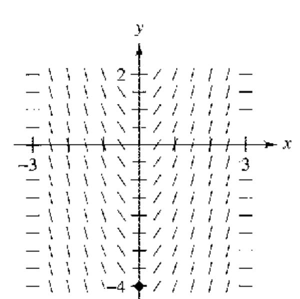
88. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x\, dx$

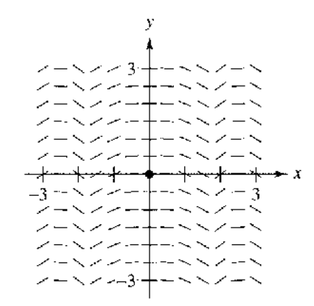
Campos de pendientes **En los ejercicios 89 y 90, se dan una ecuación diferencial y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y emplear una computadora para graficar la solución.**



89. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{9 - x^2}, \quad (0, -4)$

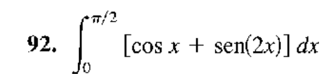
90. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x \operatorname{sen}(x^2), \quad (0, 0)$



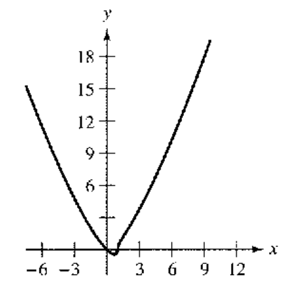


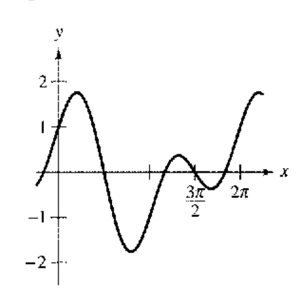
En los ejercicios 91 y 92, encontrar el área de la región. Utilizar una computadora para verificar el resultado.

91. $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{x - 1}\, dx$



92. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [\cos x + \operatorname{sen}(2x)]\, dx$





93. ***Costo de combustible*** La gasolina está aumentando su precio de acuerdo con la ecuación $p = 1.20 + 0.04t$, donde p es el precio en dólares por galón y t es el tiempo en años, con $t = 0$ representando el año de 1990. Un automóvil recorre 15 000 millas en un año y tiene un rendimiento de M millas por galón. El costo anual del combustible es

$$C = \frac{15\,000}{M}\int_t^{t+1} p\, dt.$$

Estimar el costo anual del combustible en *a*) 2000 y *b*) 2005.

94. ***Ciclo respiratorio*** Después de ejercitarse durante unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire es

$$v = 1.75 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}.$$

Determinar el volumen, en litros, del aire inhalado durante un ciclo, integrando la función sobre el intervalo [0, 2].

En los ejercicios 95 a 98, emplear la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$, y utilizar las capacidades de integración de una computadora, para aproximar la integral definida. Comparar los resultados.

95. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1 + x^3}\, dx$

96. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3 - x^2}\, dx$

97. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{x}\cos x\, dx$

98. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

SP Solución de problemas

1. Sea $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,\ x > 0.$

   a) Encontrar $L(1)$.

   b) Encontrar $L'(x)$ y $L'(1)$.

   c) Utilizar una computadora para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.

   d) Demostrar que $L(x_1 x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2.

2. Sea $F(x) = \int_2^x \operatorname{sen} t^2\, dt.$

   a) Utilizar una computadora para completar la tabla.

x	0	1.0	1.5	1.9	2.0
F(x)					
x	2.1	2.5	3.0	4.0	5.0
F(x)					

   b) Sea $G(x) = \frac{1}{x-2}F(x) = \frac{1}{x-2}\int_2^x \operatorname{sen} t^2\, dt.$ Utilizar una computadora para completar la tabla y estimar $\lim_{x\to 2} G(x)$.

x	1.9	1.95	1.99	2.01	2.1
G(x)					

   c) Utilizar la definición de la derivada para encontrar el valor exacto del límite $\lim_{x\to 2} G(x)$.

En los ejercicios 3 y 4, *a*) escribir el área bajo la gráfica de la función dada definida sobre el intervalo indicado como un límite. Después utilizar un sistema algebraico por computadora para *b*) calcular la suma del apartado *a*), y *c*) calcular el límite utilizando el resultado del apartado *b*).

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2, \quad [0, 2]$

   $\left(\textit{Sugerencia: } \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right)$

4. $y = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3, \quad [0, 2]$

   $\left(\textit{Sugerencia: } \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\right)$

5. La **función de Fresnel *S*** se define mediante la integral

   $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$

   a) Hacer la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$ sobre el intervalo $[0, 3]$.

   b) Utilizar la gráfica del apartado *a*) para dibujar la gráfica de S en el intervalo $[0, 3]$.

   c) Ubicar todos los extremos relativos de S en el intervalo $(0, 3)$.

   d) Localizar todos los puntos de inflexión de S en el intervalo $(0, 3)$.

6. La **aproximación gaussiana de dos puntos** para f es

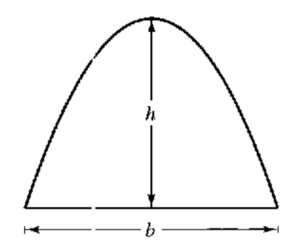
   $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

   a) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \cos x\, dx$. Encontrar el error de la aproximación.

   b) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

   c) Probar que la aproximación gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.

7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ el producto de la base y la altura (ver la figura).



   a) Graficar el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Utilizar una integral apropiada para encontrar el área A.

   b) Encontrar la base y la altura del arco y verificar la fórmula de Arquímedes.

   c) Demostrar la fórmula de Arquímedes para una parábola general.

8. Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos en caída libre:

   El tiempo que cualquier espacio se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo moviéndose a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta del cuerpo acelerado y la velocidad justo antes de que empiece la aceleración.

   Utilizar las técnicas de este capítulo para verificar esta proposición.

9. La gráfica de una función f consta de tres segmentos de recta que unen a los puntos $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(6, 2)$ y $(8, 3)$. La función F se define por medio de la integral.

   $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$

   a) Dibujar la gráfica de f.

   b) Completar la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F(x)									

   c) Encontrar los extremos de F en el intervalo $[0, 8]$.

   d) Determinar todos los puntos de inflexión de F en el intervalo $(0, 8)$.

10. Un automóvil se desplaza en línea recta durante una hora. Su velocidad v en millas por hora en intervalos de seis minutos se muestra en la tabla.

t (horas)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
v (mi/h)	0	10	20	40	60	50

t (horas)	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v (mi/h)	40	35	40	50	65

a) Elaborar una gráfica razonable de la función de velocidad v graficando estos puntos y conectándolos con una curva uniforme.

b) Encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales la aceleración a es positiva.

c) Encontrar la aceleración media del automóvil (en millas por hora cuadrada) sobre el intervalo [0, 0.4].

d) ¿Qué significa la integral $\int_0^1 v(t)\,dt$? Aproximar esta integral utilizando la regla de los trapecios con cinco subintervalos.

e) Aproximar la aceleración en $t = 0.8$.

11. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(v)\,dv\right) dt.$

12. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}([f(b)]^2 - [f(a)]^2).$

13. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

14. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}.$$

15. Suponer que f es integrable en $[a, b]$ y $0 < m \le f(x) \le M$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$m(a-b) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Utilizar este resultado para estimar $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx.$

16. Sea f continua en el intervalo $[0, b]$ donde $f(x) + f(b-x) \ne 0$ en $[0, b]$.

a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}\,dx = \frac{b}{2}.$

b) Utilizar el resultado del apartado *a)* para calcular

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(1-x)+\operatorname{sen} x}\,dx.$$

c) Utilizar el resultado del apartado *a)* para calcular

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\,dx.$$

17. Verificar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

demostrando lo siguiente.

a) $(1+i)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

b) $(n+1)^3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i^2+3i+1) + 1$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18. Demostrar que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

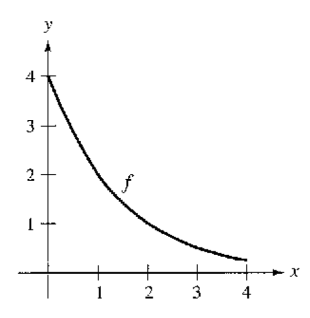
19. Sea

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx$$

donde f se muestra en la figura. Considerar que $L(n)$ y $R(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos extremos del lado izquierdo y los puntos terminales del lado derecho de n subintervalos de igual ancho. (Suponer que n es par.) Sean $T(n)$ y $S(n)$ los valores correspondientes de la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

a) Para cualquier n, listar $L(n)$ y $R(n)$ e I en orden creciente.

b) Aproximar $S(4)$.



20. La **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

se utiliza a menudo en la ingeniería. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no está definida en $t = 0$, pero su límite es 1 cuando $t \to 0$. De tal modo, definir $f(0) = 1$. En ese caso f es continua en todos lados.

a) Emplear una computadora para graficar $\operatorname{Si}(x)$.

b) ¿En qué valores de x $\operatorname{Si}(x)$ tiene máximos relativos?

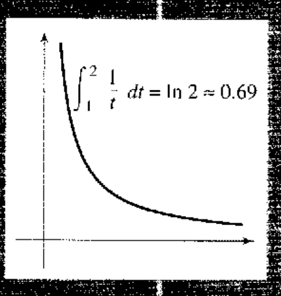
c) Encontrar las coordenadas del primer punto de inflexión donde $x > 0$.

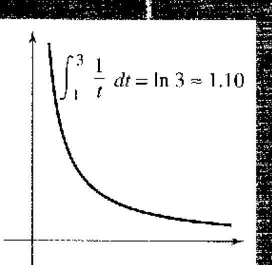
d) Decidir si $\operatorname{Si}(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. Si es así, identificar cada una.

$\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln 1 = 0$

Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes

Un géiser es un chorro de agua caliente que hace erupción periódicamente cuando el agua almacenada en la tierra dentro de un espacio hierve y produce vapor. Las fuerzas del vapor impulsan hacia arriba el agua a través de una abertura en la tierra. La temperatura a la cual el agua hierve es afectada por la presión. ¿Se puede pensar que un incremento o decremento en la presión causa que el agua hierva a una temperatura baja? ¿Por qué?





$\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \ln 3 \approx 1.10$

Brian Maslyar/Index Stock

Sección 5.1 La función logaritmo natural: derivación

- **Desarrollar y usar propiedades de la función logaritmo natural.**
- **Comprender la definición del número *e*.**
- **Derivar funciones que involucran la función logaritmo natural.**

La función logaritmo natural

JOHN NAPIER (1550-1617)
El matemático escocés John Napier inventó los logaritmos. Aunque no introdujo los logaritmos *naturales*, éstos se suelen llamar logaritmos *napierianos*.

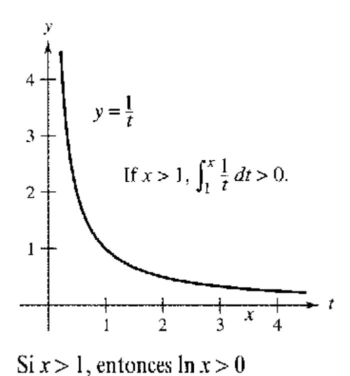
Recordar que en la regla general de las potencias

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{Regla general de las potencias.}$$

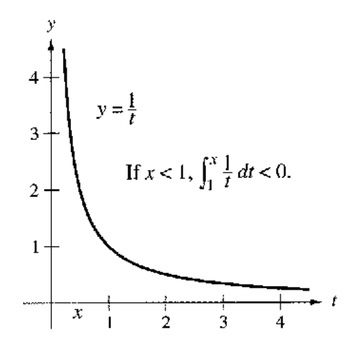
sigue teniendo un defecto importante, no se aplica al caso $n = -1$. De hecho, todavía no se ha encontrado una antiderivada o primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección se usará el segundo teorema fundamental del cálculo para *definir* esa antiderivada o primitiva. Ésta es una función que aún no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica, sino que está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas*. Esta función particular es la **función logaritmo natural.**

> **Definición de la función logaritmo natural**
>
> La **función logaritmo natural** se define como
>
> $$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$
>
> El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

A partir de la definición se deduce que $\ln x$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$ (figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.



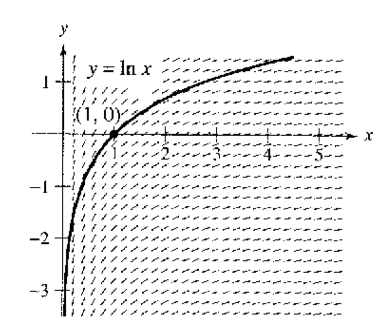
Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$



Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$

Figura 5.1

Representación de la función logaritmo natural Usando *sólo* la definición, esbozar una gráfica de la función logaritmo natural. Explicar el razonamiento.



Cada pequeño segmento recto tiene una pendiente de $\frac{1}{x}$
Figura 5.2

Para dibujar la gráfica de $y = \ln x$ se puede pensar en la función logaritmo natural como una antiderivada o primitiva dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

La figura 5.2 es una gráfica generada por computadora; muestra un *campo de pendientes o campo de direcciones*, que consta de pequeños segmentos de pendiente $1/x$. La gráfica de $y = \ln x$ es la solución que pasa por el punto $(1, 0)$. Se estudiarán campos de pendientes en la sección 6.1.

El siguiente *teorema* resume varias propiedades básicas de la función logaritmo natural.

TEOREMA 5.1 Propiedades de la función logaritmo natural

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades.

1. El dominio es $(0, \infty)$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$.
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

NOTA Los campos de pendientes pueden ser útiles para obtener una pespectiva visual de las direcciones de las soluciones de una ecuación diferencial.

Demostración El dominio de $f(x) = \ln x$ es $(0, \infty)$ por definición. Además, la función es continua, por ser derivable. Y es creciente porque su derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{Primera derivada.}$$

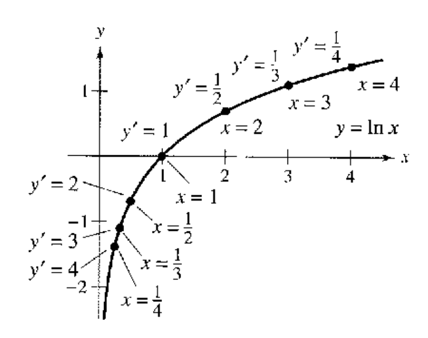
es positivo para $x > 0$, como se muestra en la figura 5.3. Es cóncava hacia abajo porque

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

es negativo para $x > 0$. Dejamos como ejercicio la demostración de que es inyectiva (ver ejercicio 111). Los siguientes límites implican que el recorrido o rango es toda la recta real.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

La justificación de ambos límites se encuentra en el apéndice A.



La función logaritmo natural es creciente, y su gráfica es cóncava hacia abajo
Figura 5.3

Utilizando la definición de la función logaritmo natural, se pueden probar importantes propiedades de las operaciones con logaritmos. Si ya está familiarizado con los logaritmos, el lector reconocerá que estas propiedades son características de todos los logaritmos.

TEOREMA 5.2 Propiedades de los logaritmos

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades.

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

LOGARITMOS
Napier formó el término *logaritmo* con palabras griegas *logos* (razón) y *arithmos* (número) para denominar la teoría que desarrolló a lo largo de veinte años y que apareció por vez primera en el libro *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* ("Una descripción de la maravillosa regla de los logaritmos").

Demostración La primera propiedad ya ha sido discutida. La segunda se deduce del hecho de que dos antiderivadas o primitivas de una misma función difieren en una constante. Del segundo teorema fundamental del cálculo y la definición de la función logaritmo natural, se sabe que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}.$$

Así pues, se consideran las dos derivadas

$$\frac{d}{dx}[\ln(ax)] = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\ln a + \ln x] = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Como $\ln(ax)$ y $(\ln a + \ln x)$ son ambas antiderivadas o primitivas de $1/x$, deben diferir en una constante.

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C$$

Tomando $x = 1$, se puede ver que $C = 0$. La tercera propiedad se demuestra analógicamente comparando las derivadas de $\ln(x^n)$ y $n \ln x$. Por último, usando la segunda y tercera propiedades, se puede probar la cuarta.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln[a(b^{-1})] = \ln a + \ln(b^{-1}) = \ln a - \ln b$$

El ejemplo 1 muestra cómo usar propiedades de los logaritmos para desarrollar expresiones logarítmicas.

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones logarítmicas

a) $\ln\frac{10}{9} = \ln 10 - \ln 9$ — Propiedad 4.

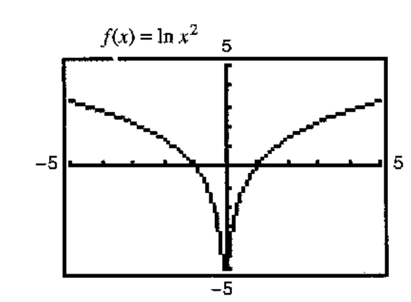
b) $\ln\sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$ — Reescribir con exponente racional.

$= \frac{1}{2}\ln(3x+2)$ — Propiedad 3.

c) $\ln\frac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$ — Propiedad 4.

$= \ln 6 + \ln x - \ln 5$ — Propiedad 2.

d)
$$\begin{aligned}\ln\frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}} &= \ln(x^2+3)^2 - \ln\left(x\sqrt[3]{x^2+1}\right)\\ &= 2\ln(x^2+3) - [\ln x + \ln(x^2+1)^{1/3}]\\ &= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \ln(x^2+1)^{1/3}\\ &= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$



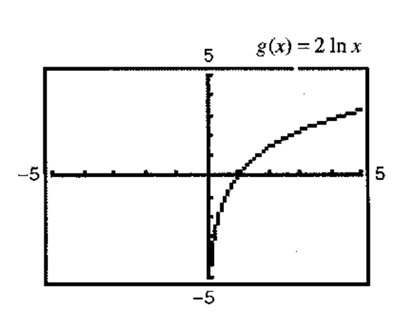
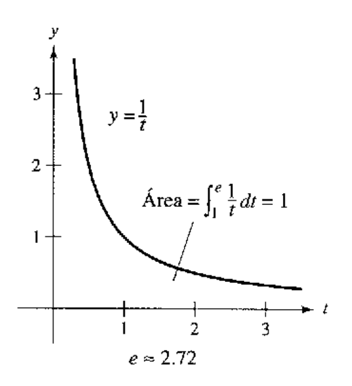


Figura 5.4

Cuando se usan las propiedades de los logaritmos para reexpresar funciones logarítmicas, hay que analizar si el dominio de la función reescrita es el mismo que el de la función original. Así, el dominio de $f(x) = \ln x^2$ son todos los números reales salvo $x = 0$, mientras que el de $g(x) = 2\ln x$ son todos los números reales positivos (ver figura 5.4).



e es la base de los logaritmos naturales porque $\ln e = 1$
Figura 5.5

El número e

Es muy probable que se hayan estudiado ya los logaritmos en cursos anteriores de álgebra. Ahí, sin las ventajas del cálculo, suelen definirse en términos de un número ***base***. Por ejemplo, los logaritmos comunes tienen base 10 porque $\log_{10} 10 = 1$. (Volveremos a esto en la sección 5.5.)

Para definir la **base de los logaritmos naturales**, se aprovecha que la función logaritmo natural es continua, inyectiva y con recorrido o rango de $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, debe existir un único número real x tal que $\ln x = 1$, como muestra la figura 5.5. Este número se denota por la letra e. Puede demostrarse que e es irracional y que tiene un valor aproximado.

$$e \approx 2.71828182846$$

Definición de e

La letra e denota el número real positivo tal que

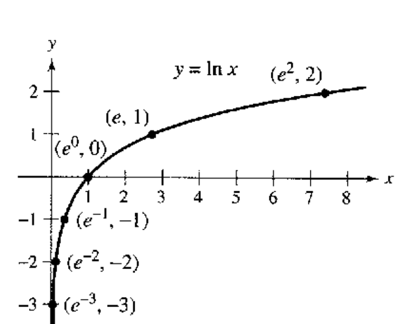
$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre el número e, ver el artículo "Unexpected Occurrences of the Number e", de Harris S. Shultz y Bill Leonard en la revista *Mathematics Magazine*.

Sabiendo que $\ln e = 1$, usar las propiedades logarítmicas para calcular los logaritmos naturales de otros números. Por ejemplo, usando la propiedad

$$\begin{aligned}\ln(e^n) &= n \ln e \\ &= n(1) \\ &= n\end{aligned}$$

se puede evaluar $\ln(e^n)$ para diversas potencias de n, como se muestran en la tabla y en la figura 5.6.



Si $x = e^n$, entonces $\ln x = n$
Figura 5.6

x	$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$	$\frac{1}{e} \approx 0.368$	$e^0 = 1$	$e \approx 2.718$	$e^2 \approx 7.389$
$\ln x$	-3	-2	-1	0	1	2

Los logaritmos de esta tabla son fáciles de calcular de esa forma porque los valores de x son potencias de e. La mayoría de los logaritmos, por el contrario, es preferible hallarlos con una calculadora.

EJEMPLO 2 Evaluación de expresiones con logaritmos naturales

a) $\ln 2 \approx 0.693$

b) $\ln 32 \approx 3.466$

c) $\ln 0.1 \approx -2.303$

La derivada de la función logaritmo natural

La derivada de la función logaritmo natural viene dada por el teorema 5.3. La primera parte del teorema proviene de la definición de la función logaritmo natural como una antiderivada o primitiva. La segunda parte del teorema es simplemente la versión de la regla de la cadena de la primera parte.

TEOREMA 5.3 Derivada de la función logaritmo natural

Sea u una función derivable en x

1. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}, \quad x > 0$ **2.** $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}, \quad u > 0$

EJEMPLO 3 Derivación de funciones logarítmicas

EXPLORACIÓN

Usar una computadora para representar

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

y

$$y_2 = \frac{d}{dx}[\ln x]$$

en la misma pantalla, con $0.1 \leq x \leq 5$ y $-2 \leq y \leq 8$. Explicar por qué las gráficas aparentemente son idénticas.

a) $\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ $\quad u = 2x$

b) $\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1}$ $\quad u = x^2 + 1$

c) $\frac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\frac{d}{dx}[x]\right)$ Regla del producto.

$$= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$

d) $\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$ Regla de la cadena.

$$= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$$

Napier utilizaba las propiedades de los logaritmos para simplificar *cálculos* con productos, cocientes y potencias. Por supuesto, actualmente con las calculadoras a nuestra disposición hay poco lugar para esas aplicaciones de los logaritmos. No obstante, es de gran valor el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar derivaciones de productos, cocientes y potencias.

EJEMPLO 4 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Diferenciar $f(x) = \ln\sqrt{x + 1}$.

Solución Como

$$f(x) = \ln\sqrt{x + 1} = \ln(x + 1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x + 1)$$ Reescribir antes de derivar.

se puede escribir

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1}{2(x + 1)}.$$ Derivada.

EJEMPLO 5 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.

Solución

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$ Escribir la función original.

$$= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1)$$ Reescribir antes de derivar.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right)$$ Derivar.

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$ Simplificar.

NOTA En los ejemplos 4 y 5 se puede ver la ventaja de aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar. Considerar, por ejemplo, la dificultad de derivar directamente la función del ejemplo 5.

En ocasiones, es conveniente usar los logaritmos como ayuda en la derivación de funciones no logarítmicas. Este procedimiento se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 6 Derivación logarítmica

Hallar la derivada de

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2.$$

Solución Notar que $y > 0$ para todo $x \neq 2$. Así, $\ln y$ está definido. Iniciar aplicando el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación. Y a continuación aplicar las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita. Por último, despejar y'.

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2$$ Escribir la ecuación original.

$$\ln y = \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$ Aplicar logaritmo natural en ambos lados.

$$\ln y = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$ Propiedades de los logaritmos.

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$ Derivar.

$$= \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}$$ Simplificar.

$$y' = y\left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$ Despejar y'.

$$= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right]$$ Sustituir y.

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$ Simplificar.

Puesto que el logaritmo natural no está definido para números negativos, encontraremos con frecuencia expresiones del tipo $\ln|u|$. El siguiente teorema afirma que se pueden derivar funciones de la forma $y = \ln|u|$ ignorando el signo del valor absoluto.

TEOREMA 5.4 Derivadas con valores absolutos

Si u es una función derivable de x tal que $u \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}.$$

Demostración Si $u > 0$, entonces $|u| = u$, y el resultado se obtiene aplicando el teorema 5.3. Si $u < 0$, entonces $|u| = -u$, y se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|u|] &= \frac{d}{dx}[\ln(-u)]\\ &= \frac{-u'}{-u}\\ &= \frac{u'}{u}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Derivadas con valores absolutos

Hallar la derivada de

$$f(x) = \ln|\cos x|.$$

Solución Según el teorema 5.4, tomar $u = \cos x$ y escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|\cos x|] &= \frac{u'}{u} && \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}\\ &= \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} && u = \cos x\\ &= -\tan x. && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Localización de extremos relativos

Localizar los extremos relativos de

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3).$$

Solución Al derivar y, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}.$$

Como $dy/dx = 0$ para $x = -1$, al aplicar el criterio de la primera derivada se puede concluir que el punto $(-1, \ln 2)$ es un mínimo relativo. Y como no hay más puntos críticos, ése es el único extremo relativo (ver figura 5.7).

$y = \ln(x^2 + 2x + 3)$

$(-1, \ln 2)$

Mínimo relativo

La derivada de y cambia de negativo a positivo en $x = -1$

Figura 5.7

Ejercicios de la sección 5.1

1. Completar la tabla usando la computadora y la regla de Simpson con $n = 10$, aproximar la integral $\int_1^x (1/t)\,dt$.

x	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\,dt$							

2. *a)* Dibujar los puntos generados en el ejercicio 1 y conectarlos con una curva suave. Comparar el resultado con la gráfica de $y = \ln x$.

b) Usar la computadora para representar la gráfica $y = \int_1^x (1/t)\,dt$ para $0.2 \le x \le 4$. Comparar los resultados con la gráfica de $y = \ln x$.

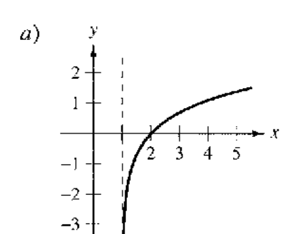
En los ejercicios 3 a 6, usar la computadora para evaluar la función logaritmo *a)* usando la tecla logaritmo natural y *b)* evaluando la integral $\int_1^x (1/t)\,dt$.

3. $\ln 45$ **4.** $\ln 8.3$

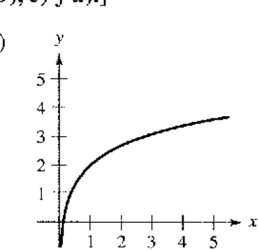
5. $\ln 0.8$ **6.** $\ln 0.6$

En los ejercicios 7 a 10, comparar la función con los gráficos. [Las gráficas están etiquetadas *a)*, *b)*, *c)* y *d)*.]

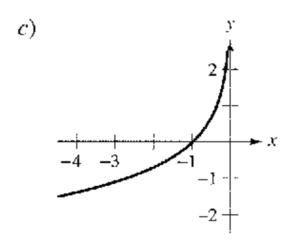
a)



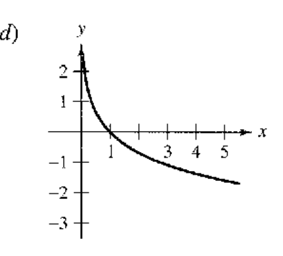
b)



c)



d)



7. $f(x) = \ln x + 2$ **8.** $f(x) = -\ln x$

9. $f(x) = \ln(x - 1)$ **10.** $f(x) = -\ln(-x)$

En los ejercicios 11 a 16, trazar la gráfica de la función y su dominio.

11. $f(x) = 3 \ln x$ **12.** $f(x) = -2 \ln x$

13. $f(x) = \ln 2x$ **14.** $f(x) = \ln|x|$

15. $f(x) = \ln(x - 1)$ **16.** $g(x) = 2 + \ln x$

En los ejercicios 17 y 18, usar las propiedades de los logaritmos para aproximar el logaritmo indicado, teniendo que $\ln 2 \approx 0.6931$ y $\ln 3 \approx 1.0986$.

17. *a)* $\ln 6$ *b)* $\ln \frac{2}{3}$ *c)* $\ln 81$ *d)* $\ln \sqrt{3}$

18. *a)* $\ln 0.25$ *b)* $\ln 24$ *c)* $\ln \sqrt[3]{12}$ *d)* $\ln \frac{1}{72}$

En los ejercicios 19 a 28, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar las expresiones.

19. $\ln \frac{2}{3}$ **20.** $\ln \sqrt{2^3}$

21. $\ln \dfrac{xy}{z}$ **22.** $\ln(xyz)$

23. $\ln \sqrt[3]{a^2 + 1}$ **24.** $\ln \sqrt{a - 1}$

25. $\ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3}\right)^3$ **26.** $\ln(3e^2)$

27. $\ln z(z - 1)^2$ **28.** $\ln \dfrac{1}{e}$

En los ejercicios 29 a 34, escribir la expresión como el logaritmo de una única cantidad.

29. $\ln(x - 2) - \ln(x + 2)$ **30.** $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$

31. $\frac{1}{3}[2 \ln(x + 3) + \ln x - \ln(x^2 - 1)]$

32. $2[\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

33. $2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

34. $\frac{3}{2}[\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

En los ejercicios 35 y 36, *a)* verificar que $f = g$ usando una computadora para representar f y g en la misma pantalla. *b)* Entonces verificar que $f = g$ algebraicamente.

35. $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4}$, $x > 0$, $g(x) = 2 \ln x - \ln 4$

36. $f(x) = \ln \sqrt{x(x^2 + 1)}$, $g(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x^2 + 1)]$

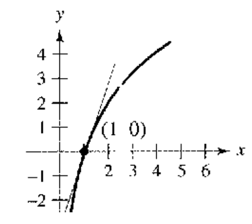
En los ejercicios 37 a 40, calcular el límite.

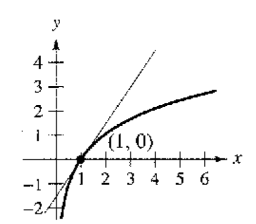
37. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x - 3)$ **38.** $\lim\limits_{x \to 6^-} \ln(6 - x)$

39. $\lim\limits_{x \to 2^-} \ln[x^2(3 - x)]$ **40.** $\lim\limits_{x \to 5^+} \ln \dfrac{x}{\sqrt{x - 4}}$

En los ejercicios 41 a 44, escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función logarítmica en el punto (1, 0).

41. $y = \ln x^3$ **42.** $y = \ln x^{3/2}$





43. $y = \ln x^2$

44. $y = \ln x^{1/2}$

En los ejercicios 45 a 70, hallar la derivada de la función.

45. $g(x) = \ln x^2$

46. $h(x) = \ln(2x^2 + 1)$

47. $y = (\ln x)^4$

48. $y = x \ln x$

49. $y = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

50. $y = \ln\sqrt{x^2 - 4}$

51. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)$

52. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x + 3}\right)$

53. $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$

54. $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$

55. $y = \ln(\ln x^2)$

56. $y = \ln(\ln x)$

57. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

58. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

59. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{4 + x^2}}{x}\right)$

60. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$

61. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

62. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 4}}{2x^2} - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{x^2 + 4}}{x}\right)$

63. $y = \ln|\operatorname{sen} x|$

64. $y = \ln|\csc x|$

65. $y = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$

66. $y = \ln|\sec x + \tan x|$

67. $y = \ln\left|\dfrac{-1 + \operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x}\right|$

68. $y = \ln\sqrt{2 + \cos^2 x}$

69. $f(x) = \displaystyle\int_2^{\ln(2x)} (t + 1)\, dt$

70. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} (t^2 + 3)\, dt$

En los ejercicios 71 a 76, *a*) encontrar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) usar una computadora para representar la función y la recta tangente en el punto, y *c*) usar la función *derivada* de la computadora para confirmar los resultados.

71. $f(x) = 3x^2 - \ln x, \quad (1, 3)$

72. $f(x) = 4 - x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right), \quad (0, 4)$

73. $f(x) = \ln\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, \ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$

74. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\ln(x^2), \quad (1, 0)$

75. $f(x) = x^3 \ln x, \quad (1, 0)$

76. $f(x) = \dfrac{1}{2}x\ln(x^2), \quad (-1, 0)$

En los ejercicios 77 y 78, usar la derivación implícita para encontrar *dy/dx*.

77. $x^2 - 3\ln y + y^2 = 10$

78. $\ln xy + 5x = 30$

En los ejercicios 79 y 80, usar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

79. $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 0)$

80. $y^2 + \ln(xy) = 2, \quad (e, 1)$

En los ejercicios 81 y 82, mostrar que la función es una solución de la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
81.	$y = 2\ln x + 3$	$xy'' + y' = 0$
82.	$y = x\ln x - 4x$	$x + y - xy' = 0$

En los ejercicios 83 a 88, hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión. Usar una computadora para confirmar los resultados.

83. $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

84. $y = x - \ln x$

85. $y = x\ln x$

86. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

87. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

88. $y = x^2 \ln\dfrac{x}{4}$

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 89 y 90, usar una computadora para representar la función. A continuación, representar**

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

y

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \tfrac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = 1$.

89. $f(x) = \ln x$

90. $f(x) = x\ln x$

En los ejercicios 91 y 92, usar el método de Newton para aproximar, con tres cifras decimales, la coordenada *x* del punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Usar una computadora para verificar el resultado.

91. $y = \ln x, \quad y = -x$

92. $y = \ln x, \quad y = 3 - x$

En los ejercicios 93 a 98, usar derivación logarítmica para encontrar *dy/dx*.

93. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$

94. $y = \sqrt{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

95. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x - 2}}{(x - 1)^2}$

96. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

97. $y = \dfrac{x(x - 1)^{3/2}}{\sqrt{x + 1}}$

98. $y = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

Desarrollo de conceptos

99. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función logaritmo natural.

100. Definir la base de la función logaritmo natural.

101. Suponer que f es una función positiva y derivable en toda la recta real. Sea $g(x) = \ln f(x)$.

a) Si g es decreciente, ¿debe f ser decreciente necesariamente? Explicar la respuesta.

b) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba, ¿lo es necesariamente la de g? Explicar la respuesta.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

102. Considerar la función $f(x) = x - 2\ln x$ en $[1, 3]$.

a) Explicar por qué el teorema de Rolle (sección 3.2) no es aplicable.

b) ¿Es verdadera para f la conclusión del teorema de Rolle? Explicar la respuesta.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 103 y 104, determinar si las ecuaciones son verdaderas o falsas. Si son falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

103. $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$

104. Si $y = \ln \pi$, entonces $y' = 1/\pi$.

105. ***Casa de empeño*** El término t (en años) de una hipoteca de \$120 000 a 10% de interés puede aproximarse por

$$t = \frac{5.315}{-6.7968 + \ln x}, \quad x > 1000$$

donde x es la mensualidad en dólares

a) Representar el modelo en una computadora.

b) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de \$1 167.41 de mensualidad. ¿Cuál es la cantidad total a pagar?

c) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de \$1 068.45. ¿Cuál es la cantidad total a pagar?

d) Encontrar el ritmo de cambio instantáneo o tasa de t con respecto a x cuando $x = 1\ 167.41$ y $x = 1\ 068.45$.

e) Escribir un pequeño párrafo describiendo las ventajas de pagar mensualidades altas.

106. ***Intensidad del sonido*** La relación entre el número de decibeles β y la intensidad del sonido I en watts por cm^2 es

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-16}}\right).$$

Usar las propiedades de los logaritmos para simplificar la fórmula y determinar el número de decibeles de un sonido con intensidad de 10^{-10} watts por cm^2.

107. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas T (°F) de ebullición del agua a ciertas presiones p (libras por pulgada cuadrada). (*Fuente*: *Standard Handbook of Mechanical Engineers*)

p	5	10	14.696 (1 atm)	20
T	162.24°	193.21°	212.00°	227.96°

p	30	40	60	80	100
T	250.33°	267.25°	292.71°	312.03°	327.81°

Un modelo que ajusta los datos es

$$T = 87.97 + 34.96 \ln p + 7.91\sqrt{p}.$$

a) Usar una computadora para representar los datos y el modelo gráficamente.

b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de T respecto de p cuando $p = 10$ y $p = 70$.

c) Usar una computadora para representar T'. Encontrar $\lim_{p\to\infty} T'(p)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema.

108. ***Modelo matemático*** La presión de la atmósfera decrece con el incremento de la altitud. A nivel del mar, el promedio de la presión del aire es una atmósfera (1.033227 kilogramos por centímetro cuadrado). La tabla muestra la presión p (en atmósferas) para algunas altitudes h (en kilómetros).

h	0	5	10	15	20	25
p	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Usar una computadora para ajustar un modelo de la forma $p = a + b \ln h$ a esos datos. Explicar por qué el resultado es un mensaje de error.

b) Usar una computadora para ajustar el modelo logarítmico de $h = a + b \ln p$ a esos datos.

c) Usar una computadora para representar los datos y el modelo.

d) Usar el modelo para estimar la altitud cuando $p = 0.75$.

e) Usar el modelo para estimar la presión cuando $h = 13$.

f) Usar el modelo para encontrar el ritmo o velocidad de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 20$. Interpretar los resultados.

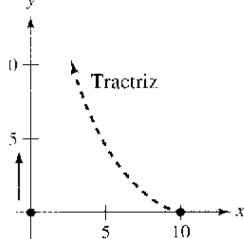
109. ***Tractriz*** Una persona camina por un muelle recto tirando de un bote por medio de una cuerda de 10 metros. El bote viaja a lo largo de un camino conocido como tractriz (ver figura). La ecuación de esta ruta es

$$y = 10 \ln\left(\frac{10 + \sqrt{100 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{100 - x^2}.$$

a) Usar una computadora para representar la función.

b) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando $x = 5$ y $x = 9$?

c) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando $x \to 10$?



110. ***Conjetura*** Usar una computadora para representar f y g en la misma pantalla y determinar cuál de ellas crece a mayor ritmo para valores "grandes" de x. ¿Qué se puede concluir del ritmo de crecimiento de la función logaritmo natural?

a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$

111. Demostrar que la función logaritmo natural es inyectiva.

112. *a*) Usar una computadora para representar $y = \sqrt{x} - 4 \ln x$.

b) Usar la gráfica para identificar algún mínimo relativo y los puntos de inflexión.

c) Usar el cálculo para verificar la respuesta del apartado *b*).

Sección 5.2 La función logaritmo natural y la integración

- **Usar la regla log de integración para integrar una función.**
- **Integración de funciones trigonométricas.**

Integración de funciones racionales **En el capítulo 4 se estudiaron las reglas a seguir para integrar cualquier función polinómica. La regla log presentada en esta sección facilita la integración de funciones racionales. Por ejemplo, cada una de las siguientes funciones puede ser integrada con la regla log.**

$\frac{2}{x}$	Ejemplo 1
$\frac{1}{4x-1}$	Ejemplo 2
$\frac{x}{x^2+1}$	Ejemplo 3
$\frac{3x^2+1}{x^3+x}$	Ejemplo 4*a*
$\frac{x+1}{x^2+2x}$	Ejemplo 4*c*
$\frac{1}{3x+2}$	Ejemplo 4*d*
$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$	Ejemplo 5
$\frac{2x}{(x+1)^2}$	Ejemplo 6

Hay todavía muchas funciones racionales que no pueden ser integradas usando la regla log. Dar ejemplos de estas funciones y explicar el razonamiento.

Regla log para integración

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

que se estudiaron en la sección anterior producen las siguientes reglas de integración.

TEOREMA 5.5 Regla log para integración

Sea u una función derivable de x.

1. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ **2.** $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Como $du = u'\,dx$, la segunda fórmula puede expresarse como

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C. \qquad \text{Forma alternativa para la regla log.}$$

EJEMPLO 1 Uso de la regla log para integración

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x}\,dx &= 2\int \frac{1}{x}\,dx && \text{Regla del múltiplo constante.}\\ &= 2\ln|x| + C && \text{Regla log para integración.}\\ &= \ln(x^2) + C && \text{Propiedad de los logaritmos.}\end{aligned}$$

Como x^2 no puede ser negativo, el valor absoluto no es necesario en la forma final de la primitiva o antiderivada.

EJEMPLO 2 Uso de la regla log con cambio de variable

Hallar $\int \frac{1}{4x-1}\,dx$.

Solución Si se toma $u = 4x - 1$, entonces $du = 4\,dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x-1}\,dx &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4x-1}\right)4\,dx && \text{Multiplicar y dividir por 4.}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du && \text{Sustituir } u = 4x-1.\\ &= \frac{1}{4}\ln|u| + C && \text{Aplicar la regla log.}\\ &= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C && \text{Sustitución regresiva.}\end{aligned}$$

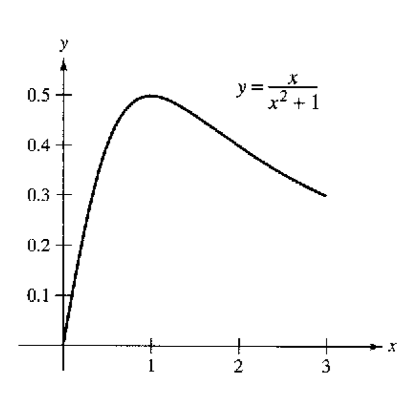
En el ejemplo 3 usar la alternativa de la regla log. Para aplicar esta regla, buscar cocientes en los que el numerador sea la derivada del denominador.

EJEMPLO 3 Cálculo de un área con la regla log

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

el eje x y la recta $x = 3$.



$$\text{Área} = \int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$$

El área de la región limitada por la gráfica de y, el eje x, y $x = 3$ es $\frac{1}{2}\ln 10$
Figura 5.8

Solución En la figura 5.8 se puede observar que el área está dada por la integral definida

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx.$$

Si se toma $u = x^2 + 1$, entonces $u' = 2x$. Para aplicar la regla log, multiplicar y dividir entre 2 como se muestra.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx && \text{Multiplicar y dividir entre 2.} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2 + 1)\Big]_0^3 && \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C \\
&= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1) \\
&= \frac{1}{2}\ln 10 && \ln 1 = 0 \\
&\approx 1.151
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Integración de cocientes para la regla log

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\,dx = \ln|x^3 + x| + C$ $\qquad u = x^3 + x$

b) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \ln|\tan x| + C$ $\qquad u = \tan x$

c) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}\,dx$ $\qquad u = x^2 + 2x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{3x + 2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x + 2}\,dx$ $\qquad u = 3x + 2$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x + 2| + C$$

Con antiderivadas o primitivas que contienen logaritmos es fácil obtener formas que hasta cierto punto se ven diferentes, pero que, sin embargo, son equivalentes. Por ejemplo, ¿cuáles de las siguientes son equivalentes a la antiderivada o primitiva en el ejemplo 4*d*?

$$\ln|(3x + 2)^{1/3}| + C, \quad \frac{1}{3}\ln\left|x + \frac{2}{3}\right| + C, \quad \ln|3x + 2|^{1/3} + C$$

Las integrales a las que se aplica la regla log aparecen a menudo disfrazadas. Por ejemplo, si una función racional tiene *el numerador de grado mayor o igual que el del denominador*, una división puede revelar una forma a la que se pueda aplicar la regla log. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Dividir antes de integrar

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$.

Solución Primero se utiliza la división larga para reescribir el integrando.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ x^2+1\,\overline{)\,x^2+x+1} \\ \underline{x^2\quad\;+1} \\ x \end{array} \Longrightarrow 1+\frac{x}{x^2+1}$$

Ahora, se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx &= \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx && \text{Reescribir usando la división larga.} \\ &= \int dx + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx && \text{Reescribir como dos integrales.} \\ &= x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C. && \text{Integrar.} \end{aligned}$$

Verificar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

El siguiente ejemplo presenta otro caso en que el uso de la regla log está disfrazado. En este caso, un cambio la variable ayuda a reconocer la regla log.

EJEMPLO 6 Cambio de variable con la regla log

Hallar $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$.

Solución Si se toma $u = x+1$, entonces $du = dx$ y $x = u-1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx &= \int\frac{2(u-1)}{u^2}\,du && \text{Sustituir.} \\ &= 2\int\left(\frac{u}{u^2}-\frac{1}{u^2}\right)du && \text{Reescribir como dos fracciones.} \\ &= 2\int\frac{du}{u} - 2\int u^{-2}\,du && \text{Reescribir como dos integrales.} \\ &= 2\ln|u| - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+C && \text{Integrar.} \\ &= 2\ln|u| + \frac{2}{u}+C && \text{Simplificar.} \\ &= 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1}+C && \text{Sustitución regresiva.} \end{aligned}$$

Comprobar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un programa de integración simbólica, se puede usar para resolver las integrales indefinidas de los ejemplos 5 y 6. Comparar las formas de las primitivas dadas con los resultados obtenidos en los ejemplos 5 y 6.

Al estudiar los métodos mostrados en los ejemplos 5 y 6, está claro que ambos métodos involucran reescribir el integrando disfrazado ajustándolo a una o más fórmulas básicas de integración. En las próximas secciones del capítulo 5 y en el capítulo 8, se estudiarán ampliamente las técnicas de integración. Para dominar estas técnicas, se requiere reconocer la naturaleza de "probar y errar" de la integración. En este sentido, la integración no es tan directa como la derivación. La derivación se plantea así:

"He aquí la pregunta; ¿cuál es la respuesta?"

La integración viene a ser más bien

"He aquí la respuesta; ¿cuál es la pregunta?"

Las siguientes son estrategias que se pueden usar para la integración.

AYUDA DE ESTUDIO Tener en cuenta que se puede comprobar la respuesta de un problema de integración al derivar la respuesta. Como se ve en el ejemplo 7, la derivada de $y = \ln|\ln x| + C$ es $y' = 1/(x \ln x)$.

Estrategias para la integración

1. Memorizar una lista básica de fórmulas de integración. (Incluyendo las dadas en esta sección, ya disponemos de 12 fórmulas: la regla de las potencias, la regla log y 10 reglas trigonométricas. Al final de la sección 5.7 la lista se ampliará a 20 reglas básicas.)
2. Buscar una fórmula de integración que se parezca total o parcialmente al integrando, y por prueba y error elegir una u que ajuste el integrando a la fórmula.
3. Si no se puede hallar una sustitución u adecuada, intentar transformar el integrando. Mediante identidades trigonométricas, multiplicación y división por la misma cantidad, o suma y resta de una misma cantidad. Se requiere ingenio.
4. Si se tiene acceso a un software de computadora que resuelva antiderivadas, es conveniente usarlo.

EJEMPLO 7 Sustitución *u* y la regla log

Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

Solución La solución se puede escribir como una integral indefinida.

$$y = \int \frac{1}{x \ln x}\,dx$$

Como el integrando es un cociente con denominador de potencia 1, se puede intentar utilizar la regla log. Hay tres formas posibles para u. La forma $u = x$ y $u = x \ln x$, no logra ajustarse a la forma u'/u de la regla log, pero sí la tercera forma. Haciendo $u = \ln x$, $u' = 1/x$, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x}\,dx &= \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx && \text{Dividir numerador y denominador por } x.\\
&= \int \frac{u'}{u}\,dx && \text{Sustituir } u = \ln x.\\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla log.}\\
&= \ln|\ln x| + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$.

Integrales de funciones trigonométricas

En la sección 4.1 se estudiaron seis reglas de integración trigonométricas, las seis que corresponden directamente a reglas de derivación. Con la regla log, se puede completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométricas.

EJEMPLO 8 Usando una identidad trigonométrica

Hallar $\int \tan x \, dx$.

Solución Esta integral no parece adaptable a ninguna de las reglas básicas de la lista. Sin embargo, usando una identidad trigonométrica se tiene

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$$

Sabiendo que $D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x$, tenemos $u = \cos x$ y escribimos

$$\begin{aligned}
\int \tan x \, dx &= -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx && \text{Identidad trigonométrica.} \\
&= -\int \frac{u'}{u} \, dx && \text{Sustituir } u = \cos x. \\
&= -\ln|u| + C && \text{Aplicar regla log.} \\
&= -\ln|\cos x| + C. && \text{Sustitución hacia atrás.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 8 se usó una identidad trigonométrica para derivar una regla de integración de la función tangente. En el siguiente ejemplo, se efectúa un paso algo inusual (multiplicar y dividir por una misma cantidad) para llegar a una fórmula de integración para la función secante.

EJEMPLO 9 Obtención de la fórmula para secante

Hallar $\int \sec x \, dx$.

Solución Considerar el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx
\end{aligned}$$

Tomando como u el denominador de este cociente se obtiene

$$u = \sec x + \tan x \quad \Longrightarrow \quad u' = \sec x \tan x + \sec^2 x.$$

Así, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx && \text{Reescribir el integrando.} \\
&= \int \frac{u'}{u} \, dx && \text{Sustituir } u = \sec x + \tan x. \\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla log.} \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Con los resultados de los ejemplos 8 y 9, se dispone de las fórmulas de integración de sen x, cos x, tan x y sec x. Las seis reglas trigonométricas se resumen a continuación.

NOTA Usando las identidades trigonométricas y las propiedades de los logaritmos, se pueden reescribir esas seis reglas de integración de otras maneras. Por ejemplo,

$$\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C.$$

(ver ejercicios 83 a 86).

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

EJEMPLO 10 Integración de funciones trigonométricas

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$.

Solución Recordando que $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, para escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx \qquad \sec x \geq 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \\
&= \ln|\sec x + \tan x| \Big]_0^{\pi/4} \\
&= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1 \\
&\approx 0.881.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Encontrar un valor promedio

Encontrar el valor promedio de $f(x) = \tan x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Un valor promedio} &= \frac{1}{(\pi/4) - 0} \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx \qquad \text{Valor promedio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx. \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx \qquad \text{Simplificar.} \\
&= \frac{4}{\pi}\Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} \qquad \text{Integrar.} \\
&= -\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right] \\
&= -\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\approx 0.441
\end{aligned}$$

Figura 5.9

El valor promedio está alrededor de 0.441, como se muestra en la figura 5.9.

Ejercicios de la sección 5.2

En los ejercicios 1 a 24, encontrar la integral indefinida.

1. $\int \frac{5}{x}\,dx$
2. $\int \frac{10}{x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x-5}\,dx$
5. $\int \frac{1}{3-2x}\,dx$
6. $\int \frac{1}{3x+2}\,dx$
7. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
8. $\int \frac{x^2}{3-x^3}\,dx$
9. $\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$
10. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
11. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}\,dx$
12. $\int \frac{x(x+2)}{x^3+3x^2-4}\,dx$
13. $\int \frac{x^2-3x+2}{x+1}\,dx$
14. $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$
15. $\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx$
16. $\int \frac{x^3-6x-20}{x+5}\,dx$
17. $\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2}\,dx$
18. $\int \frac{x^3-3x^2+4x-9}{x^2+3}\,dx$
19. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
20. $\int \frac{1}{x\ln(x^3)}\,dx$
21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$
22. $\int \frac{1}{x^{2/3}(1+x^{1/3})}\,dx$
23. $\int \frac{2x}{(x-1)^2}\,dx$
24. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3}\,dx$

En los ejercicios 25 a 28, hallar la integral indefinida para sustitución *u*. (*Sugerencia:* Tomar *u* como el denominador del integrando.)

25. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$
26. $\int \frac{1}{1+\sqrt{3x}}\,dx$
27. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\,dx$
28. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

En los ejercicios 29 a 36, encontrar la integral indefinida.

29. $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$
30. $\int \tan 5\theta\,d\theta$
31. $\int \csc 2x\,dx$
32. $\int \sec\frac{x}{2}\,dx$
33. $\int \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,dt$
34. $\int \frac{\csc^2 t}{\cot t}\,dt$
35. $\int \frac{\sec x\tan x}{\sec x-1}\,dx$
36. $\int (\sec t+\tan t)\,dt$

En los ejercicios 37 a 40, resolver gráficamente la ecuación diferencial. Usar una computadora para representar tres soluciones, una de las cuales tiene que pasar por el punto indicado.

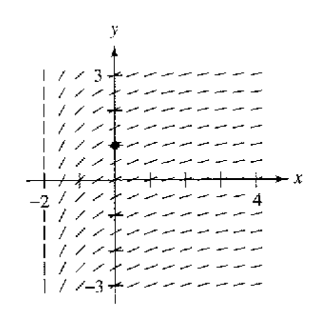
37. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2-x}$, $(1, 0)$
38. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-9}$, $(0, 4)$
39. $\frac{ds}{d\theta} = \tan 2\theta$, $(0, 2)$
40. $\frac{dr}{dt} = \frac{\sec^2 t}{\tan t+1}$, $(\pi, 4)$

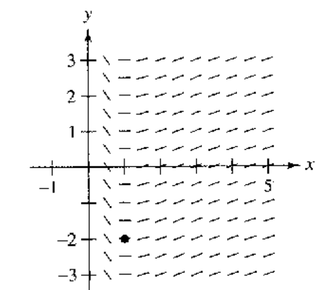
41. Determinar la función f si $f''(x) = \frac{2}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $x > 0$.

42. Determinar la función f si $f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} - 2$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 0$, $x > 1$.

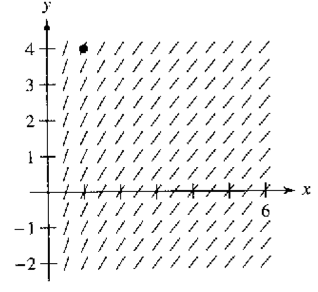
Campos de pendientes **En los ejercicios 43 a 46, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial del campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar por integración la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en una computadora. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

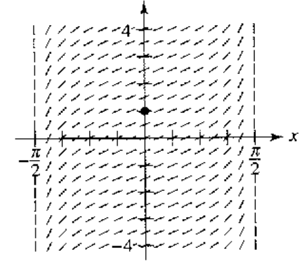
43. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$, $(0, 1)$
44. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}$, $(1, -2)$





45. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}$, $(1, 4)$
46. $\frac{dy}{dx} = \sec x$, $(0, 1)$





En los ejercicios 47 a 54, calcular la integral. Verificar el resultado con computadora.

47. $\int_0^4 \frac{5}{3x+1}\,dx$ **48.** $\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2}\,dx$

49. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$ **50.** $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

51. $\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$ **52.** $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$

53. $\int_1^2 \frac{1-\cos\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ **54.** $\int_{0.1}^{0.2} (\csc 2\theta - \cot 2\theta)^2\,d\theta$

En los ejercicios 55 a 60, usar un sistema algebraico por computadora para hallar o evaluar la integral.

55. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **56.** $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

57. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$ **58.** $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

59. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc x - \operatorname{sen} x)\,dx$ **60.** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

En los ejercicios 61 a 64, encontrar $F'(x)$.

61. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ **62.** $F(x) = \int_0^x \tan t\,dt$

63. $F(x) = \int_1^{3x} \frac{1}{t}\,dt$ **64.** $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$

Aproximación **En los ejercicios 65 y 66, determinar el valor que mejor aproxima el área de la región entre el eje x y la gráfica de la función en el intervalo dado. (Basar la elección en un esbozo de la región y no en cálculos.)**

65. $f(x) = \sec x,\ [0, 1]$

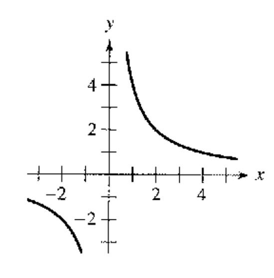
a) 6 *b)* −6 *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* 1.25 *e)* 3

66. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ [0, 4]$

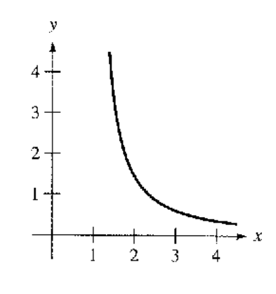
a) 3 *b)* 7 *c)* −2 *d)* 5 *e)* 1

Área **En los ejercicios 67 a 70, calcular el área de la región dada. Verificar el resultado con una computadora.**

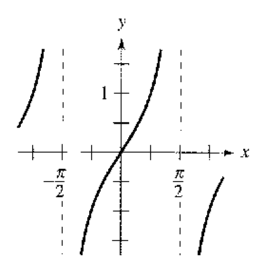
67. $y = \frac{4}{x}$



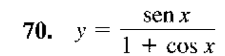
68. $y = \frac{2}{x\ln x}$

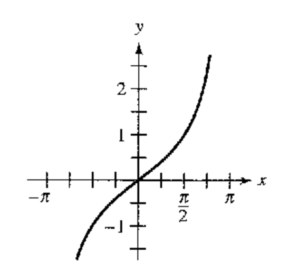


69. $y = \tan x$



70. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$





Área **En los ejercicios 71 a 74, calcular el área de la región delimitada por la gráfica de las ecuaciones. Verificar el resultado con una computadora.**

71. $y = \frac{x^2+4}{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$

72. $y = \frac{x+4}{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$

73. $y = 2\sec\frac{\pi x}{6},\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0$

74. $y = 2x - \tan(0.3x),\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$

Integración numérica **En los ejercicios 75 a 78 usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida. Tomar $n = 4$ y redondear la respuesta a 4 decimales. Verificar el resultado con una computadora.**

75. $\int_1^5 \frac{12}{x}\,dx$

76. $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+4}\,dx$

77. $\int_2^6 \ln x\,dx$

78. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 79 a 82, especificar la fórmula de integración adecuada. No integrar.

79. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

80. $\int \frac{x}{(x^2+4)^3}\,dx$

81. $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

82. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

En los ejercicios 83 a 86, mostrar que las dos fórmulas son equivalentes.

83. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$

84. $\int \cot x\, dx = \ln|\text{sen } x| + C$

$\int \cot x\, dx = -\ln|\csc x| + C$

85. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \sec x\, dx = -\ln|\sec x - \tan x| + C$

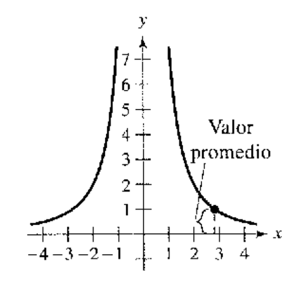
86. $\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

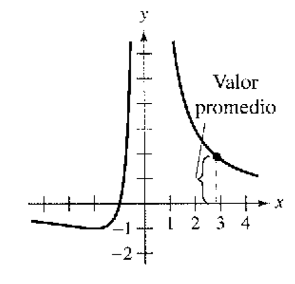
$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

En los ejercicios 87 a 90, encontrar el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.

87. $f(x) = \frac{8}{x^2}$, $[2, 4]$

88. $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2}$, $[2, 4]$





89. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $[1, e]$

90. $f(x) = \sec \frac{\pi x}{6}$, $[0, 2]$

91. ***Crecimiento de una población*** Una población de bacterias cambia a un ritmo

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1 + 0.25t}$$

donde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando $t = 0$) era 1 000. Escribir una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando $t = 3$ días.

92. ***Transferencia de calor*** Calcular el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300° F a 250° F evaluando

$$t = \frac{10}{\ln 2}\int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100}\, dT$$

donde t es el tiempo en minutos.

93. ***Precio medio*** La ecuación para la demanda de un producto es

$$p = \frac{90\,000}{400 + 3x}.$$

Calcular su precio medio en el intervalo $40 \le x \le 50$.

94. ***Ventas*** El ritmo o velocidad de cambio en las ventas S es inversamente proporcional al tiempo t ($t > 1$) medido en semanas. Encontrar S en función de t, si las ventas después de 2 y 4 semanas son 200 y 300 unidades, respectivamente.

95. ***Trayectoria ortogonal***

a) Usar una computadora para representar la ecuación $2x^2 - y^2 = 8$.

b) Evaluar la integral para hallar y^2 en términos de x.

$$y^2 = e^{-\int (1/x)\, dx}$$

Para un valor particular de la constante de integración, representar gráficamente el resultado en la misma pantalla usada en el apartado *a*).

c) Verificar que las tangentes a las gráficas de los apartados *a*) y *b*) son perpendiculares en los puntos de intersección.

96. Representar la función

$$f_k(x) = \frac{x^k - 1}{k}$$

para $k = 1$, 0.5 y 0.1 en [0, 10]. Hallar $\lim_{k \to 0^+} f_k(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 97 a 100, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que confirme que es falsa.**

97. $(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\ln x)$

98. $\int \ln x\, dx = (1/x) + C$

99. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|cx|, \quad c \ne 0$

100. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

101. Representar la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

en el intervalo $[0, \infty)$.

a) Encontrar el área delimitada por la gráfica de f y la recta $y = \frac{1}{2}x$.

b) Determinar los valores de la tangente m en los que la recta $y = mx$ y la gráfica de f están incluidos en la región finita.

c) Calcular el área de esta región como una función de m.

102. Probar que la función

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{t}\, dt$$

es constante en el intervalo $(0, \infty)$.

Sección 5.3 Funciones inversas

- **Verificar que una función es la inversa de otra.**
- **Determinar si una función tiene una función inversa.**
- **Encontrar la derivada de una función inversa.**

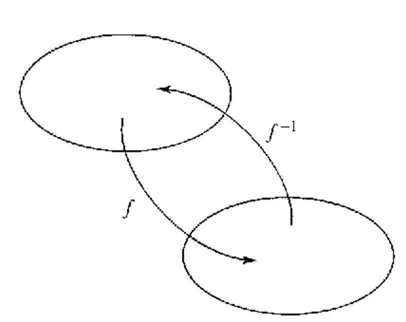
Funciones inversas

Recordar de la sección P.3 que una función se puede representar por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función $f(x) = x + 3$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{4, 5, 6, 7\}$, se puede escribir

$$f : \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}.$$

Por el intercambio de la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado se puede formar la **función inversa** de f. Esta función se denota por f^{-1}. Ésta es una función de B en A, y se escribe como

$$f^{-1} : \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}$$



Dominio de f = recorrido o rango de f^{-1}
Dominio de f^{-1} = recorrido o rango de f
Figura 5.10

Notar que el dominio de f es el recorrido o rango de f^{-1}, y viceversa, como se ilustra en la figura 5.10. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de "deshacer" cada una a la otra. Esto es, al componer f con f^{-1} o f^{-1} con f, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

EXPLORACIÓN

Cálculo de las funciones inversas Explicar cómo "deshacer" lo que hace cada una de las siguientes funciones. Usar la explicación para escribir la función inversa de f.

a) $f(x) = x - 5$

b) $f(x) = 6x$

c) $f(x) = \frac{x}{2}$

d) $f(x) = 3x + 2$

e) $f(x) = x^3$

f) $f(x) = 4(x - 2)$

Usar una computadora para representar cada función junto con su inversa. ¿Qué observación se puede hacer acerca de cada par de gráficas?

Definición de función inversa

Una función g es la **función inversa** de la función f si

$f(g(x)) = x$ para todo x en el dominio de g

y

$g(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f.

La función g se denota por f^{-1} (se lee como "inversa de f").

NOTA Aunque la notación utilizada para la función inversa se parece a la *notación exponencial*, es un uso distinto del -1 como superíndice. Esto es, en general, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$.

He aquí algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.
2. El dominio de f^{-1} es el recorrido o rango de f y el recorrido o rango f^{-1} es el dominio de f.
3. Una función puede no tener función inversa, pero si la tiene, la función inversa es única (ver el ejercicio 99).

Se puede pensar en f^{-1} como una operación que deshace lo hecho por f. Por ejemplo, la resta deshace lo que la suma hace, y la división deshace lo que hace la multiplicación. Usar la definición de función inversa para comprobar:

$f(x) = x + c$ y $f^{-1}(x) = x - c$ son funciones inversas una de la otra.

$f(x) = cx$ y $f^{-1}(x) = \frac{x}{c}$, $c \neq 0$ son funciones inversas una de la otra.

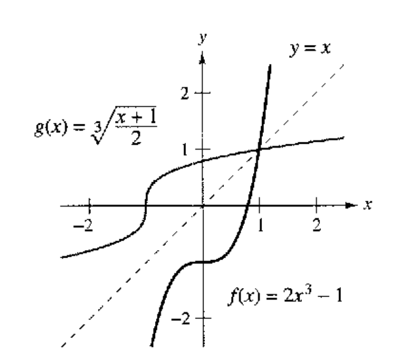
EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

$$f(x) = 2x^3 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$



f y g son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3-1)+1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).

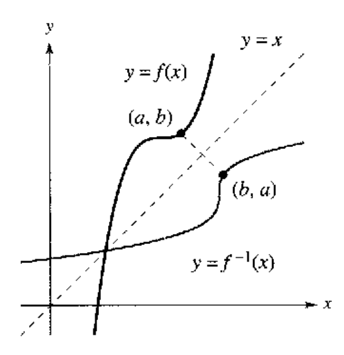
AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, compare las funciones f y g.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo en efecto se "deshace el proceso"?

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la de $-f$. Esta idea generaliza el siguiente teorema.



La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

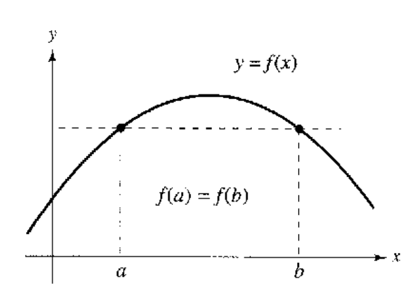
TEOREMA 5.6 Propiedad de reflexión de las funciones inversas

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

Demostración Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Así que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.



Si una recta horizontal corta dos veces la gráfica de f, entonces f no es inyectiva
Figura 5.13

Existencia de una función inversa

No todas las funciones tienen función inversa. El teorema 5.6 sugiere un criterio gráfico para saber si la admite: **el criterio de la recta horizontal** para una función inversa. Esta prueba establece que la función f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f en sólo un punto (figura 5.13). El siguiente teorema explica por qué la prueba de recta horizontal es válida. (Recordar de la sección 3.3 que la función es *estrictamente monótona* si ésta es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio.)

TEOREMA 5.7 Existencia de la función inversa

1. Una función tiene función inversa si y sólo si es inyectiva.
2. Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces ésta es inyectiva y por lo tanto tiene inversa.

Demostración Para demostrar la segunda parte del teorema, recordar de la sección P.3 que f es inyectiva si para x_1 y x_2 en su dominio

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

La contrapositiva de esta implicación es lógicamente equivalente y establece que

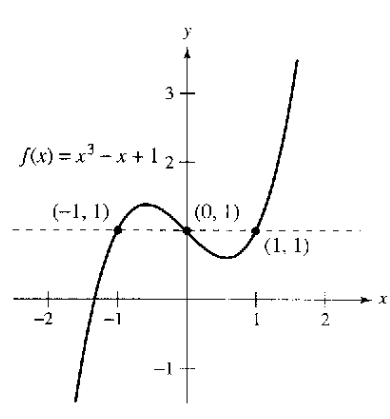
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ahora, se escoge x_1 y x_2 en el dominio de f. Si $x_1 \neq x_2$, entonces, como f es estrictamente monótona, se deduce que

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{o} \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, f es inyectiva en el intervalo. La demostración de la primera parte del teorema se deja como ejercicio (ver ejercicio 100).

a) Dado que f es creciente en todo su dominio, tiene función inversa



b) Dado que f no es inyectiva, no tiene una función inversa
Figura 5.14

EJEMPLO 2 Existencia de la función inversa

¿Cuál de las funciones tiene inversa?

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ *b*) $f(x) = x^3 - x + 1$

Solución

a) En la figura 5.14*a* se observa una gráfica de f, que aparenta que f es creciente en todo su dominio. Para verificar esto, notar que su derivada, $f'(x) = 3x^2 + 1$, es positiva para todos los valores reales de x. Por tanto, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa.

b) En la figura 5.14*b* se observa una gráfica de f, en la que se puede ver que la función no satisface el criterio de la recta horizontal. En otras palabras, no es inyectiva. Por ejemplo, f toma el mismo valor cuando $x = -1$, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \qquad \text{No inyectiva.}$$

En consecuencia, por el teorema 5.7, f no admite inversa.

NOTA Suele ser más fácil probar que una función tiene función inversa que hallarla. Sin ir más lejos, sería algebraicamente difícil hallar la función inversa del ejemplo 2*a*.

A continuación se sugiere un procedimiento para encontrar la función inversa de una función.

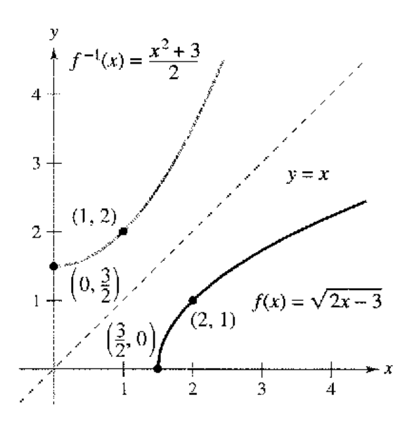
Estrategia para hallar la inversa de una función

1. Determinar mediante el teorema 5.7 si la función dada $y = f(x)$ admite inversa.
2. Despejar x como función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

EJEMPLO 3 Cálculo de la inversa de una función

Hallar la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}.$$



El dominio de f^{-1}, $[0, \infty)$ es el recorrido o rango de f
Figura 5.15

Solución La función admite inversa porque es creciente en todo su dominio (ver figura 5.15). Para encontrar una ecuación para la función inversa, se hace $y = f(x)$ y se despeja x en términos de y.

$\sqrt{2x-3} = y$	Hacer $y = f(x)$.
$2x - 3 = y^2$	Elevar al cuadrado.
$x = \dfrac{y^2+3}{2}$	Despejar x.
$y = \dfrac{x^2+3}{2}$	Intercambiar x y y.
$f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+3}{2}$	Sustituir y por $f^{-1}(x)$.

El dominio de f^{-1} es el recorrido o rango de f, que es $[0, \infty)$. Se puede verificar este resultado como sigue.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + 3}{2} = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

NOTA Recordar que se puede utilizar cualquier letra para representar la variable independiente. Así,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(s) = \frac{s^2+3}{2}$$

representan todas la misma función.

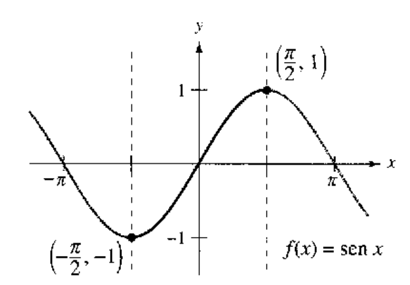
El teorema 5.7 es útil en el siguiente tipo de problemas. Supongamos dada una función que *no* es inyectiva en su dominio. Restringiendo el dominio a un intervalo en que la función sea estrictamente monótona, obtenemos una nueva función que ya es inyectiva en el dominio restringido.

EJEMPLO 4 Analizar si una función es inyectiva

Demostrar que la función

$$f(x) = \text{sen } x$$

no es inyectiva en toda la recta real. Después demostrar que $[-\pi/2, \pi/2]$ es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona.



f es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.16

Solución Es claro que f no es inyectiva, ya que muchos valores diferentes de x dan un mismo valor de y. Por ejemplo,

$$\text{sen } (0) = 0 = \text{sen } (\pi).$$

Además, f es creciente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, porque su derivada

$$f'(x) = \cos x$$

es positiva en él. Por último, como en los puntos terminales a la derecha y a la izquierda hay extremos relativos de la función seno, se puede concluir que la función f es creciente en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ y que en cualquier otro intervalo mayor, la función no es estrictamente monótona (ver figura 5.16).

Derivada de la función inversa

Los dos teoremas siguientes discuten la derivada de las funciones inversas. El primero de ellos, era de esperar, a la vista de la propiedad reflexiva de la función inversa como se muestra en la figura 5.12. En el apéndice A pueden verse las demostraciones de los dos teoremas.

TEOREMA 5.8 Continuidad y derivabilidad de las funciones inversas

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene una función inversa, entonces las siguientes sentencias son verdaderas.

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

EXPLORACIÓN

Graficar las funciones inversas

$$f(x) = x^3$$

y

$$g(x) = x^{1/3}.$$

Calcular la pendiente de f en (1, 1), (2, 8) y (3, 27), y la pendiente de g en (1, 1), (8, 2) y (27, 3). ¿Qué se observa? ¿Qué ocurre en (0, 0)?

TEOREMA 5.9 La derivada de una función inversa

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función inversa

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$.

a) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(x)$ para $x = 3$?

b) ¿Cuál es el valor de $(f^{-1})'(x)$ para $x = 3$?

Solución Notar que f es una función inyectiva, así que tiene una función inversa.

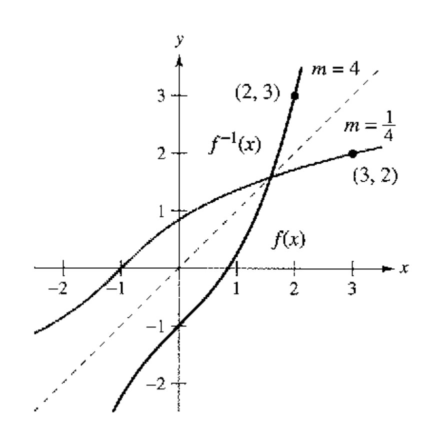
a) Como $f(x) = 3$ cuando $x = 2$, se sabe que $f^{-1}(3) = 2$.

b) Como la función f es derivable y tiene inversa, se puede aplicar el teorema 5.9 (con $g = f^{-1}$) y se escribe

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

Además, usando $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$, se concluye que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}.$$



Las gráficas de las funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a)

Figura 5.17

En el ejemplo 5, notar que la pendiente en el punto (2, 3) de la gráfica de f es 4 y la pendiente de f^{-1} en el punto (3, 2) es $\frac{1}{4}$ (ver figura 5.17). Esta relación recíproca (que se sigue del teorema 5.9) puede escribirse como se muestra.

Si $y = g(x) = f^{-1}(x)$, entonces $f(y) = x$ y $f'(y) = \frac{dx}{dy}$. El teorema 5.9 dice que

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(dx/dy)}.$$

Así que, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$.

EJEMPLO 6 Las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes recíprocas

Sea $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Probar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos siguientes.

a) (2, 4) y (4, 2) ***b)*** (3, 9) y (9, 3)

Solución Las derivadas de f y f^{-1} están dadas por

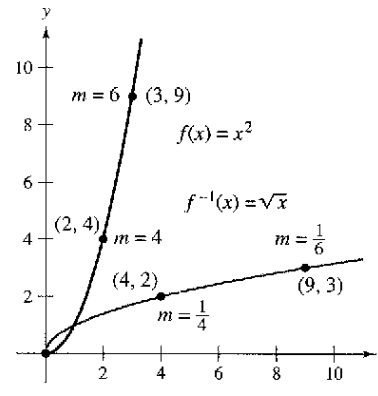
$$f'(x) = 2x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

a) En (2, 4), la pendiente de la gráfica de f es $f'(2) = 2(2) = 4$. En (4, 2) la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}.$$

b) En el punto (3, 9), la pendiente de la gráfica de f es $f'(3) = 2(3) = 6$. En (9, 3), la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}.$$



En (0, 0), la derivada de f es 0, y la derivada de f^{-1} no existe

Figura 5.18

Así, en ambos casos, las pendientes son recíprocas, como ilustra la figura 5.18.

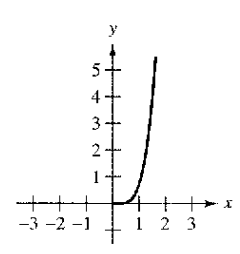
Ejercicios de la sección 5.3

En los ejercicios 1 a 8, mostrar que f y g son funciones inversas *a*) algebraicamente y *b*) gráficamente.

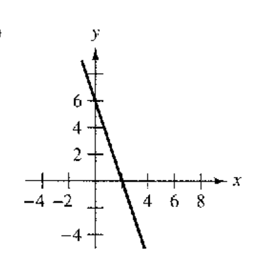
1. $f(x) = 5x + 1$, $\quad g(x) = (x - 1)/5$
2. $f(x) = 3 - 4x$, $\quad g(x) = (3 - x)/4$
3. $f(x) = x^3$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = 1 - x^3$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
5. $f(x) = \sqrt{x - 4}$, $\quad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$
6. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0$, $\quad g(x) = \sqrt{16 - x}$
7. $f(x) = 1/x$, $\quad g(x) = 1/x$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad x \geq 0$, $\quad g(x) = \dfrac{1 - x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

En los ejercicios 9 a 12, comparar la gráfica de la función con la gráfica de su inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están rotuladas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

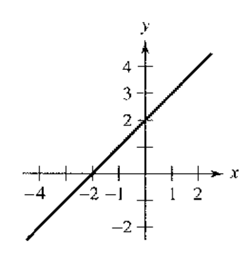
a)



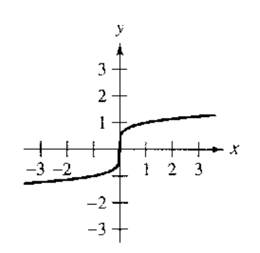
b)



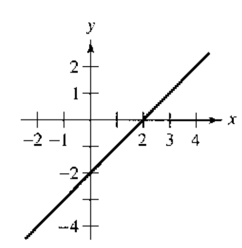
c)



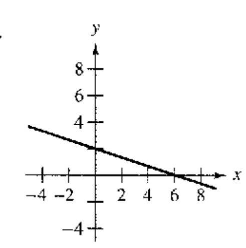
d)



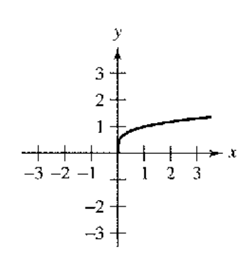
9.



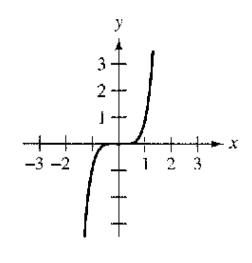
10.



11.

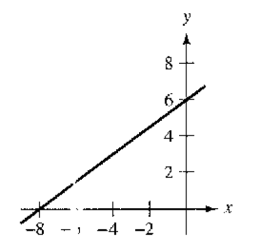


12.

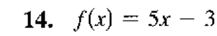


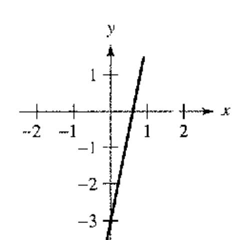
En los ejercicios 13 a 16, usar el criterio de la recta horizontal para determinar si cada una de las funciones es inyectiva en todo su dominio y, en consecuencia, admite inversa.

13. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$

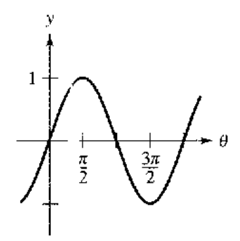


14. $f(x) = 5x - 3$

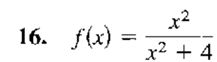


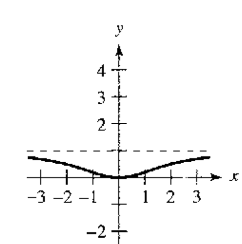


15. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$



16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$





En los ejercicios 17 a 22, usar una computadora para representar gráficamente la función. Determinar cuáles de las funciones son inyectivas en todo su dominio.

17. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2} - 3$
18. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$
19. $f(x) = \ln x$
20. $f(x) = 5x\sqrt{x - 1}$
21. $g(x) = (x + 5)^3$
22. $h(x) = |x + 4| - |x - 4|$

En los ejercicios 23 a 28, usar la derivada para determinar si la función es estrictamente monótona en su dominio y, como consecuencia, tiene inversa.

23. $f(x) = \ln(x - 3)$
24. $f(x) = \cos \dfrac{3x}{2}$
25. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$
26. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
27. $f(x) = 2 - x - x^3$
28. $f(x) = (x + a)^3 + b$

En los ejercicios 29 a 36, encontrar la función inversa de f. Trazar la gráfica (a mano) f y f^{-1}. Describir la relación entre ambas gráficas.

29. $f(x) = 2x - 3$
30. $f(x) = 3x$
31. $f(x) = x^5$
32. $f(x) = x^3 - 1$
33. $f(x) = \sqrt{x}$
34. $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$
35. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \geq 0$
36. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \geq 2$

En los ejercicios 37 a 42, encontrar la función inversa de f. Usar una computadora para representar gráficamente f y f^{-1} en la misma pantalla. Describir la relación entre las gráficas.

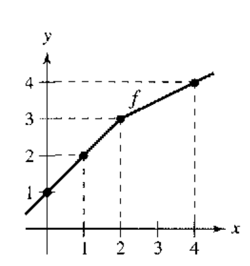
37. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ **38.** $f(x) = 3\sqrt[5]{2x - 1}$

39. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$ **40.** $f(x) = x^{3/5}$

41. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$ **42.** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

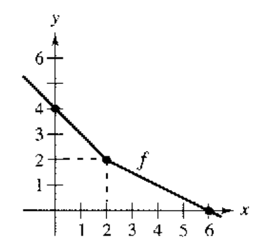
En los ejercicios 43 y 44, usar la gráfica de la función f para completar la tabla y trazar la gráfica con f^{-1}.

43.



x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$				

44.



x	0	2	4
$f^{-1}(x)$			

45. ***Costo*** Supóngase que se necesitan 50 libras de dos productos que cuestan \$1.25 y \$1.60 por libra.

a) Verificar que el costo total es $y = 1.25x + 1.60(50 - x)$, donde x es el número de libras del producto más barato.

b) Encontrar la función inversa de la función costo. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

c) Usar el contexto del problema para determinar el dominio de la función inversa.

d) Determinar el número de libras del producto más barato si el costo total es de \$73.

46. ***Temperatura*** La temperatura $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geq -459.6$, representa la temperatura C en grados Celsius como una función de la temperatura F en grados Fahrenheit.

a) Encontrar la función inversa de C.

b) ¿Qué representa la función inversa?

c) Determinar el dominio de la función inversa.

d) La temperatura es de 22° C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

En los ejercicios 47 a 52, mostrar que f es estrictamente monótona en el intervalo dado y, por tanto, tiene una función inversa en ese intervalo.

47. $f(x) = (x - 4)^2, \quad [4, \infty)$ **48.** $f(x) = |x + 2|, \quad [-2, \infty)$

49. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}, \quad (0, \infty)$ **50.** $f(x) = \cot x, \quad (0, \pi)$

51. $f(x) = \cos x, \quad [0, \pi]$ **52.** $f(x) = \sec x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, hallar la inversa de f en el intervalo indicado. Usar una computadora para representar f y f^{-1} en una misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}, \quad (-2, 2)$ **54.** $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2}, \quad (0, 10)$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una calculadora para representar gráficamente la función, *b*) representar gráficamente su función inversa utilizando la función *drawing* de la computadora y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.**

55. $f(x) = x^3 + x + 4$ **56** $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

57. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ **58.** $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

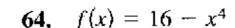
En los ejercicios 59 a 62, determinar si la función es inyectiva. Si lo es, encontrar su función inversa.

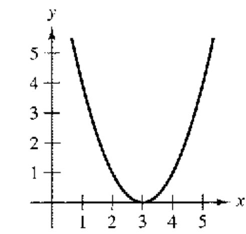
59. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ **60.** $f(x) = -3$

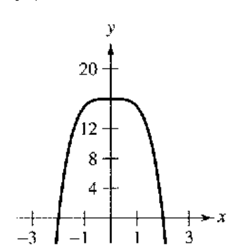
61. $f(x) = |x - 2|, \quad x \leq 2$ **62.** $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$

En los ejercicios 63 a 66, desechar la parte del dominio con el fin de que la función restringida sea inyectiva. Encontrar la función inversa de la función resultante y dar su dominio. (*Nota*: Hay más de una respuesta correcta.)

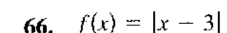
63. $f(x) = (x - 3)^2$ **64.** $f(x) = 16 - x^4$

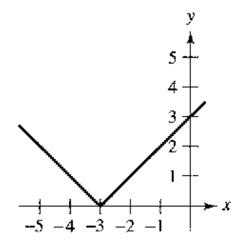


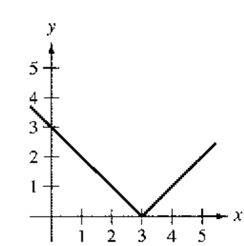




65. $f(x) = |x + 3|$ **66.** $f(x) = |x - 3|$







Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, determinar si la función admite inversa. Si es así, ¿cuál es la función inversa?**

67. $g(t)$ es el volumen de agua que ha pasado por una tubería a t minutos de abrir la llave de paso.

68. $h(t)$ es el nivel de la marea t horas pasada la medianoche, donde $0 \leq t < 24$.

69. $C(t)$ es el costo de una llamada telefónica de t minutos.

70. $A(r)$ es el área de un círculo de radio r.

En los ejercicios 71 a 76, encontrar $(f^{-1})'(a)$ para la función f y el número real a dado.

71. $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad a = 2$

72. $f(x) = \frac{1}{27}(x^5 + 2x^3), \quad a = -11$

73. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad a = \frac{1}{2}$

74. $f(x) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad a = 1$

75. $f(x) = x^3 - \frac{4}{x}, \quad a = 6$

76. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad a = 2$

En los ejercicios 77 a 80, *a*) hallar el dominio de f y de f^{-1}, *b*) encontrar los recorridos o rangos de f y f^{-1}, *c*) graficar f y f^{-1}, y *d*) demostrar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos dados.

	Funciones	*Punto*
77.	$f(x) = x^3$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
78.	$f(x) = 3 - 4x$	$(1, -1)$
	$f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{4}$	$(-1, 1)$
79.	$f(x) = \sqrt{x - 4}$	$(5, 1)$
	$f^{-1}(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$	$(1, 5)$
80.	$f(x) = \frac{4}{1 + x^2}, \quad x \geq 0$	$(1, 2)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4 - x}{x}}$	$(2, 1)$

En los ejercicios 81 y 82, encontrar *dy/dx* en los puntos dados para la ecuación.

81. $x = y^3 - 7y^2 + 2, \quad (-4, 1)$

82. $x = 2\ln(y^2 - 3), \quad (0, 4)$

En los ejercicios 83 a 86, usar las funciones $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para encontrar los valores dados.

83. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$

84. $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$

85. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

86. $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

En los ejercicios 87 a 90, usar las funciones $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para encontrar las funciones dadas.

87. $g^{-1} \circ f^{-1}$

88. $f^{-1} \circ g^{-1}$

89. $(f \circ g)^{-1}$

90. $(g \circ f)^{-1}$

Desarrollo de conceptos

91. Describir cómo encontrar la función inversa de una función inyectiva dada por una ecuación en x y y. Dar un ejemplo.

92. Describir la relación entre la gráfica de una función y la gráfica de su función inversa.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 93 y 94, la derivada de la función tiene el mismo signo para todo x en su dominio, pero la función no es inyectiva. Explicar.

93. $f(x) = \tan x$

94. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

95. ***Para pensar*** La función $f(x) = k(2 - x - x^3)$ es inyectiva y $f^{-1}(3) = -2$. Encontrar k.

96. *a*) Mostrar que $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ no es inyectiva en $(-\infty, \infty)$.

b) Determinar el mayor valor de c tal que f sea inyectiva en $(-c, c)$.

97. Sean f y g funciones inyectivas. Probar que *a*) $f \circ g$ es inyectiva y *b*) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

98. Probar que si f tiene una función inversa, entonces $(f^{-1})^{-1} = f$.

99. Demostrar que si una función tiene una función inversa, la función inversa es única.

100. Demostrar que una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 101 a 104, determinar cuál de las sentencias es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.

101. Si f es una función par, f^{-1} existe.

102. Si la función inversa de f existe, entonces la intersección en y de f es una intersección en x de f^{-1}.

103. Si $f(x) = x^n$ donde n es impar, entonces f^{-1} existe.

104. No existe ninguna función f tal que $f = f^{-1}$.

105. ¿Es cierto el recíproco de la segunda parte del teorema 5.7? Esto es, si una función es inyectiva (y tiene una función inversa), entonces ¿debe ser necesariamente una función estrictamente monótona? Si es cierto, demostrarlo. Si no lo es, dar un contraejemplo.

106. Sea f es dos veces derivable e inyectiva en un intervalo abierto I. Probar que su función inversa g satisface

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}.$$

Si f es creciente y cóncava hacia abajo, ¿cómo es la concavidad de $f^{-1} = g$?

107. Si $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$, encontrar $(f^{-1})'(0)$.

108. Demostrar que $f(x) = \int_2^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$ es inyectiva y encontrar $(f^{-1})'(0)$.

109. Sea $y = \frac{x - 2}{x - 1}$. Demostrar que y es su propia función inversa. ¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de f? Explicar.

Sección 5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración

- **Desarrollar las propiedades de la función exponencial natural.**
- **Derivar la función exponencial natural.**
- **Integrar la función exponencial natural.**

La función exponencial natural

La función $f(x) = \ln x$ es creciente en todo su dominio, y por lo tanto tiene una función inversa f^{-1}. El dominio de f^{-1} es el conjunto de todos los reales, y el recorrido o rango es el conjunto de todos los reales positivos, como se muestra en la figura 5.19. Así pues, para cualquier número real x,

$$f(f^{-1}(x)) = \ln[f^{-1}(x)] = x. \qquad x \text{ es cualquier número real.}$$

Si x es racional, entonces

$$\ln(e^x) = x \ln e = x(1) = x. \qquad x \text{ es un número racional.}$$

La función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural
Figura 5.19

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir que $f^{-1}(x)$ y e^x son iguales en valores *racionales* de x. La siguiente definición extiende el significado de e^x para incluir a *todos* los valores reales de x.

> **Definición de la función exponencial natural**
>
> La función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama **función exponencial natural** y se denota por
>
> $$f^{-1}(x) = e^x.$$
>
> Esto es,
>
> $$y = e^x \text{ si y sólo si } x = \ln y.$$

EL NÚMERO e

El símbolo *e* fue utilizado por primera vez para representar la base de los logaritmos naturales por el matemático Leonhard Euler en una carta a otro matemático, Christian Goldbach, en 1731.

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir como sigue:

$$\ln(e^x) = x \qquad \text{y} \qquad e^{\ln x} = x \qquad \text{Relación inversa.}$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones exponenciales

Resolver $7 = e^{x-1}$.

Solución Se puede pasar de la forma exponencial a la forma logarítmica con sólo *aplicar el logaritmo natural en ambos miembros* de la ecuación.

$$7 = e^{x+1} \qquad \text{Ecuación original.}$$
$$\ln 7 = \ln(e^{x+1}) \qquad \text{Aplicar logaritmo natural a cada lado.}$$
$$\ln 7 = x + 1 \qquad \text{Aplicar la propiedad de inversa.}$$
$$-1 + \ln 7 = x \qquad \text{Despejar } x.$$
$$0.946 \approx x \qquad \text{Usar la calculadora.}$$

Verificar esta solución en la ecuación original.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación logarítmica

Resolver $\ln(2x-3)=5$.

Solución Para convertir la forma logarítmica en la forma exponencial aplicar la función exponencial de ambos miembros de la ecuación logarítmica.

$\ln(2x-3)=5$	Ecuación original.
$e^{\ln(2x-3)}=e^5$	Aplicar exponenciales a cada lado.
$2x-3=e^5$	Aplicar la propiedad inversa.
$x=\frac{1}{2}(e^5+3)$	Despejar *x*.
$x\approx 75.707$	Usar la calculadora.

Las reglas usuales para operar con exponentes racionales pueden ser extendidas a la función exponencial natural, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.10 Operaciones con funciones exponenciales

Sean a y b dos números reales arbitrarios

1. $e^ae^b=e^{a+b}$
2. $\dfrac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$

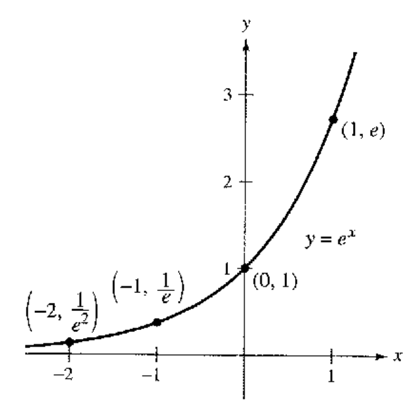
Demostración Para demostrar la propiedad 1, se puede escribir

$$\begin{aligned}\ln(e^ae^b)&=\ln(e^a)+\ln(e^b)\\&=a+b\\&=\ln(e^{a+b}).\end{aligned}$$

como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir como

$$e^ae^b=e^{a+b}.$$

La demostración de la segunda propiedad se deja como ejercicio (ver ejercicio 129).



La función exponencial natural es creciente y su gráfica es cóncava hacia arriba
Figura 5.20

En la sección 5.3 se aprendió que una función inversa f^{-1} comparte muchas propiedades con f. Así, la función exponencial natural hereda las siguientes propiedades de la función logaritmo natural (ver figura 5.20)

Propiedades de la función exponencial natural

1. El dominio de $f(x)=e^x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0,\infty)$.
2. La función $f(x)=e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x)=e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$

Derivadas de las funciones exponenciales

Una de las características más intrigantes (y más útiles) de la función exponencial natural es que *su derivada es ella misma.* En otras palabras, es solución de la ecuación diferencial $y' = y$. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para encontrar más información acerca de derivadas de funciones exponenciales de orden $\frac{1}{2}$, ver el artículo "A Child's Garden of Fractional Derivates", de Marcia Kleinz y Thomas J. Osler en *The Collage Mathematics Journal.*

TEOREMA 5.11 Derivada de la función exponencial natural

Si u es una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$
2. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u\dfrac{du}{dx}$

Demostración Para probar la propiedad 1, usar el hecho de que en $e^x = x$, y derivar cada lado de la ecuación.

$$\ln e^x = x \qquad \text{Definición de la función exponencial.}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x.$$

$$\frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}[e^x] = 1$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

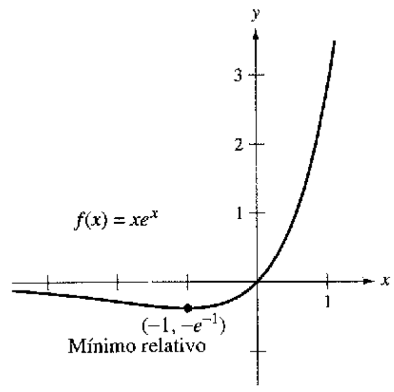
La derivada e^u se deduce de la regla de la cadena.

NOTA Se puede interpretar este teorema geométricamente diciendo que la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ en cualquier punto (x, e^x) es igual a la coordenada y del punto.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones exponenciales

a) $\dfrac{d}{dx}[e^{2x-1}] = e^u\dfrac{du}{dx} = 2e^{2x-1}$ $\qquad u = 2x - 1$

b) $\dfrac{d}{dx}[e^{-3/x}] = e^u\dfrac{du}{dx} = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)e^{-3/x} = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ $\qquad u = -\dfrac{3}{x}$



La derivada de f cambia de negativo a positivo en $x = -1$
Figura 5.21

EJEMPLO 4 Localización de extremos relativos

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = xe^x$.

Solución La derivada de f está dada por

$$f'(x) = x(e^x) + e^x(1) \qquad \text{Regla del producto.}$$
$$= e^x(x + 1).$$

Como e^x nunca es 0, la derivada es 0 sólo cuando $x = -1$. Además, el criterio de la primera derivada permite determinar que en ese punto hay un mínimo relativo, como se muestra en la figura 5.21. Como la derivada $f'(x) = e^x(x + 1)$ está definida para todo x, no hay otros puntos críticos.

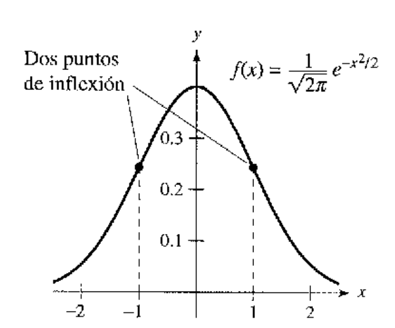
EJEMPLO 5 La función densidad de probabilidad normal estándar

Probar que la *función densidad de probabilidad normal estándar*

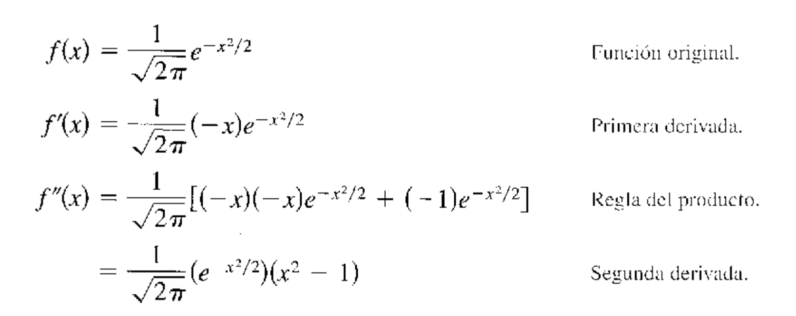
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.

Solución Para localizar los posibles puntos de inflexión, se buscan los valores de x para los cuales la segunda derivada es cero.



La curva en forma de campana dada por una función de densidad de probabilidad estándar normal
Figura 5.22



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{Función original.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x) e^{-x^2/2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-x^2/2})(x^2 - 1) \qquad \text{Segunda derivada.}$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$, y se puede aplicar las técnicas del capítulo 3 para concluir que estos valores son los dos puntos de inflexión mostrados en la figura 5.22.

NOTA La forma general de una función de densidad de probabilidad normal (cuya media es 0) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación estándar (σ es la letra griega minúscula sigma). Esta "curva en forma de campana" tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 Transacciones comerciales

El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2002 puede ser modelado por

$$y = 36\,663e^{0.1902t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 1998? (*Fuente: New York Stock Exchange, Inc.*)

Solución La derivada del modelo es

$$y' = (0.1902)(36\,663)e^{0.1902t}$$
$$\approx 6\,973e^{0.1902t}.$$

Al evaluar la derivada cuando $t = 8$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 1998 era alrededor de

31 933 millones de transacciones por año.

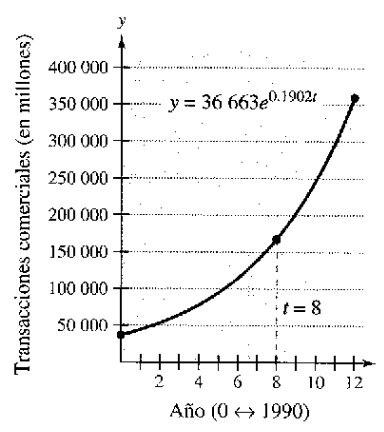


Figura 5.23

La gráfica de este modelo se muestra en la figura 5.23.

Integrales de funciones exponenciales

Cada fórmula de derivación en el teorema 5.11 tiene su correspondiente fórmula de integración.

TEOREMA 5.12 Reglas de integración para funciones exponenciales

Si u es una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$ **2.** $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$

EJEMPLO 7 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx$.

Solución Si se hace $u = 3x + 1$, entonces $du = 3\,dx$.

$$\begin{aligned}\int e^{3x+1}dx &= \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)\,dx && \text{Multiplicar y dividir por 3.}\\ &= \frac{1}{3}\int e^u\,du && \text{Sustituir } u = 3x + 1.\\ &= \frac{1}{3}e^u + C && \text{Aplicar la regla exponencial.}\\ &= \frac{e^{3x+1}}{3} + C && \text{Sustituir nuevamente.}\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 7, el factor constante faltante 3, se ha introducido para crear $du = 3\,dx$. Sin embargo, recordemos que no se puede introducir un factor *variable* faltante en el integrando. Por ejemplo,

$$\int e^{-x^2}\,dx \neq \frac{1}{x}\int e^{-x^2}(x\,dx).$$

EJEMPLO 8 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int 5xe^{-x^2}\,dx$.

Solución Si se tiene $u = -x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ o $x\,dx = -du/2$.

$$\begin{aligned}\int 5xe^{-x^2}dx &= \int 5e^{-x^2}(x\,dx) && \text{Reagrupar el integrando.}\\ &= \int 5e^u\left(-\frac{du}{2}\right) && \text{Sustituir } u = -x^2.\\ &= -\frac{5}{2}\int e^u\,du && \text{Regla del múltiplo constante.}\\ &= -\frac{5}{2}e^u + C && \text{Aplicar la regla exponencial.}\\ &= -\frac{5}{2}e^{-x^2} + C && \text{Sustitución regresiva.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Integración de funciones exponenciales

a) $$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int \overbrace{e^{1/x}}^{e^u}\overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}^{du} = -e^{1/x} + C$$ $u = \frac{1}{x}$

b) $$\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\,dx = -\int \overbrace{e^{\cos x}}^{e^u}\overbrace{(-\operatorname{sen} x\,dx)}^{du} = -e^{\cos x} + C$$ $u = \cos x$

EJEMPLO 10 Cálculo de áreas acotadas o delimitadas por funciones exponenciales

Evaluar cada una de las integrales definidas.

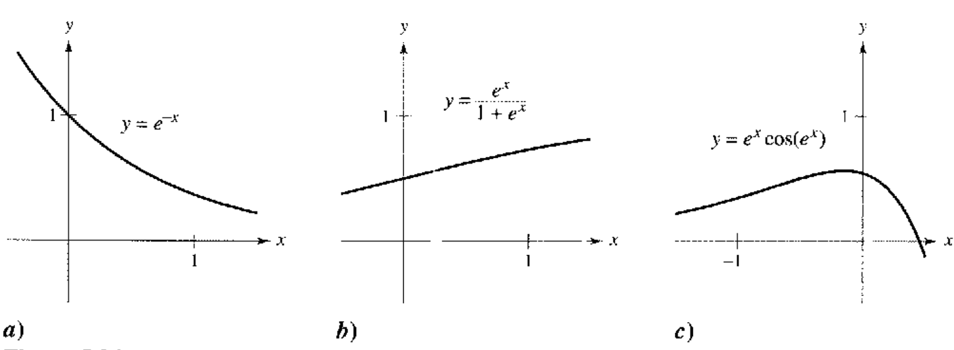
a) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ *b)* $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ *c)* $\int_{-1}^0 [e^x \cos(e^x)]\,dx$

Solución

a) $$\int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^1 = -e^{-1} - (-1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$$ Ver figura 5.24*a*.

b) $$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)\Big]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 \approx 0.620$$ Ver figura 5.24*b*.

c) $$\int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx = \operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^0 = \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}(e^{-1}) \approx 0.482$$ Ver figura 5.24*c*.



a) *b)* *c)*

Figura 5.24

Ejercicios de la sección 5.4

En los ejercicios 1 a 14, calcular x redondeando a tres decimales.

1. $e^{\ln x} = 4$ **2.** $e^{\ln 2x} = 12$

3. $e^x = 12$ **4.** $4e^x = 83$

5. $9 - 2e^x = 7$ **6.** $-6 + 3e^x = 8$

7. $50e^{-x} = 30$ **8.** $200e^{-4x} = 15$

9. $\ln x = 2$ **10.** $\ln x^2 = 10$

11. $\ln(x - 3) = 2$ **12.** $\ln 4x = 1$

13. $\ln\sqrt{x + 2} = 1$ **14.** $\ln(x - 2)^2 = 12$

En los ejercicios 15 a 18, dibujar la gráfica de la función

15. $y = e^{-x}$ **16.** $y = \frac{1}{2}e^x$

17. $y = e^{-x^2}$ **18.** $y = e^{-x/2}$

19. Usar una computadora para representar gráficamente $f(x) = e^x$ y la función dada en la misma pantalla. ¿Cómo es la relación de las dos gráficas?

a) $g(x) = e^{x-2}$ *b)* $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$ *c)* $q(x) = e^{-x} + 3$

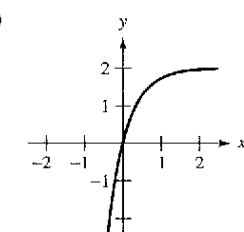
20. Usar una computadora para representar gráficamente la función. Usar la gráfica para determinar las asíntotas de la función.

a) $f(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5x}}$

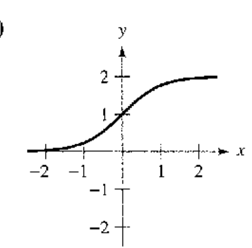
b) $g(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5/x}}$

En los ejercicios 21 a 24, asociar cada ecuación con su gráfica. Se supone que a y C son números reales positivos. [Las gráficas están etiquetadas con *a*), *b*), *c*) y *d*).]

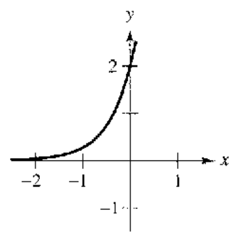
a)



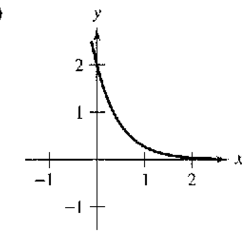
b)



c)



d)



21. $y = Ce^{ax}$ **22.** $y = Ce^{-ax}$

23. $y = C(1 - e^{-ax})$ **24.** $y = \dfrac{C}{1 + e^{-ax}}$

En los ejercicios 25 a 28 confirmar que las funciones son inversas una de otra representando ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.

25. $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln\sqrt{x}$ **26.** $f(x) = e^{x/3}$, $g(x) = \ln x^3$

27. $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$ **28.** $f(x) = e^{x-1}$, $g(x) = 1 + \ln x$

29. ***Análisis gráfico*** Usar una computadora para representar

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x) = e^{0.5}$$

en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre f y g cuando $x \to \infty$?

30. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 29 para hacer una conjetura acerca del valor de

$$\left(1 + \frac{r}{x}\right)^x$$

como $x \to \infty$.

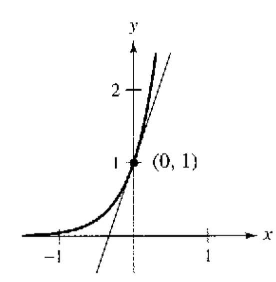
En los ejercicios 31 y 32, comparar los números dados con el número e. ¿Es el número mayor o menor que e?

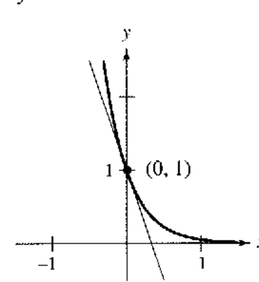
31. $\left(1 + \dfrac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}$ (véase el ejercicio 30.)

32. $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \dfrac{1}{5\,040}$

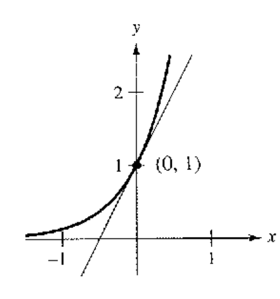
En los ejercicios 33 y 34, encontrar una ecuación de la recta tangente a la función en el punto (0, 1).

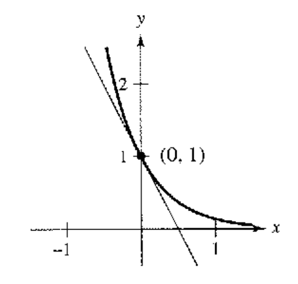
33. *a)* $y = e^{3x}$ *b)* $y = e^{-3x}$





34. *a)* $y = e^{2x}$ *b)* $y = e^{-2x}$





En los ejercicios 35 a 48, encontrar la derivada.

35. $f(x) = e^{2x}$ **36.** $y = e^{-x^2}$

37. $y = e^{\sqrt{x}}$ **38.** $y = x^2e^{-x}$

39. $g(t) = (e^{-t} + e^{t})^3$ **40.** $g(t) = e^{-3/t^2}$

41. $y = \ln(1 + e^{2x})$ **42.** $y = \ln\left(\frac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

43. $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ **44.** $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

45. $y = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$ **46.** $y = \ln e^x$

47. $F(x) = \int_{\pi}^{\ln x} \cos e^t\,dt$ **48.** $F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln(t + 1)\,dt$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado.

49. $f(x) = e^{1-x}$, $(1, 1)$ **50.** $y = e^{-2x+x^2}$, $(2, 1)$

51. $y = \ln(e^{x^2})$, $(-2, 4)$ **52.** $y = \ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $(0, 0)$

53. $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$, $(1, e)$

54. $y = xe^x - e^x$, $(1, 0)$

55. $f(x) = e^{-x}\ln x$, $(1, 0)$ **56.** $f(x) = e^3 \ln x$, $(1, 0)$

En los ejercicios 57 y 58, hallar *dy/dx* por derivación implícita.

57. $xe^y - 10x + 3y = 0$ **58.** $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$

En los ejercicios 59 y 60, encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado.

59. $xe^y + ye^x = 1$, $(0, 1)$ **60.** $1 + \ln xy = e^{x-y}$, $(1, 1)$

En los ejercicios 61 y 62, encontrar la segunda derivada de la función.

61. $f(x) = (3 + 2x)e^{-3x}$ **62.** $g(x) = \sqrt{x} + e^x \ln x$

En los ejercicios 63 y 64, probar que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.

63. $y = e^x(\cos \sqrt{2}x + \operatorname{sen} \sqrt{2}x)$
$y'' - 2y' + 3y = 0$

64. $y = e^x(3 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x)$
$y'' - 2y' + 5y = 0$

En los ejercicios 65 a 72, encontrar los extremos y puntos de inflexión (si existen) de la función. Utilizar una computadora para representar gráficamente la función y confirmar los resultados.

65. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ **66.** $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

67. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-2)^2/2}$ **68.** $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/2}$

69. $f(x) = x^2e^{-x}$ **70.** $f(x) = xe^{-x}$

71. $g(t) = 1 + (2 + t)e^{-t}$ **72.** $f(x) = -2 + e^{3x}(4 - 2x)$

73. ***Área*** Calcular el área del rectángulo más grande que quede inscrito bajo la curva $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

74. ***Área*** Efectuar los pasos siguientes para encontrar el área máxima del rectángulo mostrado en la figura.

a) Despejar c en la ecuación $f(c) = f(c + x)$.

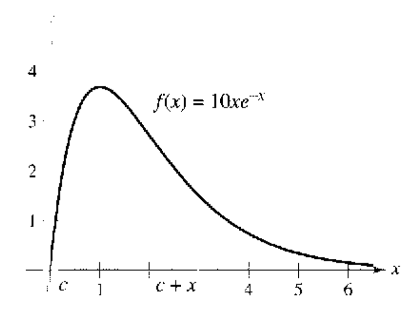
b) Usar el resultado del apartado *a*), para expresar el área A como función de x. [*Sugerencia:* $A = xf(c)$.]

c) Usar una computadora para representar la función área. Usar la gráfica para aproximar las dimensiones del rectángulo de área máxima. Determinar el área.

d) Usar una computadora para representar la expresión de c encontrada en *a*). Usar la gráfica para aproximar.

$\lim_{x\to 0^+} c$ y $\lim_{x\to\infty} c.$

Usar este resultado para describir los cambios en las dimensiones y posición del rectángulo para $0 < x < \infty$.



75. Verificar que la función

$$y = \frac{L}{1 + ae^{-x/b}}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad L > 0$$

crece a ritmo máximo cuando $y = L/2$.

76. ***Redacción*** Considerar la función $f(x) = \frac{2}{1 + e^{1/x}}$.

a) Usar una computadora para representar f gráficamente.

b) Explicar brevemente por qué la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

77. Encontrar un punto en la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$ tal que la recta tangente a la gráfica en este punto pase por el origen. Usar una computadora para representar f y la recta tangente en la misma pantalla.

78. Localizar el punto en la gráfica de $y = e^{-x}$ donde la recta normal a la curva pasa por el origen. (Usar el método de Newton o cálculo de raíces en la computadora.)

79. ***Depreciación*** El valor V de un objeto a t años de su adquisición es $V = 15\,000e^{-0.6286t}$, $0 \leq t \leq 10$.

a) Usar una computadora para representar gráficamente la función.

b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 5$.

c) Usar una computadora para representar gráficamente la recta tangente a la función cuando $t = 1$ y $t = 5$.

80. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento desde el equilibrio de una masa que oscila en el extremo de un resorte suspendido del techo es

$$y = 1.56e^{-0.22t}\cos 4.9t$$

donde y es el desplazamiento en pies y t el tiempo en segundos. Representar la función de desplazamiento en el intervalo $[0, 10]$ con la computadora. Hallar el valor de t en el que el desplazamiento pasa a ser menor que 3 pulgadas desde la posición de equilibrio.

81. ***Modelo matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kg por m^2) a la altitud h (en km). La tabla muestra los resultados.

h	0	5	10	15	20
P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

a) Utilizar una computadora para representar los puntos (h, $\ln P$), y usar la función de regresión de la misma para encontrar un modelo lineal para los puntos.

b) La recta en *a*) tiene la forma

$$\ln P = ah + b$$

Escribir la ecuación en forma exponencial.

c) Usar una computadora para representar los datos originales y representar el modelo exponencial de *b*).

d) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 18$.

82. ***Modelo matemático*** La tabla muestra los valores aproximados de V de un automóvil en los años 1997 a 2003. La variable t representa el tiempo en años, con $t = 7$ correspondiente a 1997.

t	7	8	9	10
V	\$17 040	\$14 590	\$12 845	\$10 995

t	11	12	13
V	\$9 220	\$8 095	\$6 835

a) Usar un sistema algebraico de computadora para encontrar los modelos lineal y cuadrático para los datos. Representar el modelo.

b) ¿Qué representa la pendiente en el modelo lineal en *a*)?

c) Usar un sistema algebraico de computadora para encontrar un modelo exponencial de los datos.

d) Determinar la asíntota horizontal del modelo exponencial del apartado *c*). Interpretar su significado en el contexto del problema.

e) Hallar el ritmo de depreciación en el valor del vehículo cuando $t = 8$ y $t = 12$ usando el modelo exponencial.

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 83 y 84, usar una computadora para representar gráficamente la función. Después trazar la gráfica**

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

y

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \tfrac{1}{2} f''(0)(x - 0)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas en $x = 0$.

83. $f(x) = e^{x/2}$ **84.** $f(x) = e^{-x^2/2}$

En los ejercicios 85 a 98, hallar la integral indefinida.

85. $\int e^{5x}(5)\,dx$ **86.** $\int e^{-x^4}(-4x^3)\,dx$

87. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **88.** $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$

89. $\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\,dx$ **90.** $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$

91. $\int e^x\sqrt{1 - e^x}\,dx$ **92.** $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

93. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$ **94.** $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\,dx$

95. $\int \frac{5 - e^x}{e^{2x}}\,dx$ **96.** $\int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}\,dx$

97. $\int e^{-x}\tan(e^{-x})\,dx$ **98.** $\int \ln(e^{2x-1})\,dx$

En los ejercicios 99 a 106, evaluar la integral definida. Usar una computadora para verificar el resultado.

99. $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$ **100.** $\int_3^4 e^{3-x}\,dx$

101. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ **102.** $\int_{-2}^0 x^2 e^{x^3/2}\,dx$

103. $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$ **104.** $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-(x^2/2)}\,dx$

105. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}\pi x}\cos \pi x\,dx$ **106.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sec 2x}\sec 2x\tan 2x\,dx$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 107 y 108, resolver la ecuación diferencial.**

107. $\frac{dy}{dx} = xe^{ax^2}$ **108.** $\frac{dy}{dx} = (e^x - e^{-x})^2$

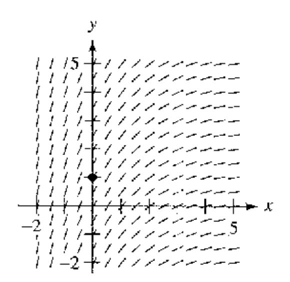
Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 109 y 110, encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales.**

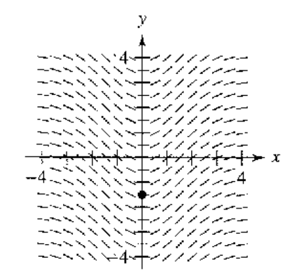
109. $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f(0) = 1, f'(0) = 0$

110. $f''(x) = \operatorname{sen} x + e^{2x}$, $f(0) = \frac{1}{4}, f'(0) = \frac{1}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 111 y 112 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Por integración encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una computadora para representarla gráficamente. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

111. $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{-x/2}, \quad (0, 1)$ **112.** $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-0.2x^2}, \quad \left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$





Área **En los ejercicios 113 a 116, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones. Usar una computadora para representar la región y verificar los resultados.**

113. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 5$

114. $y = e^{-x}, y = 0, x = a, x = b$

115. $y = xe^{-x^2/4}, y = 0, x = 0, x = \sqrt{6}$

116. $y = e^{-2x} + 2, y = 0, x = 0, x = 2$

Integración numérica **En los ejercicios 117 la 118, aproximar la integral usando la regla del punto medio, la de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 12$. Usar una computadora para verificar los resultados.**

117. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\, e^x \, dx$

118. $\displaystyle\int_0^2 2xe^{-x} \, dx$

119. ***Probabilidad*** Ciertas baterías para automóvil tienen una vida media de 48 meses con una desviación estándar de 6 meses. Las vidas de las baterías siguen una distribución normal. La probabilidad de que una batería dure entre 48 y 60 meses es

$$0.0665 \int_{48}^{60} e^{-0.0139(t-48)^2} \, dt.$$

Usar la función de integración de una computadora para aproximar la integral. Interpretar los resultados.

120. ***Probabilidad*** El tiempo medio de espera (en minutos) en una tienda está dado por la solución de la ecuación

$$\int_0^x 0.3e^{-0.3t} \, dt = \frac{1}{2}.$$

Resolver la ecuación.

121. Al ser $e^t \geq 1$ para $x \geq 0$, se tiene que

$$\int_0^x e^t \, dt \geq \int_0^x 1 \, dt.$$

Efectuar esta integración para deducir la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.

122. ***Un modelo matemático*** Una válvula de un depósito se abre durante 4 horas para dejar salir un producto químico en un proceso de manufactura. El ritmo o velocidad de flujo de salida R (en litros por hora) en el instante t (en horas) está dado en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
R	425	240	118	71	36

a) Usar la función de regresión en la computadora para calcular un modelo lineal para los puntos $(t, \ln R)$. Escribir la ecuación resultante de la forma $\ln R = at + b$, en forma exponencial.

b) Usar una computadora para representar gráficamente los datos y el modelo exponencial.

c) Usar la integral definida para aproximar el número de litros del producto químico que han salido durante esas cuatro horas.

Desarrollo de conceptos

123. Con sus propias palabras, enuncie las propiedades de la función exponencial natural.

124. Describir la relación entre la gráfica de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.

125. ¿Existe una función f tal que $f(x) = f'(x)$? Si es así, ¿cuál es?

126. Sin integrar, enuncie la fórmula que utilizaría para efectuar las integrales siguientes.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$ *b*) $\displaystyle\int xe^{x^2} \, dx$

127. Encontrar, con tres decimales, el valor de x tal que $e^{-x} = x$. (Usar el método de Newton o la función *root*, de la computadora.)

128. Encontrar el valor de a del área comprendida entre $y = e^{-x}$, el eje x, $x = -a$ y $x = a$, y $x = a$ es $\frac{8}{3}$.

129. Probar que $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

130. Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Representar gráficamente f en $(0, \infty)$ y probar que f es estrictamente decreciente en (e, ∞).

b) Demostrar que si $e \leq A < B$, entonces $A^B > B^A$.

c) Usar el apartado *b*) para demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

Sección 5.5 Otras bases distintas de e y aplicaciones

- **Definición de funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Derivación e integración de esas nuevas funciones.**
- **Uso de funciones exponenciales como modelos para el interés compuesto y el crecimiento exponencial.**

Otras bases de e

La **base** de la función exponencial natural es *e*. Esta base "natural" se puede utilizar para dar el significado de cualquier base general *a*.

> **Definición de una función exponencial base *a***
>
> Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real, entonces la **función exponencial base *a*** se denota por a^x y se define como
>
> $$a^x = e^{(\ln a)x}.$$
>
> Si $a = 1$, entonces $y = 1^x = 1$ es una función constante.

Estas funciones obedecen las leyes usuales de los exponentes. Éstas son algunas propiedades familiares.

1. $a^0 = 1$ **2.** $a^x a^y = a^{x+y}$

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **4.** $(a^x)^y = a^{xy}$

Cuando se desea plantear un modelo exponencial para la semivida o vida media de un elemento radiactivo, por ejemplo, es conveniente usar $\frac{1}{2}$ como base del modelo.

EJEMPLO 1 Modelo de la semivida (o vida media) de un elemento radiactivo

La semivida o vida media del carbono-14 es aproximadamente 5 715 años. Si se tiene una muestra de 1 g de carbono-14, ¿qué cantidad existirá dentro de 10 000 años?

Solución Sean $t = 0$ el momento actual y y la cantidad de carbono-14 (en gramos) en la muestra. Usando como base $\frac{1}{2}$, se puede plantear el modelo y dado mediante la ecuación

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5\,715}.$$

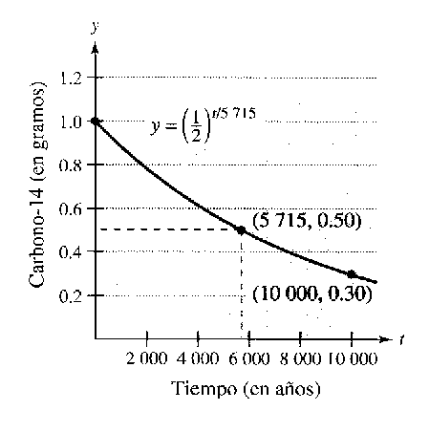
Notar que cuando $t = 5\,715$, la cantidad se ha reducido a la mitad de la original.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\,715/5\,715} = \frac{1}{2} \text{ gramo}$$

Cuando $t = 11\,430$, se ha reducido a un cuarto de la cantidad inicial y así sucesivamente. Para hallar la cantidad de carbono-14 que queda después de 10 000 años, sustituir $t = 10\,000$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10\,000/5\,715} \approx 0.30 \text{ gramo}$$

La gráfica de y se muestra en la figura 5.25.



La vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5 715 años
Figura 5.25

Las funciones logarítmicas con base diferente de e se definen de manera muy similar a las funciones exponenciales.

NOTA En los cursos previos de cálculo, se ha aprendido que $\log_a x$ es el valor al que hay que elevar a para obtener x. Esto concuerda con la definición dada ya que

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= a^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= (e^{\ln a})^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= e^{(\ln a/\ln a)\ln x} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x. \end{aligned}$$

Definición de la función logarítmica de base a

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real positivo, entonces la **función logarítmica base a** se denota $\log_a x$ y se define como

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Las funciones logarítmicas base a tienen las mismas propiedades que la función logaritmo natural, dadas en el teorema 5.2.

1. $\log_a 1 = 0$ Logaritmo de 1.
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ Logaritmo de un producto.
3. $\log_a x^n = n \log_a x$ Logaritmo de una potencia.
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ Logaritmo de un cociente.

De las definiciones de funciones exponenciales y logarítmicas base a, se sigue que $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son funciones inversas una de otra.

Propiedades como funciones inversas

1. $y = a^x$ si y sólo si $x = \log_a y$
2. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$
3. $\log_a a^x = x$, para todo x

La función logaritmo base 10 se llama **función logarítmica común o decimal**. Así, $y = 10^x$ si y sólo si $x = \log_{10} y$.

EJEMPLO 2 Otras bases distintas de e

Despejar x en las siguientes ecuaciones

a) $3^x = \dfrac{1}{81}$ *b)* $\log_2 x = -4$

Solución

a) Resolver la ecuación aplicando la función logaritmo base 3 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{81} \\ \log_3 3^x &= \log_3 \frac{1}{81} \\ x &= \log_3 3^{-4} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

b) Resolver la ecuación, aplicando la función exponencial base 2 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \log_2 x &= -4 \\ 2^{\log_2 x} &= 2^{-4} \\ x &= \frac{1}{2^4} \\ x &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Derivación e integración

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas de base arbitraria, existen tres opciones: (1) usar las definiciones de a^x y $\log_a x$ y obtener la derivada mediante las reglas válidas para las funciones exponencial natural y logarítmica, (2) usar derivación logarítmica o (3) usar las siguientes reglas de derivación para bases diferentes de e.

TEOREMA 5.13 Derivadas para otras bases de e

Sean a un número real positivo ($a \neq 1$) y u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$ **2.** $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}[\log_a x] = \dfrac{1}{(\ln a)x}$ **4.** $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{1}{(\ln a)u} \dfrac{du}{dx}$

Demostración Por definición, $a^x = e^{(\ln a)x}$. Por tanto, se puede demostrar la primera regla haciendo $u = (\ln a)\, x$ y derivando con base e y se obtiene

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[e^{(\ln a)x}] = e^u \frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x}(\ln a) = (\ln a)a^x.$$

Para demostrar la tercera regla, se puede escribir

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln a}\ln x\right] = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

La segunda y la cuarta fórmulas simplemente son versiones de la regla de la cadena de la primera y la tercera reglas.

NOTA Estas reglas de derivación son análogas a las de la función exponencial natural y logaritmo natural. En efecto, sólo difieren en los factores constantes $\ln a$ y $1/\ln a$. He aquí una de las razones que hacen de e la base más conveniente para el cálculo.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones de base distinta

Encontrar la derivada de cada una de estas funciones.

a) $y = 2^x$

b) $y = 2^{3x}$

c) $y = \log_{10} \cos x$

Solución

a) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^x] = (\ln 2)2^x$

b) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^{3x}] = (\ln 2)2^{3x}(3) = (3 \ln 2)2^{3x}$

Escribir 2^{3x} como 8^x y derivar para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

c) $y' = \dfrac{d}{dx}[\log_{10} \cos x] = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(\ln 10)\cos x} = -\dfrac{1}{\ln 10}\tan x$

En ocasiones, un integrando contiene una función exponencial en una base distinta de e. En tal caso, hay dos opciones: (1) pasar a base e usando la fórmula $a^x = e^{(\ln a)x}$ y entonces integrar o (2) integrar directamente, usando la fórmula de integración

$$\int a^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

(que se deduce del teorema 5.13).

EJEMPLO 4 Integración de una función exponencial en una base distinta de e

Hallar $\int 2^x\,dx$.

Solución

$$\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$$

Cuando fue introducida la regla de las potencias $D_x[x^n] = nx^{n-1}$ en el capítulo 2, se exigió que n fuese racional. Ahora la regla se extiende a cualquier valor real de n. Intentar probar este teorema usando derivación logarítmica.

> **TEOREMA 5.14 Regla de las potencias para exponentes reales**
>
> Sea n cualquier número real y sea u una función derivable de x.
>
> **1.** $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
>
> **2.** $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

El siguiente ejemplo compara las derivadas de cuatro tipos de funciones. Cada función requiere una fórmula de derivación diferente para la obtención de la derivada, dependiendo de si la base y el exponente son constantes o variables.

EJEMPLO 5 Comparación de variables y constantes

a) $\dfrac{d}{dx}[e^e] = 0$ — Regla de la constante.

b) $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$ — Regla exponencial.

c) $\dfrac{d}{dx}[x^e] = ex^{e-1}$ — Regla de las potencias.

d) — Derivación logarítmica.

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x\ln x$$
$$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$
$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

NOTA Asegurarse de ver que no existe una regla sencilla de derivación para $y = x^x$. En general, si $y = u(x)^{v(x)}$, se necesita recurrir a la derivación logarítmica.

Aplicaciones de las funciones exponenciales

n	A
1	$1 080.00
2	$1 081.60
4	$1 082.43
12	$1 083.00
365	$1 083.28

Si se depositan P dólares en una cuenta a una tasa anual de interés r (en forma decimal) y los intereses se acumulan en la cuenta, ¿cuál es el balance en la cuenta al cabo de 1 año? La respuesta depende del número n de veces que el interés se compone de acuerdo con la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Por ejemplo, el resultado para un depósito de $1 000 al 8% de interés compuesto n veces al año se muestra en la tabla de la izquierda.

Al crecer n, el balance A tiende a un límite. Para hallarlo, utilizar el siguiente teorema. Para comprobar las razones de su contenido, calcular $[(x + 1)/x]^x$ para varios valores de x (véase tabla inferior izquierda). (Una demostración del teorema se puede consultar en el apéndice A).

x	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$
10	2.59374
100	2.70481
1 000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

TEOREMA 5.15 Un límite que involucra al número e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Ahora, regresar a la fórmula del balance A en una cuenta con interés compuesto n veces por año. Tomando el límite cuando n tiende a infinito, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n && \text{Tomar el límite cuando } n \to \infty. \\ &= P \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right]^r && \text{Reescribir.} \\ &= P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^r && \text{Hacer } x = n/r. \text{ Entonces } x \to \infty \text{ cuando } n \to \infty. \\ &= Pe^r. && \text{Aplicar el teorema 5.15.} \end{aligned}$$

Este límite produce el balance después de 1 año de interés **compuesto continuo**. Así, para un depósito inicial de $1 000 al 8% de interés compuesto continuo, el balance al fin de año sería

$$\begin{aligned} A &= 1\,000e^{0.08} \\ &\approx \$1\,083.29 \end{aligned}$$

Estos resultados se resumen a continuación.

Resumen de las fórmulas de interés compuesto

Sea P = cantidad a depositar, t = número de años, A = balance después de t años, r = tasa de interés (forma decimal) y n = número de veces que se compone por año.

1. Compuesto n veces por año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. Compuesto continuamente: $A = Pe^{rt}$

EJEMPLO 6 Comparación de interés compuesto continuo y trimestral

Se hace un depósito de \$2 500 en una cuenta que paga un interés anual de 5%. Calcular el balance en la cuenta al final de 5 años si el interés se compone *a*) trimestralmente, *b*) mensualmente y *c*) continuamente.

Solución

a) $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4(5)}$ Compuesto trimestralmente.

$= 2\,500(1.0125)^{20}$

$\approx \$3\,205.09$

b) $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12(5)}$ Compuesto mensualmente.

$\approx 2\,500(1.0041667)^{60}$

$\approx \$3\,208.40$

c) $A = Pe^{rt} = 2\,500[e^{0.05(5)}]$ Compuesto continuamente.

$= 2\,500e^{0.25} \approx \$3\,210.06$

El balance en una cuenta de ahorros crece exponencialmente
Figura 5.26

La figura 5.26 muestra cómo se incrementa el balance durante el periodo de 5 años. Notar que se debe hacer constar que la escala de la figura no distingue gráficamente entre los tres tipos de crecimiento exponencial en *a*), *b*) y *c*).

EJEMPLO 7 Crecimiento de un cultivo de bacterias

Un cultivo de bacterias crece según la *función logística de crecimiento*

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}}, \quad t \geq 0$$

donde y es el peso del cultivo en gramos y t es el tiempo en horas. Calcular el peso del cultivo después de *a*) 0 horas, *b*) 1 hora y *c*) 10 horas. *d*) ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?

Solución

a) Cuando $t = 0$, $y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(0)}}$

$= 1$ gramo

b) Cuando $t = 1$, $y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(1)}}$

≈ 1.071 gramos

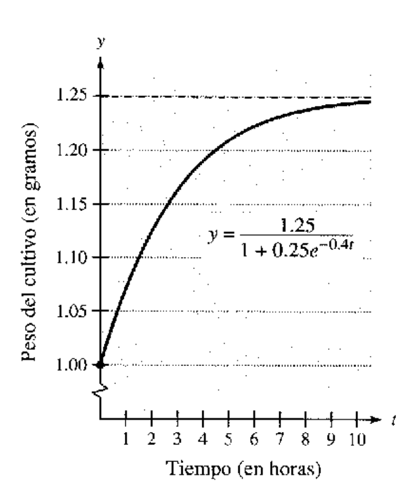
c) Cuando $t = 10$, $y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(10)}}$

≈ 1.244 gramos

d) Por último, tomando el límite para t tendiendo a infinito, se obtiene

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}} = \frac{1.25}{1 + 0} = 1.25 \text{ gramos}$$

La figura 5.27 muestra la gráfica de la función.



El límite de peso del cultivo cuando $t \to \infty$ es 1.25 gramos
Figura 5.27

Ejercicios de la sección 5.5

En los ejercicios 1 a 4, evaluar la expresión sin usar calculadora.

1. $\log_2 \frac{1}{8}$
2. $\log_{27} 9$
3. $\log_7 1$
4. $\log_a \dfrac{1}{a}$

En los ejercicios 5 a 8, escribir la ecuación exponencial en forma logarítmica o viceversa.

5. *a)* $2^3 = 8$ *b)* $3^{-1} = \frac{1}{3}$
6. *a)* $27^{2/3} = 9$ *b)* $16^{3/4} = 8$
7. *a)* $\log_{10} 0.01 = -2$ *b)* $\log_{0.5} 8 = -3$
8. *a)* $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ *b)* $49^{1/2} = 7$

En los ejercicios 9 a 14, dibujar a mano la gráfica de la función.

9. $y = 3^x$
10. $y = 3^{x-1}$
11. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
12. $y = 2^{x^2}$
13. $h(x) = 5^{x-2}$
14. $y = 3^{-|x|}$

En los ejercicios 15 a 20, despejar *x* o *b*.

15. *a)* $\log_{10} 1\,000 = x$ *b)* $\log_{10} 0.1 = x$
16. *a)* $\log_3 \frac{1}{81} = x$ *b)* $\log_6 36 = x$
17. *a)* $\log_3 x = -1$ *b)* $\log_2 x = -4$
18. *a)* $\log_b 27 = 3$ *b)* $\log_b 125 = 3$
19. *a)* $x^2 - x = \log_5 25$ *b)* $3x + 5 = \log_2 64$
20. *a)* $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$ *b)* $\log_{10}(x+3) - \log_{10} x = 1$

En los ejercicios 21 a 30, resolver la ecuación con calculadora y aproximar a tres decimales.

21. $3^{2x} = 75$
22. $5^{6x} = 8\,320$
23. $2^{3-z} = 625$
24. $3(5^{x-1}) = 86$
25. $\left(1 + \dfrac{0.09}{12}\right)^{12t} = 3$
26. $\left(1 + \dfrac{0.10}{365}\right)^{365t} = 2$
27. $\log_2(x-1) = 5$
28. $\log_{10}(t-3) = 2.6$
29. $\log_3 x^2 = 4.5$
30. $\log_5 \sqrt{x-4} = 3.2$

En los ejercicios 31 a 34, usar una computadora para representar gráficamente la función y aproximar su(s) cero(s) hasta tres decimales.

31. $g(x) = 6(2^{1-x}) - 25$
32. $f(t) = 300(1.0075^{12t}) - 735.41$
33. $h(s) = 32\log_{10}(s-2) + 15$
34. $g(x) = 1 - 2\log_{10}[x(x-3)]$

En los ejercicios 35 y 36 ilustrar cuáles de las funciones son inversas una de otra, dibujando sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas.

35. $f(x) = 4^x$, $g(x) = \log_4 x$
36. $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$

En los ejercicios 37 a 48, encontrar la derivada de la función propuesta.

37. $f(x) = 4^x$
38. $y = x(6^{-2x})$
39. $g(t) = t^2 2^t$
40. $f(t) = \dfrac{3^{2t}}{t}$
41. $h(\theta) = 2^{-\theta}\cos\pi\theta$
42. $g(\alpha) = 5^{-\alpha/2}\operatorname{sen} 2\alpha$
43. $f(x) = \log_2 \dfrac{x^2}{x-1}$
44. $h(x) = \log_3 \dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$
45. $y = \log_5 \sqrt{x^2-1}$
46. $y = \log_{10} \dfrac{x^2-1}{x}$
47. $g(t) = \dfrac{10\log_4 t}{t}$
48. $f(t) = t^{3/2}\log_2 \sqrt{t+1}$

En los ejercicios 49 a 52, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos dados.

49. $y = 2^{-x}$, $(-1, 2)$
50. $y = 5^{x-2}$, $(2, 1)$
51. $y = \log_3 x$, $(27, 3)$
52. $y = \log_{10} 2x$, $(5, 1)$

En los ejercicios 53 a 56, usar derivación logarítmica para hallar *dy/dx*.

53. $y = x^{2/x}$
54. $y = x^{x-1}$
55. $y = (x-2)^{x+1}$
56. $y = (1+x)^{1/x}$

En los ejercicios 57 a 60, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos siguientes.

57. $y = x^{\operatorname{sen} x}$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
58. $y = (\operatorname{sen} x)^{2x}$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$
59. $y = (\ln x)^{\cos x}$, $(e, 1)$
60. $y = x^{1/x}$, $(1, 1)$

En los ejercicios 61 a 66, hallar la integral.

61. $\int 3^x \, dx$

62. $\int 5^{-x} \, dx$

63. $\int x(5^{-x^2}) dx$

64. $\int (3 - x)7^{(3-x)^2} \, dx$

65. $\int \frac{3^{2x}}{1 + 3^{2x}} \, dx$

66. $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

En los ejercicios 67-70, evaluar la integral.

67. $\int_{-1}^{2} 2^x \, dx$

68. $\int_{-2}^{2} 4^{x/2} \, dx$

69. $\int_{0}^{1} (5^x - 3^x) \, dx$

70. $\int_{1}^{e} (6^x - 2^x) \, dx$

Área **En los ejercicios 71 y 72, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de la ecuación.**

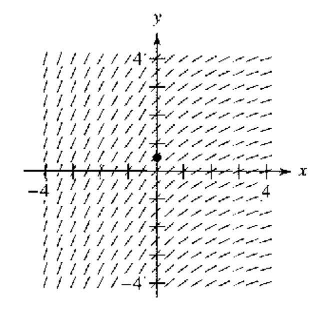
71. $y = 3^x, y = 0, x = 0, x = 3$

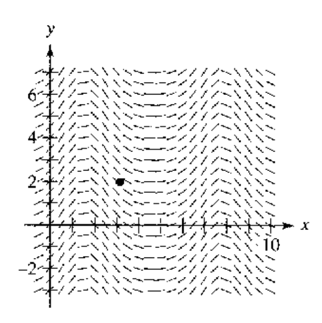
72. $y = 3^{\cos x} \operatorname{sen} x, y = 0, x = 0, x = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 73 y 74, se proporcionan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usando una computadora representar la solución. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

73. $\frac{dy}{dx} = 0.4^{x/3}, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$

74. $\frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x, \quad (\pi, 2)$





Desarrollo de conceptos

75. La tabla de valores se obtuvo por evaluación de una función. Determinar cuáles de estas afirmaciones pueden ser verdaderas o falsas, y explicar la razón.

a) y es una función exponencial de x.
b) y es una función logarítmica de x.
c) x es una función exponencial de y.
d) y es una función lineal de x.

x	1	2	8
y	0	1	3

76. Considerar la función $f(x) = \log_{10} x$.

a) ¿Cuál es el dominio de f?
b) Encontrar f^{-1}.
c) Si x es un número real entre 1 000 y 10 000, determinar el intervalo en el cual $f(x)$ puede ser encontrado.
d) Determinar el intervalo en el cual se encuentra x si $f(x)$ es negativo.
e) Si $f(x)$ aumenta en una unidad, ¿por qué factor hay que multiplicar x?
f) Hallar el cociente entre x_1 a x_2 sabiendo que $f(x_1) = 3n$ y $f(x_2) = n$.

77. Ordenar la función

$$f(x) = \log_2 x, \; g(x) = x^x, \; h(x) = x^2 \quad \text{y} \quad k(x) = 2^x$$

desde la que tiene mayor ritmo de crecimiento hasta la que tiene el menor, para valores grandes de x.

78. Calcular la derivada de cada función, para a constante.

a) $y = x^a$ *b*) $y = a^x$
c) $y = x^x$ *d*) $y = a^a$

79. ***Inflación*** Si el ritmo o tasa de inflación anual es, en promedio, de 5% para los próximos 10 años el costo aproximado C de bienes o servicios durante una década es

$$C(t) = P(1.05)^t$$

donde t es el tiempo en años y P es el costo actual.

a) Si el cambio de aceite del automóvil cuesta hoy \$24.95, estimar el precio dentro de 10 años.
b) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de C respecto a t para $t = 1$ y $t = 8$.
c) Verificar que el ritmo de cambio de C es proporcional a C. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

80. ***Depreciación*** Después de t años, el valor de un automóvil adquirido por \$20 000 es

$$V(t) = 20\,000\left(\tfrac{3}{4}\right)^t.$$

a) Usar una computadora para representar gráficamente la función y determinar el valor del automóvil 2 años después de su compra.
b) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de V respecto a t para $t = 1$ y $t = 4$.
c) Usar una computadora para representar $V'(t)$ y determinar la asíntota horizontal. Interpretar su significado en el contexto del problema.

Interés compuesto **En los ejercicios 81 a 84, completar la tabla para determinar el balance A para P dólares invertidos a una tasa de interés r, durante t años, n veces al año.**

n	1	2	4	12	365	Intereses continuos
A						

81. $P = \$1\,000$
$r = 3\frac{1}{2}\%$
$t = 10$ años

82. $P = \$2\,500$
$r = 6\%$
$t = 20$ años

83. $P = \$1\,000$
$r = 5\%$
$t = 30$ años

84. $P = \$5\,000$
$r = 7\%$
$t = 25$ años

Interés compuesto **En los ejercicios 85 a 88, completar la tabla para determinar la cantidad de dinero P (valor presente) que debe ser depositada a una tasa r de interés anual para producir un balance de \$100 000 en t años.**

t	1	10	20	30	40	50
P						

85. $r = 5\%$
Interés compuesto continuo

86. $r = 6\%$
Interés compuesto continuo

87. $r = 5\%$
Interés compuesto mensual

88. $r = 7\%$
Interés compuesto diario

89. ***Interés compuesto*** Se tiene una inversión de una renta de 6% compuesto diariamente. ¿Cuál de las siguientes opciones produciría un balance mayor después de 8 años?

a) \$20 000 ahora
b) \$30 000 después de 8 años
c) \$8 000 ahora y \$20 000 después de 4 años
d) \$9 000 ahora, \$9 000 después de 4 años y \$9 000 después de 8 años.

90. ***Interés compuesto*** Considerar un depósito de \$100 a r% de interés compuesto continuo durante 20 años. Usar una herramienta gráfica para representar las funciones exponenciales que describen el crecimiento del capital para cada una de las tasas de interés que se especifican. Comparar los balances finales de cada una de las tasas.

a) $r = 3\%$
b) $r = 5\%$
c) $r = 6\%$

91. ***Producción de madera*** El rendimiento V (en millones de pies cúbicos por acre) de un bosque de t años de edad es

$$V = 6.7e^{(-48.1)/t}$$

donde t es medido en años.

a) Calcular el volumen límite de madera por acre cuando t tiende a infinito.
b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V cuando $t = 20$ años y cuando $t = 60$ años.

92. ***Teoría del aprendizaje*** Un modelo matemático para la proporción P de respuestas correctas tras n ensayos, en un experimento sobre aprendizaje, resultó seguir el modelo

$$P = \frac{0.86}{1 + e^{-0.25n}}.$$

a) Calcular la proporción límite de respuestas correctas cuando n tiende a infinito.
b) Calcular el ritmo de cambio P después de $n = 3$ pruebas y de $n = 10$ pruebas.

93. ***Defoliación forestal*** Para estimar la defoliación producida por las lagartas durante un año, un ingeniero forestal cuenta el número de montones de huevos en $\frac{1}{40}$ de acre en el otoño anterior. El porcentaje de defoliación y está dado aproximadamente por

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.0625x}}$$

donde x es el número de montones en miles. (*Fuente: USDA Forest Service.*)

a) Usar una computadora para representar la función.
b) Estimar el porcentaje de defoliación si se cuentan 2 000 montones de huevos.
c) Estimar el número de montones de huevos que existen si se observa que aproximadamente $\frac{2}{3}$ del bosque se han defoliado.
d) Mediante el cálculo, estimar el valor de x para el que y crece más rápidamente.

94. ***Crecimiento de poblaciones*** Un lago se repuebla con 500 peces, y su población crece de acuerdo con la curva logística

$$p(t) = \frac{10\,000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

donde t se mide en meses

a) Usar la función de regresión de una computadora para representar la función.

b) ¿Cuál es el tamaño límite de la población de peces?

c) ¿A qué ritmo o velocidad crece la población de peces al final de 1 mes y al final del décimo mes?

d) ¿Después de cuántos meses crece más de prisa la población?

95. ***Análisis de datos*** La tabla muestra la resistencia B a la ruptura (en toneladas) de un cable de acero de varios diámetros d (en pulgadas).

d	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
B	9.85	21.8	38.3	59.2	84.4	114.0

a) Usar la función de regresión de la computadora para ajustar un modelo exponencial a los datos.

b) Usar una computadora para representar los datos y el modelo.

c) Calcular el retorno o la tasa de crecimiento del modelo cuando $d = 0.8$ y $d = 1.5$.

96. ***Comparación de modelos*** El monto y (en miles de millones de dólares) de las donaciones filantrópicas (de individuos, fundaciones, corporaciones y banquetes de caridad) en Estados Unidos durante los años 1995 a 2002 es mostrado en la tabla, donde $x = 5$ corresponde a 1995. (*Fuente: AAFRC Trust for Philantropy.*)

x	5	6	7	8	9	10	11	12
y	124.0	138.6	157.1	174.8	199.0	210.9	212.0	240.9

a) Usar la función de regresión de una computadora para ajustar los siguientes modelos a los datos.

$y_1 = ax + b$

$y_2 = a + b \ln x$

$y_3 = ab^x$

$y_4 = ax^b$

b) Usar una computadora para representar los datos y cada uno de los modelos. ¿Cuál de los modelos se ajusta mejor a los datos?

c) Interpretar la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.

d) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de cada modelo para el año 1996. ¿Cuál de ellos crece a mayor ritmo o velocidad en 1996?

97. ***Conjetura***

a) Usar una computadora que aproxime las integrales de las funciones

$$f(t) = 4\left(\frac{3}{8}\right)^{2t/3}, \quad g(t) = 4\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{4}\right)^t \quad \text{y} \quad h(t) = 4e^{-0.653886t}$$

en el intervalo [0, 4].

b) Usar una computadora para representar gráficamente las tres funciones.

c) Usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para formular una conjetura acerca de las tres funciones. ¿Podría haber realizado una conjetura usando sólo el apartado *a*)? Explicar. Demostrar la conjetura analíticamente.

98. Completar la tabla para demostrar que e puede definirse también como $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$(1 + x)^{1/x}$					

En los ejercicios 99 y 100, encontrar una función exponencial que se ajuste a los datos experimentales tomados en los tiempos t indicados.

99.

t	0	1	2	3	4
y	1 200.00	720.00	432.00	259.20	155.52

100.

t	0	1	2	3	4
y	600.00	630.00	661.50	694.58	729.30

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 106, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.**

101. $e = \dfrac{271\,801}{99\,900}$

102. Si $f(x) = \ln x$, entonces $f(e^{n+1}) - f(e^n) = 1$ para cualquier valor de n.

103. Las funciones $f(x) = 2 + e^x$ y $g(x) = \ln (x - 2)$ son inversas una de otra.

104. La función exponencial $y = Ce^x$ es la solución de la ecuación diferencial $d^ny/dx^n = y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

105. Las gráficas $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en ángulo recto.

106. Si $f(x) = g(x)\, e^x$, los únicos ceros de f son los ceros de g.

107. Resolver la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{25}y\left(\frac{5}{4} - y\right) \qquad y(0) = 1$$

y obtener la función de crecimiento logístico del ejemplo 7.

$$\left[\textit{Sugerencia: } \frac{1}{y\left(\frac{5}{4} - y\right)} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{5}{4} - y}\right)\right]$$

108. Dada la función exponencial $f(x) = a^x$, demostrar que

a) $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$

b) $f(2x) = [f(x)]^2$.

109. *a*) Determinar y' dado $y^x = x^y$.

b) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y^x = x^y$ en cada uno de los siguientes puntos.

i) (c, c)

ii) $(2, 4)$

iii) $(4, 2)$

c) En qué punto de la gráfica de $y^x = x^y$ no existe la recta tangente?

110. Considerar la función $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = b^x$, $b > 1$.

a) Sea $b = 2$, usar la computadora para representar gráficamente f y g en la misma pantalla. Identificar los puntos de intersección.

b) Repetir el apartado *a*) usando $b = 3$.

c) Calcular todos los valores de b tales que $g(x) \geq f(x)$ para todo x.

Preparación del examen Putnam

111. ¿Cuál es mayor

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} \quad \text{o} \quad \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

donde $n > 8$?

112. Demostrar que si x es positivo, entonces

$$\log_e\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1 + x}.$$

Proyecto de trabajo: Estimación gráfica de pendientes

Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

a) Usar una calculadora para representar f en la ventana $-3 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$. ¿Cuál es el dominio de f ?

b) Usar las funciones *trace* y *zoom* de la calculadora para estimar

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

c) Explicar brevemente por qué la función f es continua en todos los números reales.

d) Estimar a simple vista la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

e) Explicar por qué la derivada de una función se puede aproximar mediante la fórmula.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

para valores pequeños de Δx. Usar esta fórmula para aproximar la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x}$$

¿Cuánto vale la pendiente de f en $(0, 1)$?

f) Hallar una fórmula para la derivada de f y determinar $f'(0)$. Explicar por escrito porqué una calculadora puede propor-cionar un valor incorrecto de la pendiente de una gráfica.

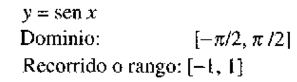
g) Usar esa fórmula para la derivada de f con el fin de encontrar los extremos relativos de f. Verificar su respuesta con la computadora.

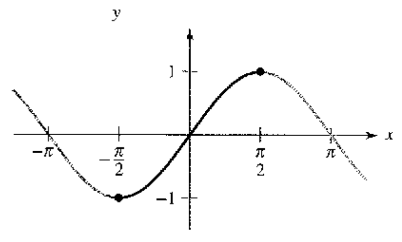
PARA MAYOR INFORMACIÓN Acerca de la utilización del uso de la computadora para estimar pendientes, véase el artículo "Computer-Aided Delusions", de Richard L. Hall en *The College Mathematics Journal*.

Sección 5.6 Funciones trigonométricas inversas: derivación

- **Desarrollar propiedades de seis funciones trigonométricas inversas.**
- **Derivar las funciones trigonométricas inversas.**
- **Repasar las reglas básicas de derivación de las funciones elementales.**

Funciones trigonométricas inversas





La función seno es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.28

Esta sección comienza con una afirmación sorprendente: *ninguna de las seis funciones trigonométricas tienen inversa.* Y es cierto, ya que las seis funciones trigonométricas son periódicas y en consecuencia no son inyectivas. En esta sección se analizan esas seis funciones para ver si es posible redefinir su dominio de manera tal que, en el *dominio restringido*, tengan funciones inversas.

En el ejemplo 4 de la sección 5.3 se vio que la función seno es creciente (y por tanto inyectiva) en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (ver figura 5.28). En ese intervalo se puede definir la inversa de la función seno *restringida* como

$$y = \text{arcsen } x \qquad \text{si y sólo si} \qquad \text{sen } y = x$$

donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le \text{arcsen } x \le \pi/2$.

Bajo restricciones adecuadas, cada una de las seis funciones trigonométricas es inyectiva y admite inversa, como se muestra en las siguientes definiciones.

Definición de las funciones trigonométricas inversas

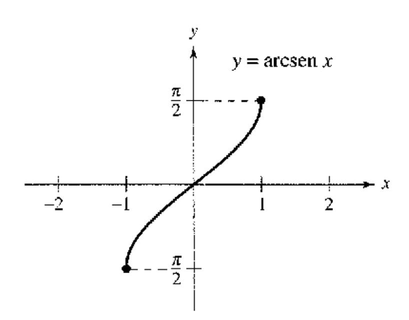
Función	*Dominio*	*Recorrido o rango*
$y = \text{arcsen } x$ si y sólo si $\text{sen } y = x$	$-1 \le x \le 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$
$y = \text{arccot } x$ si y sólo si $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arcsec } x$ si y sólo si $\sec y = x$	$\lvert x \rvert \ge 1$	$0 \le y \le \pi, \quad y \ne \dfrac{\pi}{2}$
$y = \text{arccsc } x$ si y sólo si $\csc y = x$	$\lvert x \rvert \ge 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}, \quad y \ne 0$

NOTA El término "arcsen x" se lee "el arco seno de x" o algunas veces "el ángulo cuyo sen es x". Una notación alternativa de la función inversa del seno es "$\text{sen}^{-1} x$".

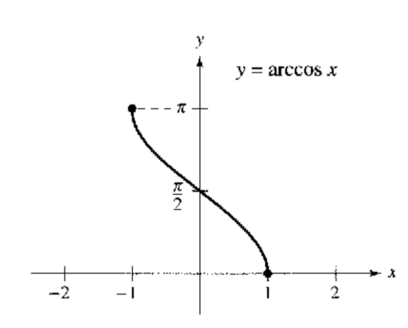
EXPLORACIÓN

La función inversa de la secante En la definición anterior, la función inversa de la secante se ha definido restringiendo el dominio de la función secante a los intervalos $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. La mayoría de los libros coincide en la restricción elegida, pero algunos discrepan. ¿Qué otros dominios podrían adoptarse? Explicar el razonamiento gráficamente. La mayoría de las calculadoras no dispone de la función inversa de la secante. ¿Cómo se puede evaluar la función inversa de la secante con la calculadora?

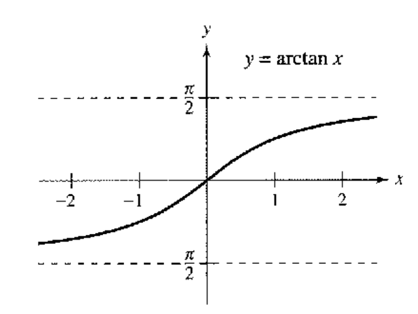
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 5.29.



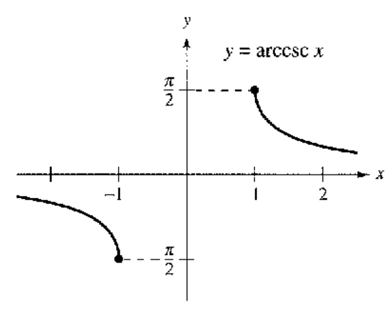
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, \pi/2]$



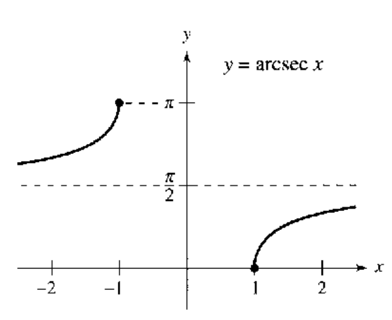
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \pi]$



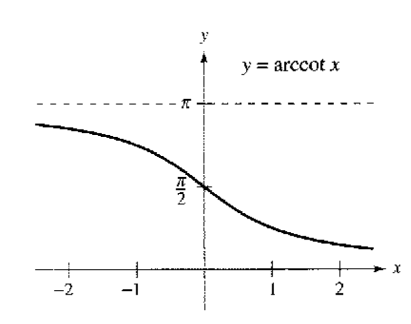
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, \pi)$

Figura 5.29

EJEMPLO 1 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas

Evaluar cada una de las funciones.

***a*)** $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ***b*)** $\arccos 0$ ***c*)** $\arctan \sqrt{3}$ ***d*)** $\operatorname{arcsen}(0.3)$

NOTA Cuando se evalúan funciones trigonométricas inversas, recordar que los *ángulos están medidos en radianes*.

Solución

***a*)** Por definición, $y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ implica que $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ el valor correcto de y es $-\pi/6$.

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

***b*)** Por definición $y = \arccos 0$ implica que $\cos y = 0$. En el intervalo $[0, \pi]$ se tiene $y = \pi/2$.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

***c*)** Por definición, $y = \arctan \sqrt{3}$ implica que $\tan y = \sqrt{3}$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se tiene $y = \pi/3$.

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

***d*)** Usando la calculadora en modo *radianes* se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(0.3) \approx 0.305.$$

EXPLORACIÓN

Graficar $y = \arccos(\cos x)$ para $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. ¿Por qué la gráfica no es semejante a la gráfica de $y = x$?

Las funciones inversas tienen las propiedades

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ y } f^{-1}(f(x)) = x$$

Cuando se aplican estas relaciones a las funciones trigonométricas inversas, debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas tienen inversas sólo en dominios restringidos. Para valores de x fuera de esos dominios, esas dos propiedades no son válidas. Por ejemplo, arcsen (sen π) es 0, no π.

Propiedades de las funciones trigonométricas

Si $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, entonces

$$\text{sen}(\text{arcsen } x) = x \text{ y } \text{arcsen}(\text{sen } y) = y.$$

Si $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\tan(\arctan x) = x \text{ y } \arctan(\tan y) = y.$$

Si $|x| \geq 1$ y $0 \leq y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \leq \pi$, entonces

$$\sec(\text{arcsec } x) = x \text{ y } \text{arcsec}(\sec y) = y.$$

Propiedades análogas son válidas para las otras funciones trigonométricas inversas.

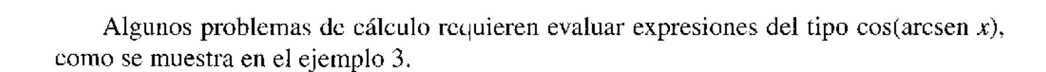
EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación

$\arctan(2x - 3) = \dfrac{\pi}{4}$ — Ecuación original.

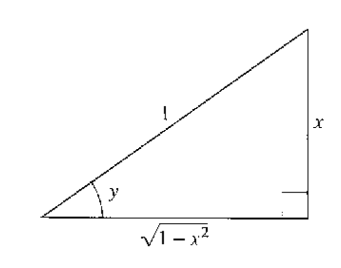
$\tan[\arctan(2x - 3)] = \tan \dfrac{\pi}{4}$ — Tomar tangentes en ambos lados.

$2x - 3 = 1$ — $\tan(\arctan x) = x$.

$x = 2$ — Despejar x.



Algunos problemas de cálculo requieren evaluar expresiones del tipo cos(arcsen x), como se muestra en el ejemplo 3.



$y = \text{arcsen } x$
Figura 5.30

EJEMPLO 3 Uso de triángulos rectángulos

a) Dado $y = \text{arcsen } x$, donde $0 < y < \pi/2$, encontrar cos y.
b) Dado $y = \text{arcsec}(\sqrt{5}/2)$, encontrar tan y.

Solución

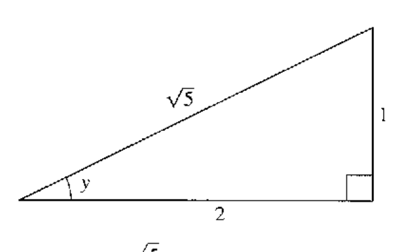
a) Como $y = \text{arcsen } x$, se sabe que sen $y = x$. Esta relación entre x y y puede representarse en un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 5.30.

$$\cos y = \cos(\text{arcsen } x) = \frac{\text{adj.}}{\text{hip.}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(Este resultado es válido para $-\pi/2 < y < 0$.)

b) Usando el triángulo rectángulo mostrado en la figura 5.31 se obtiene

$$\tan y = \tan\left[\text{arcsec}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{\text{op.}}{\text{adj.}} = \frac{1}{2}$$



$y = \text{arcsec}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
Figura 5.31

NOTA No hay acuerdo universal sobre la definición de arcsen x (o de arccsc x) para valores negativos de x. Cuando se definió aquí el recorrido o rango de arco secante, se eligió preservar la identidad recíproca.

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}.$$

Por ejemplo, para evaluar arcsec (-2), se puede escribir

$$\operatorname{arcsec}(-2) = \arccos(-0.5) \approx 2.09.$$

Una de las consecuencias de la definición de la inversa de la función secante dada en este texto es que su gráfica tiene pendiente positiva en todo valor de x de su dominio. (Ver figura 5.29.) Ello se refleja en el signo de valor absoluto en la fórmula de la derivada de arcsec x.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

En la sección 5.1 se vio que la derivada de la función *trascendente* $f(x) = \ln x$ es la función *algebraica* $f'(x) = 1/x$. Ahora veremos que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son también algebraicas (aunque las funciones trigonométricas son trascendentes).

El próximo teorema presenta las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas. Notar que las derivadas de arccos u, arccot u, y arccsc u son las *negativas* de la derivada de arcsen u, arctan u, y arcsec u, respectivamente.

TEOREMA 5.16 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Si u es una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

Estas fórmulas se deducen por derivación implícita. Por ejemplo, si $y = \operatorname{arcsen} x$, entonces sen $y = x$ y $(\cos y)\, y' = 1$. (Ver ejercicio 94.)

TECNOLOGÍA Si la calculadora no tiene la función arco secante, se puede obtener usando

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}.$$

EJEMPLO 4 Derivación de funciones trigonométricas inversas

a) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(2x)] = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\arctan(3x)] = \dfrac{3}{1+(3x)^2} = \dfrac{3}{1+9x^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}\sqrt{x}] = \dfrac{(1/2)\,x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} e^{2x}] = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

El signo de valor absoluto no es necesario, porque $e^{2x} > 0$.

EJEMPLO 5 Una derivada que puede ser simplificada

NOTA En el ejemplo 5, se aprecia una de las ventajas de las funciones trigonométricas inversas: pueden utilizarse para integrar funciones algebraicas comunes. Por ejemplo, del resultado mostrado en el ejemplo, se sigue que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Derivar $y = \operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}$.

Solución

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= 2\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de una función trigonométrica inversa

Analizar la gráfica de $y = (\arctan x)^2$.

Solución De la derivada

$$y' = 2(\arctan x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{2\arctan x}{1+x^2}$$

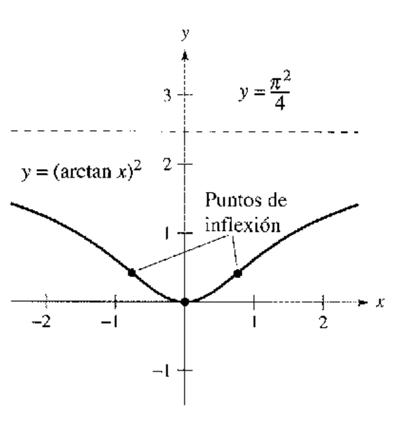
se puede observar que el único punto crítico es $x = 0$. Por el criterio de la primera derivada, este valor corresponde a un mínimo relativo. Y obteniendo la segunda derivada

$$y'' = \frac{(1+x^2)\left(\frac{2}{1+x^2}\right) - (2\arctan x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-2x\arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

se concluye que los puntos de inflexión se presentan donde $2x \arctan x = 1$. Usando el método de Newton, esos puntos son $x \approx \pm 0.765$. Por último, como

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

se concluye que la gráfica tiene a $y = \pi^2/4$ como asíntota horizontal. La figura 5.32 muestra la gráfica.



La gráfica de $y = (\arctan x)^2$ tiene una asíntota horizontal a $y = \pi^2/4$
Figura 5.32

EJEMPLO 7 Obtener un ángulo máximo

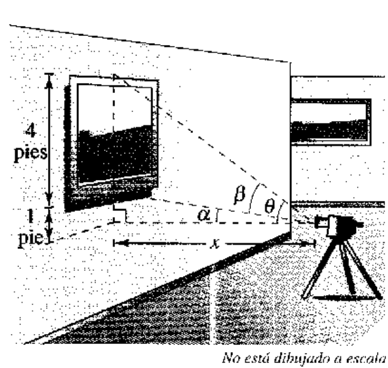
Un fotógrafo está fotografiando un cuadro de 4 pies de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está a 1 pie bajo el extremo inferior del cuadro como se muestra en la figura 5.33. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse la cámara para conseguir que el ángulo subtendido por el lente de la cámara sea máximo?

Solución En la figura 5.33, sea β el ángulo que se desea maximizar

$$\beta = \theta - \alpha = \operatorname{arccot}\frac{x}{5} - \operatorname{arccot} x$$

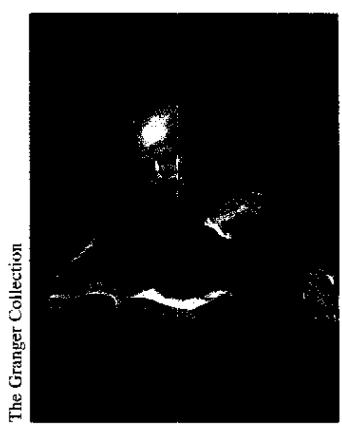
Derivando se obtiene

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-1/5}{1+(x^2/25)} - \frac{-1}{1+x^2} = \frac{-5}{25+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{4(5-x^2)}{(25+x^2)(1+x^2)}.$$



La cámara debe estar a 2.236 pies de la pared para maximizar el ángulo β
Figura 5.33

como $d\beta/dx = 0$ cuando $x = \sqrt{5}$, se puede concluir por el criterio de la primera derivada que esta distancia hace máximo al ángulo β. Así pues, la distancia es $x \approx 2.236$ pies y el ángulo máximo es $\beta \approx 0.7297$ radianes $\approx 41.81°$.



The Granger Collection

GALILEO GALILEI (1564-1642)
La visión de la ciencia de Galileo partía de la aceptada perspectiva aristotélica de que la Naturaleza tiene magnitudes susceptibles de descripción, tales como "fluidez" o "potencialidad". Él quiso describir el mundo físico en términos de *cantidades medibles*, como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa.

Resumen de las reglas básicas de derivación

A principios del siglo XVII, Europa se vio inmersa en una era científica representada por grandes pensadores como Descartes, Galileo, Huygens, Newton y Kepler. Estos hombres creían en una naturaleza gobernada por leyes básicas, expresables en gran parte en términos matemáticos. Una de las publicaciones más influyentes de la época —el *Diálogo sopra i die massimi sistemi del mondo* de Galileo Galilei— se ha convertido en una descripción clásica del pensamiento científico moderno.

Conforme las matemáticas se han ido desarrollando en los siglos posteriores, se ha visto que unas cuantas funciones elementales son suficientes para modelar la mayoría* de los fenómenos de la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía y otros muchos campos. Una **función elemental** es una función de la lista siguiente o una que puede obtenerse con éstas mediante sumas, productos, cocientes o composiciones.

Funciones algebraicas	*Funciones trascendentes*
Funciones polinómicas	Funciones logarítmicas
Funciones racionales	Funciones exponenciales
Funciones con radicales	Funciones trigonométricas
	Funciones trigonométricas inversas

Con las reglas de derivación introducidas hasta ahora en el texto es posible derivar cualquier función elemental. Por conveniencia, se resumen esas reglas aquí.

Reglas básicas de derivación de funciones elementales

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$
12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$
23. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
24. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

** Algunas funciones importantes usadas en ingeniería y ciencias (como las funciones de Bessel y la función gamma) no son funciones elementales.*

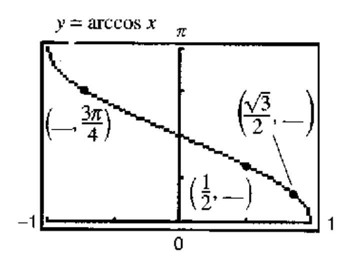
Ejercicios de la sección 5.6

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 y 2, *a*) usar una computadora para completar la tabla, *b*) representar a mano los puntos de la tabla y la función, *c*) usar una computadora para representar gráficamente la función y comparar con el dibujo del apartado *b*), y *d*) hallar las intersecciones con los ejes y las simetrías de la gráfica.**

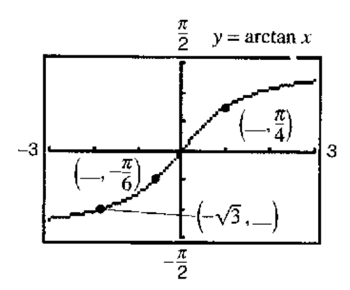
x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y											

1. $y = \text{arcsen } x$ **2.** $y = \arccos x$

3. Determinar las coordenadas que faltan en los puntos de la gráfica de la función.



4. Determinar las coordenadas que faltan en los puntos de la gráfica de la función.



En los ejercicios 5 a 12, evaluar la expresión sin usar calculadora.

5. $\text{arcsen } \frac{1}{2}$ **6.** $\text{arcsen } 0$

7. $\arccos \frac{1}{2}$ **8.** $\arccos 0$

9. $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\text{arccot}(-\sqrt{3})$

11. $\text{arccsc}(-\sqrt{2})$ **12.** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

En los ejercicios 13 a 16, usar la calculadora para aproximar el valor. Redondear la respuesta a dos decimales.

13. $\arccos(-0.8)$ **14.** $\text{arcsen}(-0.39)$

15. $\text{arcsec } 1.269$ **16.** $\arctan(-3)$

En los ejercicios 17 a 20, evaluar la expresión sin usar calculadora. (*Sugerencia:* Ver ejercicio 3.)

17. *a*) $\text{sen}\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$ **18.** *a*) $\tan\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\sec\left(\text{arcsen } \frac{4}{5}\right)$ *b*) $\cos\left(\text{arcsen } \frac{5}{13}\right)$

19. *a*) $\cot\left[\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **20.** *a*) $\sec\left[\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

b) $\csc\left[\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right]$ *b*) $\tan\left[\text{arcsen}\left(-\frac{5}{6}\right)\right]$

En los ejercicios 21 a 28, escribir la expresión en forma algebraica.

21. $\cos(\text{arcsen } 2x)$ **22.** $\sec(\arctan 4x)$

23. $\text{sen}(\text{arcsec } x)$ **24.** $\cos(\text{arccot } x)$

25. $\tan\left(\text{arcsec } \frac{x}{3}\right)$ **26.** $\sec[\text{arcsen}(x - 1)]$

27. $\csc\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ **28.** $\cos\left(\text{arcsen } \frac{x-h}{r}\right)$

En los ejercicios 29 y 30, *a*) representar *f* y *g* en la misma pantalla en la computadora para verificar si son iguales, *b*) usar álgebra para verificar que *f* y *g* son iguales, y *c*) identificar las asíntotas horizontales de las gráficas.

29. $f(x) = \text{sen}(\arctan 2x)$, $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

30. $f(x) = \tan\left(\arccos \frac{x}{2}\right)$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

En los ejercicios 31 a 34, despejar *x*.

31. $\text{arcsen}(3x - \pi) = \frac{1}{2}$ **32.** $\arctan(2x - 5) = -1$

33. $\text{arcsen}\sqrt{2x} = \arccos\sqrt{x}$ **34.** $\arccos x = \text{arcsec } x$

En los ejercicios 35 y 36, verificar cada identidad.

35. *a*) $\text{arccsc } x = \text{arcsen } \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$

b) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$

36. *a*) $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen } x, \quad |x| \leq 1$

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1$

En los ejercicios 37 a 40, dibujar la gráfica de la función a mano. Usar una computadora para verificar la gráfica.

37. $f(x) = \text{arcsen}(x - 1)$ **38.** $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$

39. $f(x) = \text{arcsec } 2x$ **40.** $f(x) = \arccos \frac{x}{4}$

En los ejercicios 41 a 60, hallar la derivada de la función.

41. $f(x) = 2 \operatorname{arcsen}(x - 1)$

42. $f(t) = \operatorname{arcsen} t^2$

43. $g(x) = 3 \arccos \dfrac{x}{2}$

44. $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$

45. $f(x) = \arctan \dfrac{x}{a}$

46. $f(x) = \arctan \sqrt{x}$

47. $g(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} 3x}{x}$

48. $h(x) = x^2 \arctan x$

49. $h(t) = \operatorname{sen}(\arccos t)$

50. $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$

51. $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$

52. $y = \ln(t^2 + 4) - \dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{t}{2}$

53. $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} + \arctan x\right)$

54. $y = \dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{4 - x^2} + 4 \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

55. $y = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$

56. $y = x \arctan 2x - \dfrac{1}{4} \ln(1 + 4x^2)$

57. $y = 8 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{4} - \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$

58. $y = 25 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{5} - x\sqrt{25 - x^2}$

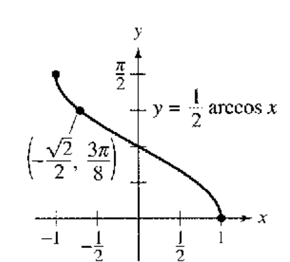
59. $y = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}$

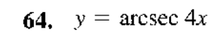
60. $y = \arctan \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2(x^2 + 4)}$

En los ejercicios 61 a 66, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado.

61. $y = 2 \operatorname{arcsen} x$

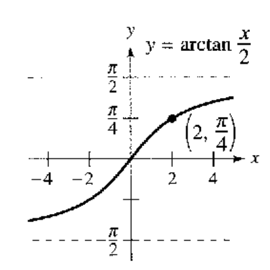
62. $y = \dfrac{1}{2} \arccos x$

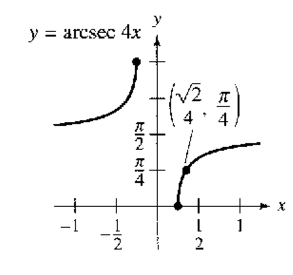




63. $y = \arctan \dfrac{x}{2}$

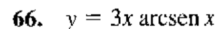
64. $y = \operatorname{arcsec} 4x$

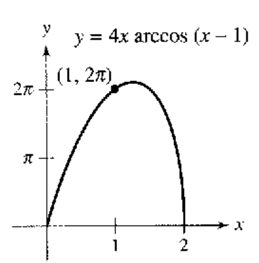


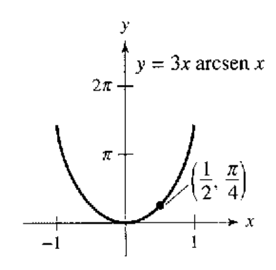


65. $y = 4x \arccos(x - 1)$

66. $y = 3x \operatorname{arcsen} x$







Aproximación lineal y cuadrática **En los ejercicios 67 a 70, usar un sistema algebraico por computadora para hallar la aproximación lineal**

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación cuadrática

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

de la función f en $x = a$. Dibujar la gráfica de la función y sus aproximaciones lineal y cuadrática.

67. $f(x) = \arctan x, \quad a = 0$

68. $f(x) = \arccos x, \quad a = 0$

69. $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad a = \frac{1}{2}$

70. $f(x) = \arctan x, \quad a = 1$

En los ejercicios 71 a 74, encontrar los extremos relativos de la función.

71. $f(x) = \operatorname{arcsec} x - x$

72. $f(x) = \operatorname{arcsen} x - 2x$

73. $f(x) = \arctan x - \arctan(x - 4)$

74. $h(x) = \operatorname{arcsen} x - 2 \arctan x$

Derivación implícita **En los ejercicios 75 a 78, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado.**

75. $x^2 + x \arctan y = y - 1, \quad \left(-\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

76. $\arctan(xy) = \operatorname{arcsen}(x + y), \quad (0, 0)$

77. $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y = \dfrac{\pi}{2}, \quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

78. $\arctan(x + y) = y^2 + \dfrac{\pi}{4}, \quad (1, 0)$

Desarrollo de conceptos

79. Explicar por qué los dominios de las funciones trigonométricas están restringidos cuando se calcula la función trigonométrica inversa.

80. Explicar por qué $\tan \pi = 0$ no implica que $\arctan 0 = \pi$.

81. Explicar cómo dibujar $y = \operatorname{arccot} x$ en una computadora que no tiene la función arco cotangente.

82. ¿Son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas algebraicas o trascendentales? Cítense las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 88, determinar si la sentencia es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

83. Dado que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, se tiene que $\arccos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

84. $\operatorname{arcsen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

85. La pendiente de la gráfica de la función tangente inversa es positiva para todo x.

86. El dominio de $y = \operatorname{arcsen} x$ es $[0, \pi]$.

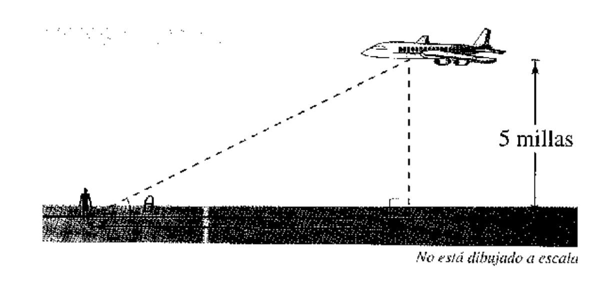
87. $\frac{d}{dx}[\arctan(\tan x)] = 1$ para todo x en su dominio.

88. $\operatorname{aecsen}^2 x + \arccos^2 x = 1$

89. ***Ritmo o velocidad de cambio angular*** Un aeroplano vuela a una altitud de 5 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considerar θ y x como se muestra en la figura.

a) Escribir θ como una función de x.

b) La velocidad del aeroplano es 400 millas por hora. Encontrar $d\theta/dt$ cuando $x = 10$ millas y cuando $x = 3$ millas.



90. ***Redactar*** Repetir el ejercicio 89 si la altitud del aeroplano es 3 millas y describir cómo la altitud afecta el ritmo o velocidad de cambio de θ.

91. ***Ritmo o velocidad de cambio angular*** En un experimento sobre caída libre, se deja caer un objeto desde una altura de 256 pies. Una cámara situada en el suelo y distante 500 pies del punto de impacto, toma imágenes de la caída (ver figura).

a) Hallar la función posición que describe la altura del objeto en cada instante t, supuesto que se deja caer en $t = 0$. ¿En qué momento el objeto llega al suelo?

b) Calcular el ritmo o velocidad de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 1$ y $t = 2$.

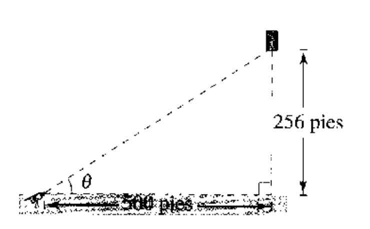


Figura para 91

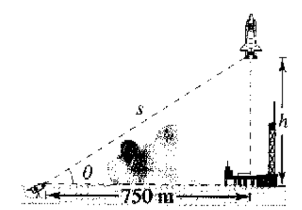


Figura para 92

92. ***Ritmo o velocidad de cambio angular*** Una cámara de televisión graba el despegue vertical de un cohete desde un punto a 750 metros del punto de lanzamiento. Sea θ el ángulo de elevación del cohete y s la distancia entre la cámara y el cohete. Expresar θ como función de s durante el ascenso del cohete. Diferenciar el resultado para hallar $d\theta/dt$ en términos de s y de ds/dt.

93. *a)* Demostrar que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}, \quad xy \neq 1.$$

b) Usar la fórmula del apartado *a)* para probar que

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

94. Verificar las siguientes fórmulas de derivación.

a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ *b)* $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1 + u^2}$

c) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

d) $\frac{d}{dx}[\arccos u] = -\frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ *e)* $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$

f) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

95. ***Existencia de una inversa*** Determinar los valores de k para los que la función $f(x) = kx + \operatorname{sen} x$ tiene función inversa.

96. ***Para pensar*** Usar una computadora para representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

a) ¿Por qué la gráfica de g no es la recta $y = x$?

b) Hallar los extremos de g.

97. *a)* Representar la función $f(x) = \arccos x + \operatorname{arcsen} x$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. *b)* Describir la gráfica de f. *c)* Comprobar el resultado del apartado *b)* analíticamente.

98. Comprobar que $x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$, $|x| < 1$.

99. Calcular el valor de c en el intervalo $[0, 4]$ sobre el eje x que maximiza el ángulo θ.

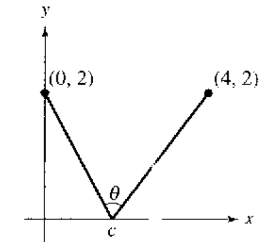


Figura para 99

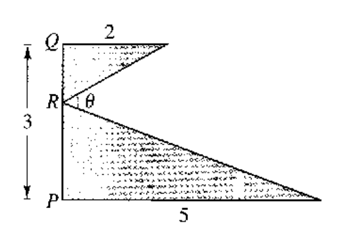


Figura para 100

100. Encontrar PR tal que $0 \leq PR \leq 3$ y $m\angle\theta$ sea un máximo.

101. Algunos textos de cálculo definen la inversa de la función secante usando el dominio $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$.

a) Hacer un boceto de la gráfica $y = \operatorname{arcsec} x$ usando este rango.

b) Mostrar que $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Sección 5.7 Funciones trigonométricas inversas: integración

- **Integrar funciones cuyas primitivas o antiderivadas contienen funciones trigonométricas inversas.**
- **Integrar funciones completando un cuadrado.**
- **Resumir las reglas básicas de integración de funciones elementales.**

Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas se agrupan en tres pares. En cada par, la derivada de una es la negativa de la otra. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen}\, x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cuando se hace una lista de *antiderivadas* o *primitivas* que correspondan a cada una de las funciones trigonométricas inversas, es suficiente citar una de cada par. Es conveniente usar arcsen x como primitiva de $1/\sqrt{1-x^2}$, en lugar de $-\arccos x$. El siguiente teorema da una fórmula para la primitiva de cada una de las tres parejas. La demostración de estas reglas de integración se deja como ejercicio (ver ejercicios 79 a 81).

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo "A Direct Proof of the Integral Formula for Arctangent", de Arnold J. Insel, en *The College Mathematics Journal*, se puede encontrar una detallada demostración de la parte 2 del teorema 5.17.

TEOREMA 5.17 Integrales que involucran funciones trigonométricas inversas

Sea u una función derivable de x, y sea $a > 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\frac{u}{a} + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 1 Integrales con funciones trigonométricas inversas

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \text{arcsen}\frac{x}{2} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(\sqrt{2})^2+(3x)^2}$ $u = 3x,\ a = \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{3x}{\sqrt{2}} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}}$ $u = 2x,\ a = 3$

$$= \frac{1}{3}\,\text{arcsec}\frac{|2x|}{3} + C$$

Las integrales del ejemplo 1 son aplicaciones a simple vista de las fórmulas de integración. Desafortunadamente, no es lo frecuente. Las fórmulas de integración que involucran funciones trigonométricas inversas pueden aparecer de muy diversas formas.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Integrales como la del ejemplo 2 son fáciles con ayuda de programas de integración simbólica en computadora. No obstante, al usarlos hay que recordar que pueden no ser capaces de encontrar una primitiva debido a dos razones. En primer lugar, algunas funciones elementales tienen primitivas no elementales. En segundo lugar, todos esos programas tienen limitaciones, así que puede darse una función para cuya integración no está preparado el programa. Recordar, asimismo, que las primitivas o antiderivadas que involucran funciones trigonométricas o logarítmicas se pueden expresar de maneras muy diversas. Por ejemplo, al utilizar uno de esos programas para la integral del ejemplo 2 se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \arctan\sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Demostrar que esta antiderivada es equivalente a la obtenida en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Integración por sustitución

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución Tal como está, la integral no se ajusta a ninguna de las tres fórmulas para las funciones trigonométricas inversas. Pero haciendo la sustitución de $u = e^x$, se obtiene

$$u = e^x \implies du = e^x\,dx \implies dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}.$$

Con esta sustitución, ya se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2-1}} && \text{Escribir } e^{2x} \text{ como } (e^x)^2.\\
&= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-1}} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} && \text{Reescribir para que se ajuste a la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec}\frac{|u|}{1} + C && \text{Aplicar la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec} e^x + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Reescribir como suma de dos cocientes

Hallar $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Solución Tampoco esta integral parece ajustarse a las fórmulas. Sin embargo, desdoblando el integrando en dos partes, la primera es integrable por las reglas de las potencias y la segunda da una función seno inversa.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\int (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2}\right] + 2\arcsen\frac{x}{2} + C\\
&= -\sqrt{4-x^2} + 2\arcsen\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

Completar el cuadrado

Cuando hay funciones cuadráticas en el integrando, completar el cuadrado ayuda a resolver la integral. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 + bx + c$ puede escribirse como diferencia de dos cuadrados sumando y restando $(b/2)^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\\
&= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Encontrar $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$.

Solución Se puede escribir el denominador como la suma de dos cuadrados como se muestra.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 7 &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 \\ &= (x - 2)^2 + 3 = u^2 + a^2 \end{aligned}$$

En esta forma de cuadrados completados, tomamos $u = x - 2$ y $a = \sqrt{3}$.

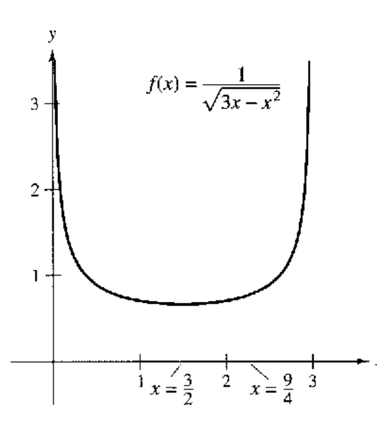
$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

Si el coeficiente dominante no es 1, conviene sacarlo como factor común del cuadrado. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $2x^2 - 8x + 10$ factorizando primero.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= 2[(x-2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es negativo, el mismo proceso de factorización sirve. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $3x - x^2$ como se muestra.

$$\begin{aligned} 3x - x^2 &= -(x^2 - 3x) \\ &= -\left[x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$



El área de la gráfica en la región delimitada por la gráfica de f, el eje x, $x = \frac{3}{2}$, y $x = \frac{9}{4}$ es $\pi/6$

Figura 5.34

EJEMPLO 5 Completar el cuadrado (coeficiente dominante negativo)

Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$$

el eje x, y las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$.

Solución En la figura 5.34 se ve que el área está dada por

$$\text{Área} = \int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx.$$

Usando la expresión con el cuadrado completo antes obtenido se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}} &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - [x - (3/2)]^2}} \\ &= \arcsen \frac{x - (3/2)}{3/2} \Bigg]_{3/2}^{9/4} \\ &= \arcsen \frac{1}{2} - \arcsen 0 \\ &= \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0.524 \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Ante integrales como la del ejemplo 5 siempre queda el recurso de una solución numérica. Así, aplicando la regla de Simpson (con $n = 12$) en este caso, se obtiene

$$\int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx \approx 0.523599.$$

Este valor difiere del valor exacto de la integral ($\pi/6 \approx 0.5235988$) en menos de una millonésima.

Repaso a las reglas básicas de integración

Ya se ha terminado la introducción de **reglas básicas de integración**. Si se quiere llegar a un uso eficaz de tales fórmulas, es conveniente practicar tanto con ellas hasta que se consiga aprenderlas de memoria.

Reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
13. $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \dfrac{u}{a} + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\arctan \dfrac{u}{a} + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arcsec} \dfrac{|u|}{a} + C$

Se aprende mucho acerca de la naturaleza de la integración comparando esta lista con la de las reglas de derivación de la sección anterior. Mientras se dispone ya de suficientes reglas de derivación para derivar cualquier función elemental, la situación en la integración no es la misma.

Las reglas recogidas en la lista de arriba son esencialmente las que se han podido deducir de las reglas de derivación. No se han desarrollado reglas para integrar un producto o un cociente general, o la función logaritmo natural o las funciones trigonométricas inversas. Lo que es más importante, ninguna de las reglas de la lista es aplicable si no se logra dar el du apropiado correspondiente a la u de la fórmula. La cuestión es que se necesita trabajar más sobre técnicas de integración, cosa que se hará en el capítulo 8. Los dos ejemplos siguientes dan una idea más clara de lo que *se puede* y de lo que *no se puede* hacer con las técnicas disponibles hasta este momento.

EJEMPLO 6 Comparación de problemas de integración

Encontrar cuantas integrales de las que siguen sea posible, usando las fórmulas y técnicas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ *c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

a) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla del arco secante).

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

b) *Se puede* integrar también (se emplea la regla de las potencias).

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1/2}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^{1/2}}{1/2}\right] + C\\ &= \sqrt{x^2-1} + C\end{aligned}$$

c) *No se pueden* integrar con las técnicas de las que se dispone. (Verificar esta conclusión pasando revista a las fórmulas de la lista.)

EJEMPLO 7 Comparación de problemas de integración

Hallar tantas de las integrales siguientes como sea posible mediante las técnicas y fórmulas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x}$ *c)* $\displaystyle\int \ln x\,dx$

Solución

a) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla para el logaritmo).

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln x} &= \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx\\ &= \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

b) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla de las potencias).

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x\,dx}{x} &= \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1\,dx\\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C\end{aligned}$$

c) *No se puede* integrar con las técnicas de que se dispone.

NOTA Observar que en los ejemplos 6 y 7 son precisamente las funciones *más simples* las que no se pueden integrar todavía.

Ejercicios de la sección 5.7

En los ejercicios 1 a 20, hallar la integral.

1. $\int \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
2. $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$
3. $\int \frac{7}{16+x^2}\,dx$
4. $\int \frac{4}{1+9x^2}\,dx$
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx$
6. $\int \frac{1}{4+(x-1)^2}\,dx$
7. $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$
8. $\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$
10. $\int \frac{t}{t^4+16}\,dt$
11. $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$
12. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx$
13. $\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx$
14. $\int \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$
16. $\int \frac{3}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx$
17. $\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$
18. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
19. $\int \frac{x+5}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$
20. $\int \frac{x-2}{(x+1)^2+4}\,dx$

En los ejercicios 21 a 30, evaluar la integral.

21. $\int_0^{1/6} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$
22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
23. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
24. $\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{9+x^2}\,dx$
25. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
26. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
27. $\int_{-1/2}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
28. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$
29. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

En los ejercicios 31 a 42, calcular o evaluar la integral (completando el cuadrado cuando sea necesario).

31. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$
32. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4x+13}$
33. $\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx$
34. $\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx$
35. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$
36. $\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$
37. $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$
38. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$
39. $\int_2^3 \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
40. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$
41. $\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx$
42. $\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx$

En los ejercicios 43 a 46, hallar o evaluar la integral mediante sustitución especificada.

43. $\int \sqrt{e^t-3}\,dt$
$u = \sqrt{e^t-3}$
44. $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx$
$u = \sqrt{x-2}$
45. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$
$u = \sqrt{x}$
46. $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$
$u = \sqrt{x+1}$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 47 a 50, determinar cuáles de las integrales pueden hallarse usando las reglas básicas estudiadas hasta ahora en el texto.

47. *a)* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *b)* $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *c)* $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$
48. *a)* $\int e^{x^2}\,dx$ *b)* $\int xe^{x^2}\,dx$ *c)* $\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$
49. *a)* $\int \sqrt{x-1}\,dx$ *b)* $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ *c)* $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$
50. *a)* $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$ *b)* $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *c)* $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

51. Determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

en el intervalo $[-0.5, 0.5]$. (Basar la elección en un dibujo de la región, *no* en cálculos.)

a) 4 *b)* -3 *c)* 1 *d)* 2 *e)* 3

52. Decidir si se puede calcular la integral

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

usando las fórmulas y técnicas estudiadas. Explicar el razonamiento.

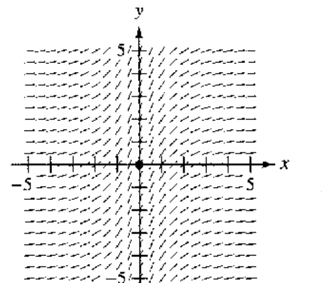
Ecuación diferencial **En los ejercicios 53 y 54, usar la ecuación diferencial y las condiciones especificadas para encontrar y.**

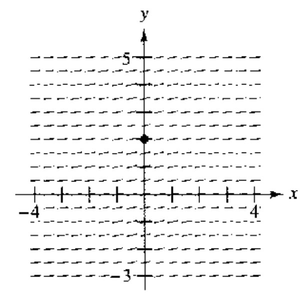
53. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
$y(0) = \pi$
54. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4+x^2}$
$y(2) = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 55 y 58 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Usar integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una computadora para representar la solución. Comparar los resultados con los dibujos del apartado *a*).**

55. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1 + x^2}, \quad (0, 0)$

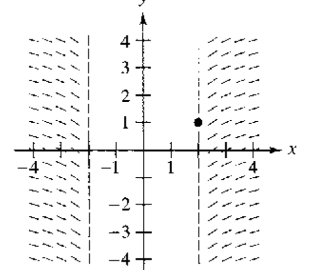
56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{9 + x^2}, \quad (0, 2)$

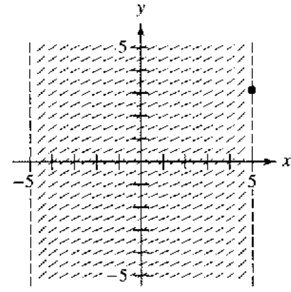




57. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}, \quad (2, 1)$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad (5, \pi)$





Campo de pendientes **En los ejercicios 59 a 62, usar un sistema algebraico por computadora para mostrar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y representar la solución que satisface la condición inicial.**

59. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

$y(3) = 0$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{12 + x^2}$

$y(4) = 2$

61. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{\sqrt{16 - x^2}}$

$y(0) = 2$

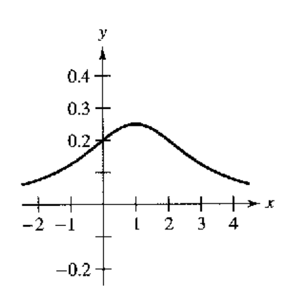
62. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{1 + x^2}$

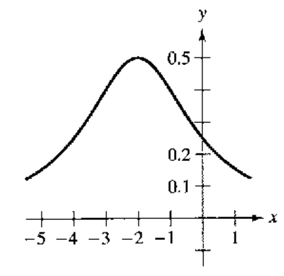
$y(0) = 4$

Área **En los ejercicios 63 a 68, encontrar el área de la región.**

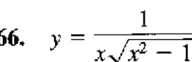
63. $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 5}$

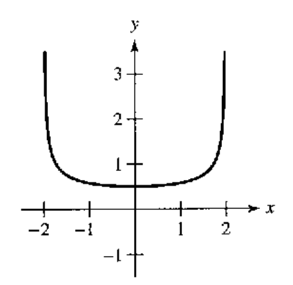
64. $y = \dfrac{2}{x^2 + 4x + 8}$

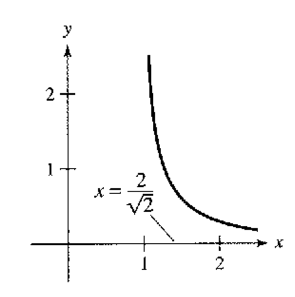




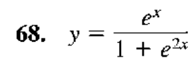
65. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

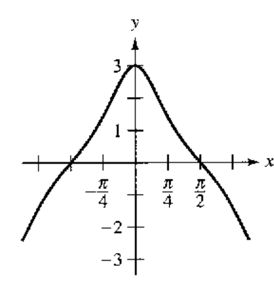
66.  $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

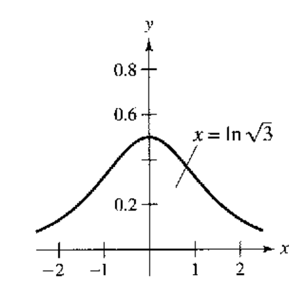




67. $y = \dfrac{3\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

68.  $y = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$





En los ejercicios 69 y 70, *a*) verificar la fórmula de integración, después *b*) usar ésta para encontrar el área de la región.

69. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{\arctan x}{x} + C$

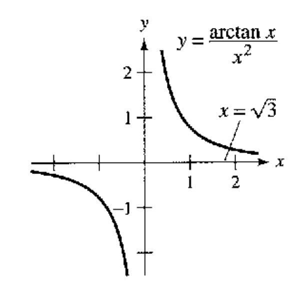


Figura para 69

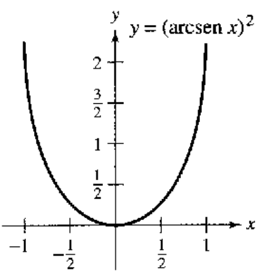


Figura para 70

70. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx$

$= x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\operatorname{arcsen} x + C$

71. *a)* Dibujar la región representada por

$$\int_0^1 \arcsen x\, dx.$$

b) Usar la función de integración de una computadora para aproximar el área.

c) Encontrar analíticamente el área exacta.

72. *a)* Mostrar que $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx = \pi$.

b) Estimar el número π usando la regla de Simpson (con $n = 6$) y la integral en el apartado *a*).

c) Estimar el número π usando la capacidad de integración de una computadora.

73. ***Investigación*** Considerar la función $F(x) = \frac{1}{2}\int_x^{x+2} \frac{2}{t^2+1}\, dt$.

a) Escribir una breve interpretación geométrica de $F(x)$ con relación a la función $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$. Empleando la explicación, estimar el valor de x donde F es máxima.

b) Efectuar la integración para hallar una forma alternativa de $F(x)$. Usar el cálculo para localizar el valor de x que hace a F máxima y comparar los resultados con lo estimado en el apartado *a*).

74. Considerar la integral $\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}\, dx$.

a) Hallar la integral completando el cuadrado en el radical.

b) Hallarla ahora haciendo la sustitución $u = \sqrt{x}$.

c) Las primitivas o antiderivadas obtenidas en *a*) y *b*) parecen muy diferentes. Usar una computadora para representar cada primitiva en la misma pantalla y determinar la relación entre ellas. Determinar sus dominios.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 a 78, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

75. $\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2-16}} = \frac{1}{4}\operatorname{arcsec}\frac{3x}{4} + C$

76. $\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25}\arctan\frac{x}{25} + C$

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\arccos\frac{x}{2} + C$

78. Una forma de hallar $\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{9-e^{2x}}}\, dx$ es mediante la regla del arcoseno.

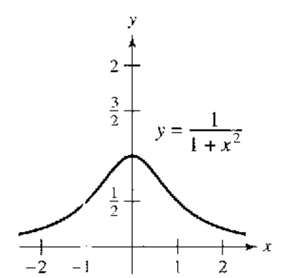
Verificación de las reglas de integración **En los ejercicios 79 a 81, verificar cada regla por diferenciación. Sea $a > 0$.**

79. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsen\frac{u}{a} + C$

80. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

81. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

82. ***Integración numérica*** *a)* Escribir una integral que represente el área de la región. *b)* Después usar la regla de los trapecios con $n = 8$ para estimar el área de la región. *c)* Explicar cómo se pueden usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para estimar π.



83. ***Movimiento vertical*** Un objeto es lanzado desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de 500 pies por segundo. En este ejercicio, el objetivo es analizar el movimiento mientras asciende.

a) Despreciando la resistencia al aire, expresar la velocidad en función del tiempo. Representar esta función en la computadora.

b) Usando los resultados del apartado *a*) encontrar la función posición y determinar la altura máxima alcanzada por el objeto.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación obtenida es

$$\frac{dv}{dt} = -(32 + kv^2)$$

donde -32 pies /s^2 en la aceleración de la gravedad y k una constante. Hallar la velocidad en función del tiempo resolviendo la ecuación.

$$\int \frac{dv}{32 + kv^2} = -\int dt.$$

d) Usar una computadora para representar la función velocidad $v(t)$ del apartado *c*) si $k = 0.001$. Usar la gráfica para estimar el instante t_0 en el que se alcanza la máxima altura.

e) Usar la función integración de la computadora para aproximar el valor de

$$\int_0^{t_0} v(t)\, dt$$

donde $v(t)$ y t_0 son los obtenidos en el apartado *d*). Ésta es la aproximación de la máxima altura del objeto.

f) Explicar la diferencia entre los resultados de los apartados *b*) y *e*).

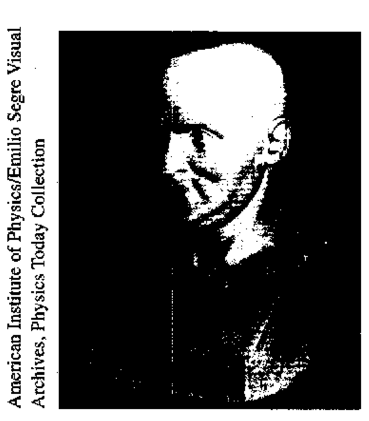
PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este tópico, ver el artículo "What Goes Up Must Come Down: Will Air Resistance Make It Return Sooner, or Later?", de John Lekner, en *Mathematics Magazine*.

84. Representar $y_1 = \frac{x}{1+x^2}$, $y_2 = \arctan x$, y $y_3 = x$ sobre $[0, 10]$

Demostrar que $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ para $x > 0$.

Sección 5.8 Funciones hiperbólicas

- **Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas.**
- **Derivar e integrar funciones hiperbólicas.**
- **Analizar las propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.**
- **Derivar e integrar funciones que contienen funciones hiperbólicas inversas.**



JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

La primera persona que publicó un estudio acerca de las funciones hiperbólicas fue Johann Heinrich Lambert, un matemático germano-suizo y colega de Euler.

Funciones hiperbólicas

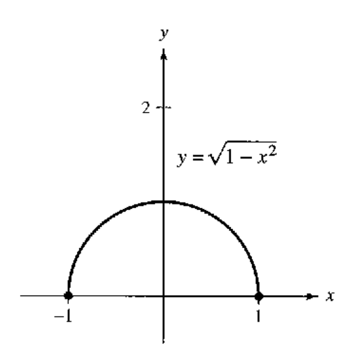
En esta sección se verá brevemente una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**. El nombre de *funciones hiperbólicas* proviene de la comparación entre el área de una región semicircular, como se muestra en la figura 5.35, con el área de una región bajo una hipérbola, como se muestra en la figura 5.36. La integral que da el área del semicírculo emplea una función trigonométrica (circular) inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}\,x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

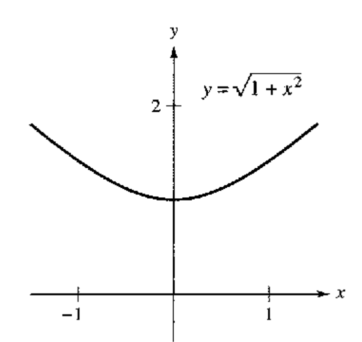
La integral que da el área de la región hiperbólica emplea una función hiperbólica inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \text{senh}^{-1}x\right]_{-1}^{1} \approx 2.296.$$

Ésta es sólo una de las muchas analogías existentes entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas.



Círculo: $x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.35



Hipérbola: $-x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.36

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el desarrollo de funciones hiperbólicas, ver el artículo "An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus", de Jerome Rosenthal en *Mathematics Teacher*.

Definición de las funciones hiperbólicas

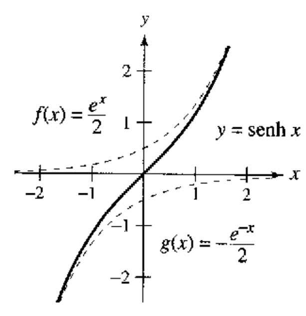
$$\text{senh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{csch}\,x = \frac{1}{\text{senh}\,x}, \quad x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sech}\,x = \frac{1}{\cosh x}$$

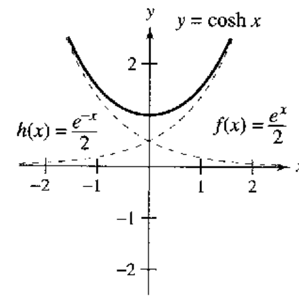
$$\tanh x = \frac{\text{senh}\,x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0$$

NOTA senh x se lee "seno hiperbólico de x", cosh x se lee "coseno hiperbólico de x", etcétera.

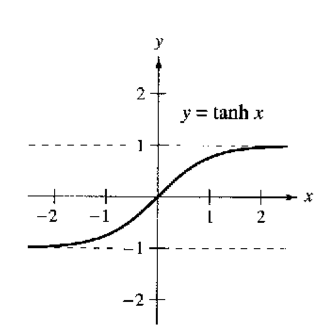
La figura 5.37 muestra las gráficas de las seis funciones hiperbólicas, así como sus dominios y recorridos o rangos. Nótese que la gráfica de senh x se pueden obtener *mediante la adición de ordenadas* usando las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. De manera semejante, la gráfica de cosh x puede ser obtenida *mediante la adición de ordenadas* usando las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.



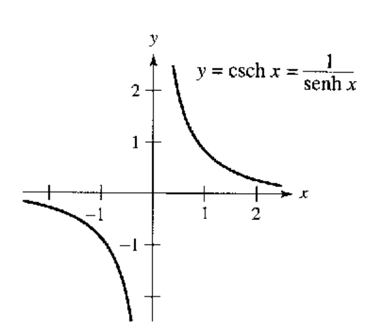
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



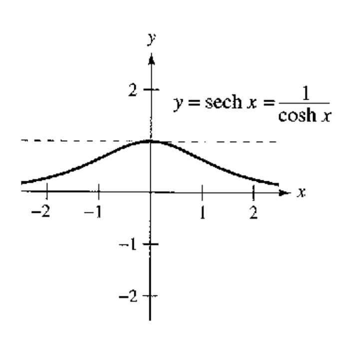
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $[1, \infty)$



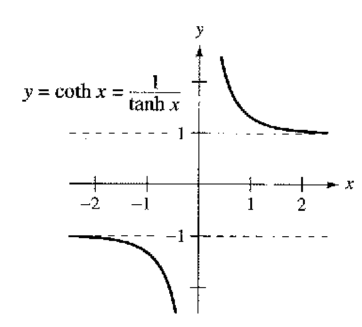
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 5.37

Muchas identidades trigonométricas tienen sus correspondientes *identidades hiperbólicas*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}2\,\text{senh}x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \text{senh}\,2x.\end{aligned}$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para entender geométricamente la relación entre las funciones hiperbólicas y exponencial, ver el artículo "A Short Proof. Linking the Hyperbolic and Exponential Functions", de Michael J. Serry en *The AMATYC Review*.

Identidades hiperbólicas

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$

$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas

Debido a que las funciones hiperbólicas se expresan en términos de e^x y e^{-x}, es fácil obtener reglas de derivación para sus derivadas. El siguiente teorema presenta estas derivadas con las correspondientes reglas de integración.

TEOREMA 5.18 Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} u] = (\cosh u)u' \qquad \int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\operatorname{senh} u)u' \qquad \int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u' \qquad \int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u' \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right] = \frac{\cosh x(\cosh x) - \operatorname{senh} x(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

En los ejercicios 98 y 102, se pide la demostración de algunas de las reglas de derivación.

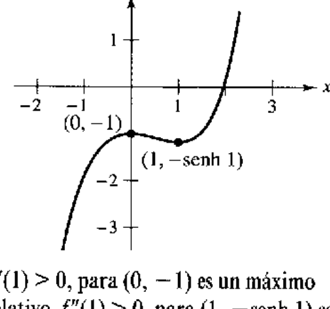
EJEMPLO 1 Derivación de funciones hiperbólicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\text{senh}(x^2-3)] = 2x\cosh(x^2-3)$ *b)* $\dfrac{d}{dx}[\ln(\cosh x)] = \dfrac{\text{senh}x}{\cosh x} = \tanh x$

c) $\dfrac{d}{dx}[x\,\text{senh}x - \cosh x] = x\cosh x + \text{senh}x - \text{senh}x = x\cosh x$

EJEMPLO 2 Localización de los extremos relativos

$f(x) = (x-1)\cosh x - \text{senh}\,x$



$f''(1) > 0$, para $(0, -1)$ es un máximo relativo. $f''(1) > 0$, para $(1, -\text{senh}\,1)$ es un mínimo relativo
Figura 5.38

Localizar los extremos relativos de $f(x) = (x-1)\cosh x - \text{senh}\,x$.

Solución Se comienza por igualar a cero la derivada de f.

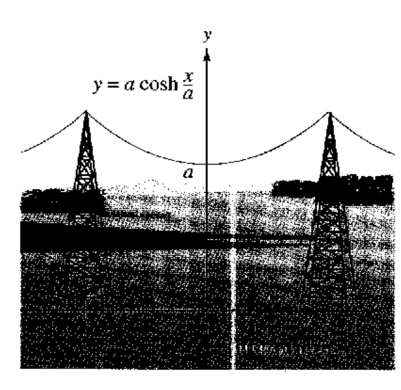
$$f'(x) = (x-1)\,\text{senh}x + \cosh x - \cosh x = 0$$
$$(x-1)\,\text{senh}x = 0$$

Así pues, los números o puntos críticos son $x = 1$ y $x = 0$. Con el criterio de la segunda derivada es fácil comprobar que el punto $(0, -1)$ da un máximo relativo y el punto $(1, -\text{senh}\,1)$ un mínimo relativo, como muestra la figura 5.38. Confirmar este resultado gráficamente usando una computadora. Si no se dispone de las funciones hiperbólicas en computadora, se pueden utilizar las siguientes funciones exponenciales.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x}) - \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - e^x - e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - 2e^x) \end{aligned}$$

Cuando un cable flexible uniforme, como un cable telefónico, está suspendido entre dos puntos, adopta la forma de una *catenaria*, que se estudia en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Cables colgantes



Catenaria
Figura 5.39

Los cables de un tendido eléctrico están suspendidos entre dos torres, formando la catenaria que se muestra en la figura 5.39. La ecuación de la catenaria es

$$y = a\cosh\frac{x}{a}.$$

La distancia entre las dos torres es $2b$. Calcular la pendiente de la catenaria en el punto de sujeción del cable en la torre de la derecha.

Solución Derivando se obtiene

$$y' = a\left(\frac{1}{a}\right)\text{senh}\frac{x}{a} = \text{senh}\,\frac{x}{a}.$$

En el punto $(b, a\cosh(b/a))$, la pendiente (desde la izquierda) viene dada por $m = \text{senh}\,\dfrac{b}{a}$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el ejemplo 3, el cable es una curva catenaria entre dos soportes de la misma altura. Para aprender acerca de la forma del cable sostenido entre dos soportes de diferente altura, ver el artículo "Reexamining the Catenary", de Paul Cella en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 4 Integración de una función hiperbólica

Calcular $\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx$.

Solución

$$\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{senh} 2x)^2(2\cosh 2x)\, dx \qquad u = \operatorname{senh} 2x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\operatorname{senh} 2x)^3}{3}\right] + C$$

$$= \frac{\operatorname{senh}^3 2x}{6} + C$$

Funciones hiperbólicas inversas

A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, volviendo a la figura 5.37 se ve que cuatro de las seis funciones hiperbólicas son inyectivas (el seno, la tangente, la cosecante y la cotangente hiperbólica). Así, se puede aplicar el teorema 5.7, el cual afirma que esas cuatro funciones tienen funciones inversas. Las otras dos (las funciones coseno y secante hiperbólicas) son inyectivas si se restringe su dominio a los números reales positivos, y es en este dominio restringido donde tienen función inversa. Debido a que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no es de extrañar que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de funciones logarítmicas, como se muestra en el teorema 5.19.

TEOREMA 5.19 Funciones hiperbólicas inversas

Función	*Dominio*
$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

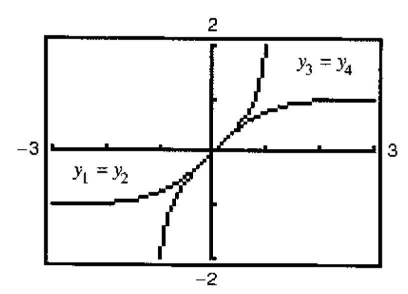
Demostración La demostración de este teorema es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica. Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

se puede ver que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, lo cual implica que g es la función inversa de f.



Gráfica de la función tangente hiperbólica y la función tangente hiperbólica inversa
Figura 5.40

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una computadora para verificar gráficamente los resultados del teorema 5.19. Por ejemplo, dibujando las gráficas de las funciones siguientes.

$y_1 = \tanh x$ Tangente hiperbólica.

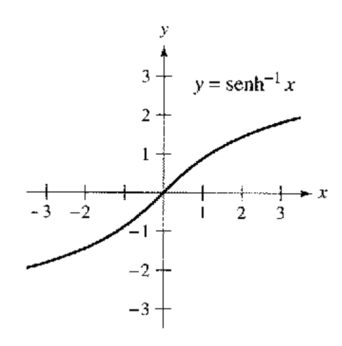
$y_2 = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ Definición de la tangente hiperbólica.

$y_3 = \tanh^{-1} x$ Tangente hiperbólica inversa.

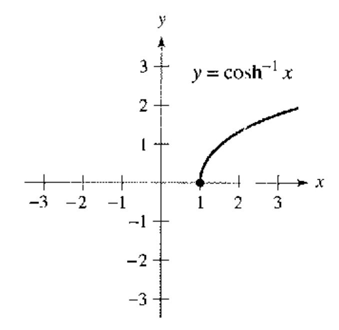
$y_4 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ Definición de la tangente hiperbólica inversa.

Los resultados se muestran en la figura 5.40. En ella se aprecia que $y_1 = y_2$ y $y_3 = y_4$. También ver que la gráfica de y_1 es el reflejo de la de y_3 en la recta $y = x$.

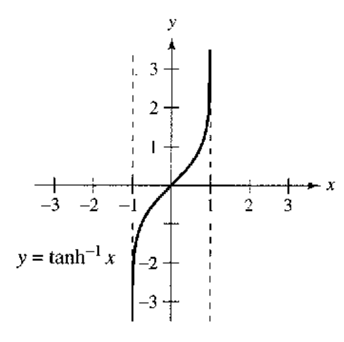
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 5.41.



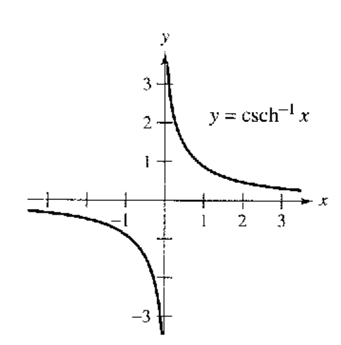
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



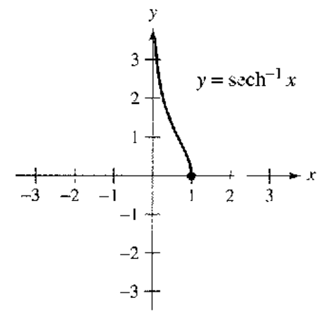
Dominio: $[1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$



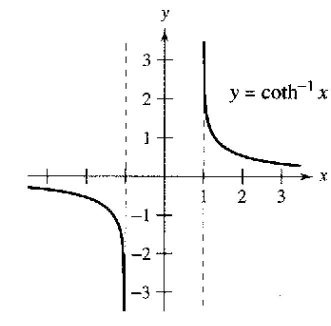
Dominio: $(-1, 1)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Figura 5.41

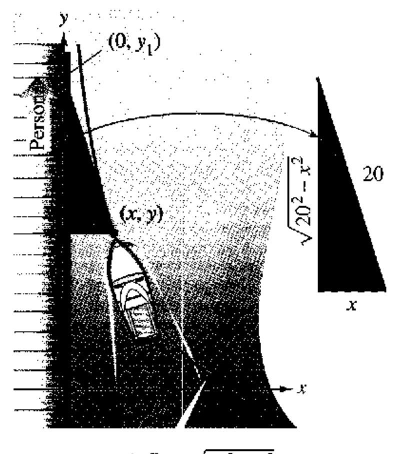


Dominio: $(0, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

La secante hiperbólica inversa se puede utilizar para definir la curva llamada *tractriz* o *curva de persecución*, que se discute en el ejemplo 5.



$y = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}$

Una persona tiene que caminar 41.27 pies para acercar el bote a 5 pies del muelle
Figura 5.42

EJEMPLO 5 Tractriz

Una persona arrastra un bote tirando de él con una cuerda, como se muestra en la figura 5.42. Mientras camina por el muelle, el bote recorre una **tractriz**, dada por la ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde a es la longitud de la cuerda. Si $a = 20$ pies, calcular la distancia que la persona debe caminar para llevar el bote a 5 pies del muelle.

Solución En la figura 5.42, notar que la distancia recorrida por la persona es

$$\begin{aligned} y_1 = y + \sqrt{20^2 - x^2} &= \left(20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20}. \end{aligned}$$

Cuando $x = 5$, esta distancia es

$$\begin{aligned} y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{5}{20} &= 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} \\ &= 20 \ln\left(4 + \sqrt{15}\right) \\ &\approx 41.27 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas inversas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que recuerdan las de las funciones trigonométricas inversas, se enumeran en el teorema 5.20, junto con las correspondientes fórmulas de integración (en forma logarítmica). Se puede comprobar cada una de ellas aplicando las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas. (Ver ejercicios 99-101.)

TEOREMA 5.20 Derivación e integración de funciones hiperbólicas inversas

Sea u es una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \qquad \frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

EJEMPLO 6 Más sobre la tractriz

Para la tractriz del ejemplo 5, mostrar que el bote apunta siempre hacia la persona que tira de él.

Solución En un punto (x, y) de la tractriz la pendiente de la gráfica da la dirección del bote, como se muestra en la figura 5.42.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left[20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right] \\
&= -20\left(\frac{1}{20}\right)\left[\frac{1}{(x/20)\sqrt{1-(x/20)^2}}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2x}{\sqrt{20^2 - x^2}}\right) \\
&= \frac{-20^2}{x\sqrt{20^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{20^2 - x^2}} \\
&= -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x}
\end{aligned}$$

Sin embargo, en la figura 5.42 se puede ver que la pendiente del segmento de recta que une el punto $(0, y_1)$ con el punto (x, y) es también

$$m = -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x}.$$

Así pues, el bote apunta hacia la persona en todo momento. (Por esta razón se llama *curva de persecución.*)

EJEMPLO 7 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Solución Sea $a = 2$ y $u = 3x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}} &= \int \frac{3\,dx}{(3x)\sqrt{4 - 9x^2}} & \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\frac{2 + \sqrt{4 - 9x^2}}{|3x|} + C & -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{|u|} + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4x^2}$.

Solución Sea $a = \sqrt{5}$ y $u = 2x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{5 - 4x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2} & \int \frac{du}{a^2 - u^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x}\right|\right) + C & \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C \\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x}\right| + C
\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 5.8

En los ejercicios 1 a 6, calcular la función. Si el valor no es un número racional, dar la respuesta con tres decimales.

1. *a)* senh 3 *b)* tanh(−2)
2. *a)* cosh 0 *b)* sech 1
3. *a)* csch(ln 2) *b)* coth(ln 5)
4. *a)* $\text{senh}^{-1} 0$ *b)* $\tanh^{-1} 0$
5. *a)* $\cosh^{-1} 2$ *b)* $\text{sech}^{-1} \frac{2}{3}$
6. *a)* $\text{csch}^{-1} 2$ *b)* $\coth^{-1} 3$

En los ejercicios 7 a 12, verificar la identidad.

7. $\tanh^2 x + \text{sech}^2 x = 1$
8. $\cosh^2 x = \dfrac{1 + \cosh 2x}{2}$
9. $\text{senh}(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$
10. $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$
11. $\text{senh}\, 3x = 3\, \text{senh}\, x + 4\, \text{senh}^3 x$
12. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x + y}{2} \cosh \dfrac{x - y}{2}$

En los ejercicios 13 y 14, usar el valor de la función hiperbólica dada para hallar los valores de las otras funciones hiperbólicas en *x*.

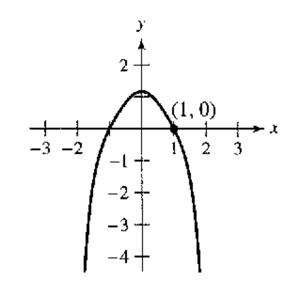
13. $\text{senh}\, x = \dfrac{3}{2}$
14. $\tanh x = \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 15 a 24, calcular la derivada de la función.

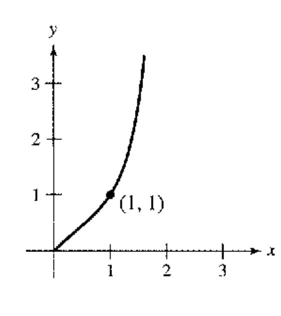
15. $y = \text{sech}(x + 1)$
16. $y = \coth 3x$
17. $f(x) = \ln(\text{senh}\, x)$
18. $g(x) = \ln(\cosh x)$
19. $y = \ln\left(\tanh \dfrac{x}{2}\right)$
20. $y = x \cosh x - \text{senh}\, x$
21. $h(x) = \dfrac{1}{4}\text{senh}\, 2x - \dfrac{x}{2}$
22. $h(t) = t - \coth t$
23. $f(t) = \arctan(\text{senh}\, t)$
24. $g(x) = \text{sech}^2 3x$

En los ejercicios 25 a 28, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

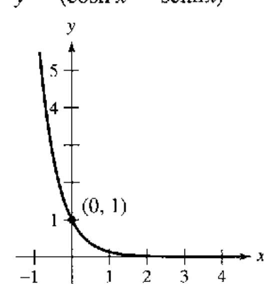
25. $y = \text{senh}(1 - x^2)$



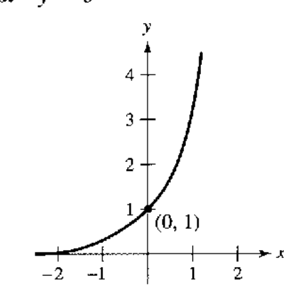
26. $y = x^{\cosh x}$



27. $y = (\cosh x - \text{senh}\, x)^2$



28. $y = e^{\text{senh}\, x}$



En los ejercicios 29 y 32, hallar los extremos relativos de la función. Usar una computadora para confirmar gráficamente los resultados.

29. $f(x) = \text{sen}\, x\, \text{senh}\, x - \cos x \cosh x, \quad -4 \le x \le 4$
30. $f(x) = x\, \text{senh}(x - 1) - \cosh(x - 1)$
31. $g(x) = x\, \text{sech}\, x$
32. $h(x) = 2 \tanh x - x$

En los ejercicios 33 y 34, demostrar que la función satisface la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
33.	$y = a\, \text{senh}\, x$	$y''' - y' = 0$
34.	$y = a \cosh x$	$y'' - y = 0$

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 35 y 36, usar un sistema algebraico de computadora para encontrar la aproximación lineal**

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación cuadrática

$$P_2(x) = f(a) = f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

de la función *f* en $x = a$. Usar una computadora para representar gráficamente la función y las aproximaciones lineal y cuadrática.

35. $f(x) = \tanh x, \quad a = 0$
36. $f(x) = \cosh x, \quad a = 0$

Catenarias **En los ejercicios 37 y 38, se proporciona un modelo de cables de alta tensión suspendidos entre dos torres. *a)* Representar gráficamente el modelo, *b)* calcular la altura del cable en los puntos de sujeción y en el punto medio entre las torres, y *c)* encontrar la pendiente del modelo en el punto donde el cable está sujeto a la torre de la derecha.**

37. $y = 10 + 15 \cosh \dfrac{x}{15}, \quad -15 \le x \le 15$
38. $y = 18 + 25 \cosh \dfrac{x}{25}, \quad -25 \le x \le 25$

En los ejercicios 39 a 50, hallar la integral.

39. $\displaystyle\int \text{senh}(1 - 2x)\, dx$
40. $\displaystyle\int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
41. $\displaystyle\int \cosh^2(x - 1)\text{senh}(x - 1)\, dx$
42. $\displaystyle\int \frac{\text{senh}\, x}{1 + \text{senh}^2 x}\, dx$

43. $\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\,dx$ 44. $\int \operatorname{sech}^2(2x-1)\,dx$

45. $\int x\operatorname{csch}^2\frac{x^2}{2}\,dx$ 46. $\int \operatorname{sech}^3 x\tanh x\,dx$

47. $\int \frac{\operatorname{csch}(1/x)\coth(1/x)}{x^2}\,dx$ 48. $\int \frac{\cosh x}{\sqrt{9-\operatorname{senh}^2 x}}\,dx$

49. $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$ 50. $\int \frac{2}{x\sqrt{1+4x^2}}\,dx$

En los ejercicios 51 a 56, evaluar la integral.

51. $\int_0^{\ln 2}\tanh x\,dx$ 52. $\int_0^1 \cosh^2 x\,dx$

53. $\int_0^4 \frac{1}{25-x^2}\,dx$ 54. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

55. $\int_0^{\sqrt{2}/4}\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ 56. $\int_0^{\ln 2} 2e^{-x}\cosh x\,dx$

En los ejercicios 57 a 64, calcular la derivada de la función.

57. $y=\cosh^{-1}(3x)$ 58. $y=\tanh^{-1}\frac{x}{2}$

59. $y=\operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

60. $y=\operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x),\quad 0<x<\pi/4$

61. $y=\tanh^{-1}(\operatorname{sen} 2x)$

62. $y=(\operatorname{csch}^{-1}x)^2$

63. $y=2x\operatorname{senh}^{-1}(2x)-\sqrt{1+4x^2}$

64. $y=x\tanh^{-1}x+\ln\sqrt{1-x^2}$

Desarrollo de conceptos

65. Discutir en qué son similares las funciones hiperbólicas y las funciones trigonométricas.

66. Dibujar la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas. Después identificar el dominio y el recorrido o rango de cada función.

Límites **En los ejercicios 67 a 72, encontrar los límites.**

67. $\lim_{x\to\infty}\operatorname{senh} x$ 68. $\lim_{x\to\infty}\tanh x$

69. $\lim_{x\to\infty}\operatorname{sech} x$ 70. $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{csch} x$

71. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x}{x}$ 72. $\lim_{x\to 0^-}\coth x$

En los ejercicios 73 a 80, calcular la integral indefinida usando las fórmulas del teorema 5.20.

73. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$ 74. $\int \frac{x}{9-x^4}\,dx$

75. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}\,dx$ 76. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

77. $\int \frac{-1}{4x-x^2}\,dx$ 78. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}$

79. $\int \frac{1}{1-4x-2x^2}\,dx$ 80. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x^2+4x+8}}$

En los ejercicios 81 a 84, resolver la ecuación diferencial.

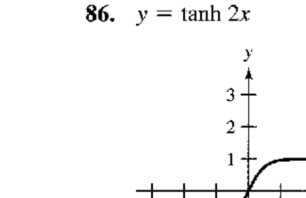
81. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{80+8x-16x^2}}$

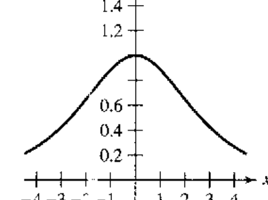
82. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x-1)\sqrt{-4x^2+8x-1}}$

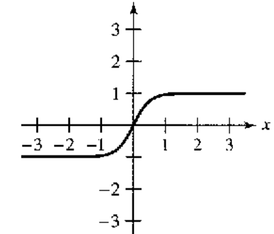
83. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-21x}{5+4x-x^2}$ 84. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x}{4x-x^2}$

Área **En los ejercicios 85 a 88, encontrar el área de la región.**

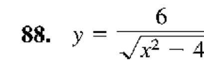
85. $y=\operatorname{sech}\frac{x}{2}$ 86. $y=\tanh 2x$

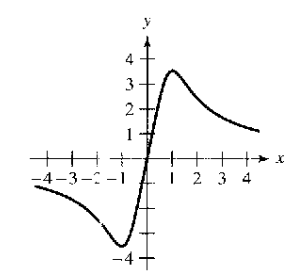


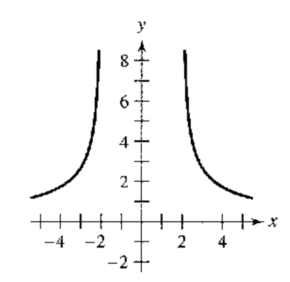




87. $y=\frac{5x}{\sqrt{x^4+1}}$ 88. $y=\frac{6}{\sqrt{x^2-4}}$







En los ejercicios 89 y 90, evaluar la integral en términos de *a*) logaritmos naturales y *b*) funciones hiperbólicas inversas.

89. $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 90. $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{1-x^2}$

91. ***Reacciones químicas*** Las sustancias químicas A y B se combinan en razón de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida hasta el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la disolución. Así pues, si se mezclan 3 kilogramos de A con 2 kilogramos de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt}=k\left(3-\frac{3x}{4}\right)\left(2-\frac{x}{4}\right)=\frac{3k}{16}(x^2-12x+32).$$

Si en 10 minutos se ha formado 1 kilogramo del compuesto, calcular la cantidad formada en 20 minutos resolviendo la integral

$$\int \frac{3k}{16}\,dt=\int \frac{dx}{x^2-12x+32}.$$

92. ***Movimiento vertical*** Un objeto se deja caer desde una altura de 400 pies.

a) Expresar la velocidad del objeto en función del tiempo (despreciando la resistencia al aire sobre el objeto).

b) Utilizando el resultado del apartado *a)* encontrar la función posición.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces $dv/dt = -32 + kv^2$, donde -32 pies/s^2 es la aceleración de la gravedad y k es una constante. Mostrar que la velocidad v es función del tiempo.

$$v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\tanh\left(\sqrt{32k}\,t\right)$$

efectuando la siguiente integración y simplificando el resultado:

$$\int \frac{dv}{32 - kv^2} = -\int dt$$

d) Usando el resultado del apartado *c)* calcular $\lim_{t\to\infty} v(t)$ e interpretarlo.

e) Integrar la función velocidad del apartado *c)* y hallar la posición s del objeto en función de t. Usar una computadora para representar gráficamente la función posición $k = 0.01$ y la función posición del apartado *b)* en la misma pantalla. Estimar el tiempo adicional requerido para que el objeto alcance el suelo, cuando se tiene en cuenta la resistencia al aire.

f) Describir qué sucedería si se aumenta el valor de k. A continuación, comprobar la afirmación con un valor particular de k.

Tractriz **En los ejercicios 93 y 94, usar la ecuación de la tractriz** $y = a\,\text{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2},\quad a > 0.$

93. Encontrar dy/dx.

94. Sea L la recta tangente a la tractriz en el punto P. Si L corta al eje y en el punto Q, probar que la distancia entre P y Q es a.

95. Demostrar que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),\ -1 < x < 1.$

96. Demostrar que $\arctan(\text{senh}\,x) = \text{arcsen}(\tanh x)$.

97. Sean $x > 0$ y $b > 0$. Demostrar que $\displaystyle\int_{-b}^{b} e^{xt}\,dt = \frac{2\,\text{senh}\,bx}{x}$.

En los ejercicios 98 a 102, verificar la fórmula de derivación.

98. $\dfrac{d}{dx}[\cosh x] = \text{senh}\,x$

99. $\dfrac{d}{dx}[\text{sech}^{-1} x] = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

100. $\dfrac{d}{dx}[\cosh^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

101. $\dfrac{d}{dx}[\text{senh}^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

102. $\dfrac{d}{dx}[\text{sech}\,x] = -\text{sech}\,x\tanh x$

Preparación del examen Putnam

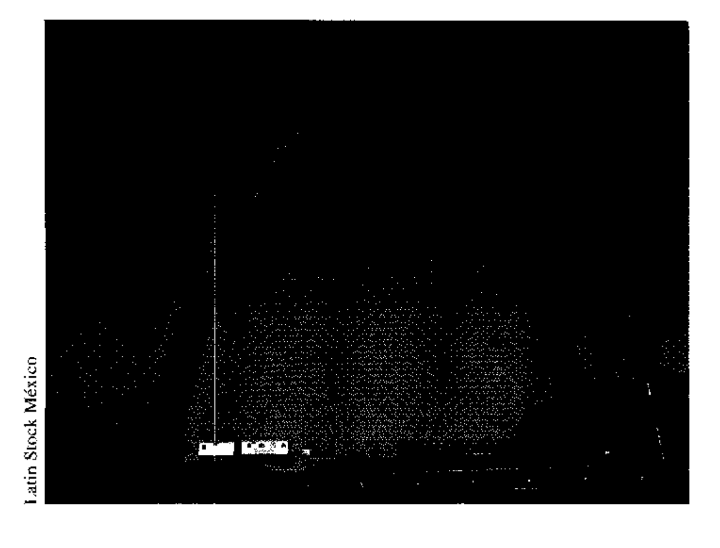
103. Desde el vértice $(0, c)$ de la catenaria $y = c\cosh(x/c)$, se dibuja una recta L perpendicular a la tangente de la catenaria en el punto P. Demostrar que la longitud de L intersecada por los ejes es igual a la ordenada y del punto P.

104. Aprobar o rechazar que existe al menos una recta normal a la gráfica de $y = \cosh x$ en un punto $(a, \cosh a)$ y también normal a la gráfica de $y = \text{senh}\,x$ en un punto $(c, \text{senh}\,c)$.

[En un punto de la gráfica, una recta normal es la perpendicular a la recta tangente al punto. También, $x = (e^x + e^{-x})/2$ y $\text{senh}\,x = (e^x - e^{-x})/2$.]

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition.

Proyecto de trabajo: Arco de San Luis



Latin Stock México

El arco de entrada a San Luis, Missouri, fue diseñada utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación para la construcción del arco es

$y = 693.8597 - 68.7672\cosh 0.0100333x,$

$-299.2239 \le x \le 299.2239$

donde x y y se miden en pies. Las secciones del arco son triángulos equiláteros, y (x, y) describe la trayectoria de los centros de masas de esos triángulos. Para cada valor de x, el área del triángulo de la sección transversal es $A = 125.1406\cosh 0.0100333x$
(*Fuente:* Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO, de William Thayer.)

a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (Al nivel del suelo es $y = 0$.)

b) ¿Cuál es la altura del arco? (*Sugerencia:* En un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)

c) ¿Qué anchura tiene el arco en su base?

Ejercicios de repaso del capítulo 5

En los ejercicios 1 y 2, esbozar la gráfica de la función e identificar sus asíntotas.

1. $f(x) = \ln x + 3$
2. $f(x) = \ln(x - 3)$

En los ejercicios 3 y 4, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar la función logarítmica.

3. $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$
4. $\ln[(x^2 + 1)(x - 1)]$

En los ejercicios 5 y 6, escribir la expresión como el logaritmo de una única cantidad.

5. $\ln 3 + \frac{1}{3}\ln(4 - x^2) - \ln x$
6. $3[\ln x - 2\ln(x^2 + 1)] + 2\ln 5$

En los ejercicios 7 y 8, despejar x.

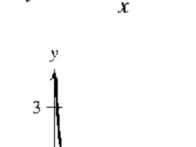
7. $\ln\sqrt{x + 1} = 2$
8. $\ln x + \ln(x - 3) = 0$

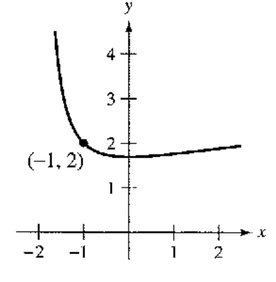
En los ejercicios 9 a 14, hallar la derivada de la función.

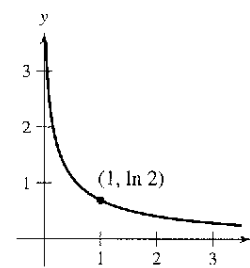
9. $g(x) = \ln\sqrt{x}$
10. $h(x) = \ln\dfrac{x(x - 1)}{x - 2}$
11. $f(x) = x\sqrt{\ln x}$
12. $f(x) = \ln[x(x^2 - 2)^{2/3}]$
13. $y = \dfrac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a + bx)]$
14. $y = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2}\ln\dfrac{a + bx}{x}$

En los ejercicios 15 y 16, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

15. $y = \ln(2 + x) + \dfrac{2}{2 + x}$
16. $y = \ln\dfrac{1 + x}{x}$







En los ejercicios 17 a 24, hallar o evaluar la integral.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{7x - 2}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$
21. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x + 1}{x}\,dx$
22. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$
23. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec\theta\,d\theta$
24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$

En los ejercicios 25 a 30, *a*) hallar la inversa de *f*, *b*) usar una computadora para representar gráficamente *f* y f^{-1} en una misma pantalla y *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.

25. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
26. $f(x) = 5x - 7$
27. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
28. $f(x) = x^3 + 2$
29. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
30. $f(x) = x^2 - 5,\quad x \geq 0$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar $(f^{-1})'(a)$ para la función *f* y el número real *a*.

31. $f(x) = x^3 + 2,\quad a = -1$
32. $f(x) = x\sqrt{x - 3},\quad a = 4$
33. $f(x) = \tan x,\quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4},\quad a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
34. $f(x) = \ln x,\quad a = 0$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) hallar la función inversa de *f*, *b*) usar una computadora para representar gráficamente *f* y f^{-1} en una misma pantalla y *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.

35. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
36. $f(x) = e^{1-x}$

En los ejercicios 37 y 38, dibujar sin ayuda de una computadora la gráfica de la función.

37. $y = e^{-x/2}$
38. $y = 4e^{-x^2}$

En los ejercicios 39 a 44, encontrar la derivada de la función.

39. $g(t) = t^2e^t$
40. $g(x) = \ln\dfrac{e^x}{1 + e^x}$
41. $y = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$
42. $h(z) = e^{-z^2/2}$
43. $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$
44. $y = 3e^{-3/t}$

En los ejercicios 45 y 46, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

45. $f(x) = \ln(e^{-x^2}),\quad (2, -4)$
46. $f(\theta) = \dfrac{1}{2}e^{\operatorname{sen} 2\theta},\quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 47 y 48, hallar *dy/dx* por derivación implícita.

47. $y\ln x + y^2 = 0$
48. $\cos x^2 = xe^y$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar o evaluar la integral.

49. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x^2}\,dx$
50. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
51. $\displaystyle\int \frac{e^{4x} - e^{2x} + 1}{e^x}\,dx$
52. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

53. $\int xe^{1-x^2}\,dx$

54. $\int x^2e^{x^3+1}\,dx$

55. $\int_1^3 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

56. $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

57. Demostrar que $y = e^x\,(a\cos 3x + b\,\text{sen}\,3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 10y = 0$.

58. ***Depreciación*** El valor V de un artículo después de t años es comparado por $V = 8\,000e^{-0.6t}$, $0 \le t \le 5$.

a) Usar una computadora para representar la función.

b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 4$.

c) Usar una computadora para representar gráficamente las líneas tangentes a la función cuando $t = 1$ y $t = 4$.

En los ejercicios 59 y 60, calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

59. $y = xe^{-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$

60. $y = 2e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$

En los ejercicios 61 a 64, dibujar a mano la gráfica de la función.

61. $y = 3^{x/2}$

62. $y = 6(2^{-x^2})$

63. $y = \log_2(x-1)$

64. $y = \log_4 x^2$

En los ejercicios 65 a 70, encontrar la derivada de la función.

65. $f(x) = 3^{x-1}$

66. $f(x) = (4e)^x$

67. $y = x^{2x+1}$

68. $y = x(4^{-x})$

69. $g(x) = \log_3 \sqrt{1-x}$

70. $h(x) = \log_5 \frac{x}{x-1}$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la integral indefinida.

71. $\int (x+1)5^{(x+1)^2}\,dx$

72. $\int \frac{2^{-1/t}}{t^2}\,dt$

73. ***Ritmo o velocidad de ascenso*** El tiempo t (en minutos) que tarda un avión pequeño en subir a una altitud de h pies es

$$t = 50\log_{10}\frac{18\,000}{18\,000 - h}$$

donde 18 000 pies es el tope de altitud alcanzable por el avión.

a) Determinar el dominio de la función apropiada al contexto del problema.

b) Usar una computadora para graficar la función tiempo e identificar las asíntotas.

c) Encontrar el instante en el que la altitud crece a mayor ritmo o velocidad.

74. ***Interés compuesto***

a) ¿Qué capital hay que invertir continuamente a 7% de interés compuesto para que al cabo de 15 años el balance final sea $10 000?

b) Un depósito a una tasa de r% de interés compuesto continuo duplica su valor en 10 años. Calcular r.

En los ejercicios 75 y 76, representar la gráfica de la función.

75. $f(x) = 2\arctan(x+3)$

76. $h(x) = -3\,\text{arcsen}\,2x$

En los ejercicios 77 y 78, evaluar la expresión sin usar una calculadora. (*Sugerencia:* Dibujar un triángulo rectángulo.)

77. *a*) $\text{sen}(\text{arcsen}\,\frac{1}{2})$

b) $\cos(\text{arcsen}\,\frac{1}{2})$

78. *a*) $\tan(\text{arccot}\,2)$

b) $\cos(\text{arcsec}\,\sqrt{5})$

En los ejercicios, 79 a 84 encontrar la derivada de la función.

79. $y = \tan(\text{arcsen}\,x)$

80. $y = \arctan(x^2 - 1)$

81. $y = x\,\text{arcsec}\,x$

82. $y = \frac{1}{2}\arctan e^{2x}$

83. $y = x(\text{arcsen}\,x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\,x$

84. $y = \sqrt{x^2-4} - 2\,\text{arcsec}\,\frac{x}{2},\quad 2 < x < 4$

En los ejercicios 85 a 90, calcular la integral indefinida.

85. $\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx$

86. $\int \frac{1}{3+25x^2}\,dx$

87. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

88. $\int \frac{1}{16+x^2}\,dx$

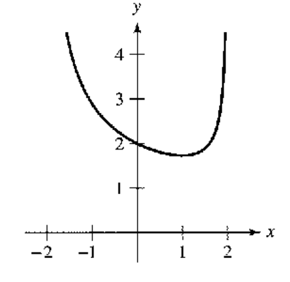
89. $\int \frac{\arctan(x/2)}{4+x^2}\,dx$

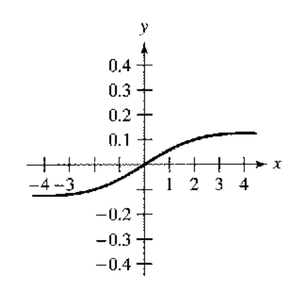
90. $\int \frac{\text{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

En los ejercicios 91 y 92, encontrar el área de la región.

91. $y = \frac{4-x}{\sqrt{4-x^2}}$

92. $y = \frac{x}{16+x^2}$





93. ***Movimiento armónico*** Un peso de masa m está sujeto al extremo de un resorte que oscila con movimiento armónico simple. Según la ley de Hooke, se puede determinar que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2-y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t, teniendo que $y = 0$ cuando $t = 0$.

En los ejercicios 94 y 95, calcular la derivada de la función.

94. $y = 2x - \cosh\sqrt{x}$

95. $y = x\tanh^{-1} 2x$

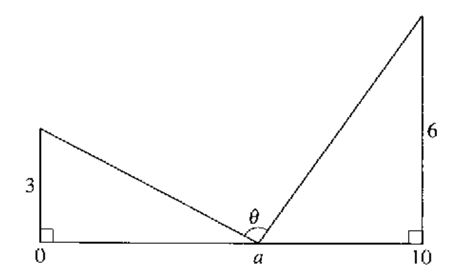
En los ejercicios 96 a 97, calcular la integral indefinida.

96. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

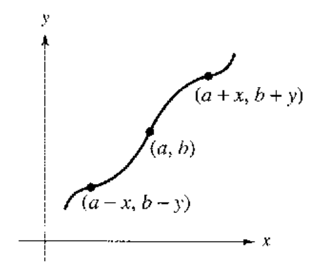
97. $\int x^2\,\text{sech}^2\,x^3\,dx$

SP Solución de problemas

1. Encontrar el valor de a que maximiza el ángulo θ mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor aproximado de este ángulo?



2. Recordar que la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen si (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ lo es también. La gráfica de la función $y = f(x)$ es **simétrica respecto al punto (a, b)** siempre que $(a - x, b - y)$ es un punto de la gráfica, $(a + x, b + y)$ lo es también, como se muestra en la figura.



a) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Escribir un párrafo breve explicando cómo la simetría de la gráfica respecto al punto $(0, \pi)$ permite concluir que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0.$$

b) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + 2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Usar la simetría de la gráfica respecto al punto $(\pi, 2)$ para evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} x + 2) \, dx.$$

c) Trazar la gráfica de $y = \arccos x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Usar la simetría de la gráfica para evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \arccos x \, dx$$

d) Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} \, dx.$

3. a) Usar una computadora para representar $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Usar la gráfica para estimar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

c) Usar la definición de derivada para justificar la respuesta del apartado b).

4. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$.

a) Determinar el dominio de la función f.

b) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = 1$.

c) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = -1$.

d) ¿Cuál es el recorrido o rango de la función f?

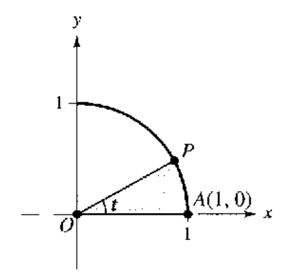
e) Calcular $f'(x)$ y usar el cálculo para encontrar el valor máximo de f en el intervalo $[1, 10]$.

f) Usar una computadora para representar gráficamente f en la pantalla $[0, 5] \times [-2, 2]$ y estimar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, si es que existe.

g) Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ analíticamente, si es que existe.

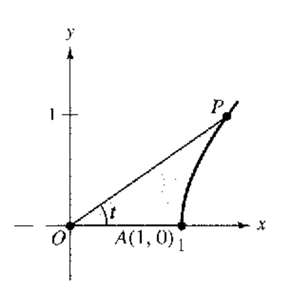
5. Graficar la función exponencial $y = a^x$ para $a = 0.5, 1.2$ y 2.0. ¿Cuál de estas curvas interseca la recta $y = x$? Determinar todos los valores positivos de a para los cuales la curva $y = a^x$ hace intersección con la recta $y = x$.

6. a) Sea $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ un punto sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área del sector circular sombreado AOP.

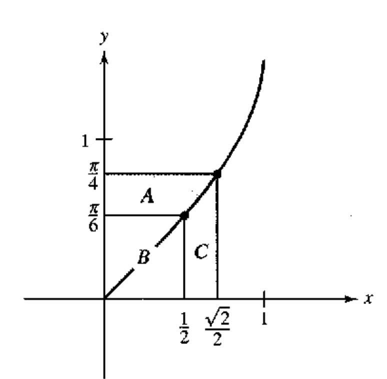


b) Sea $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ un punto sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver figura), mostrar que t es igual a dos veces el área de la región sombreada AOP. Empezar por mostrar que el área AOP está dada por la fórmula

$$A(t) = \frac{1}{2} \cosh t \operatorname{senh} t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx.$$



7. Considerar las tres regiones A, B y C determinadas por la gráfica de $f(x) = \text{arcsen } x$, como se muestra en la figura.



a) Calcular las áreas de las regiones A y B.

b) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \text{arcsen } x \, dx$$

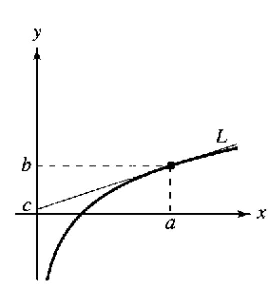
c) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1}^{3} \ln x \, dx.$$

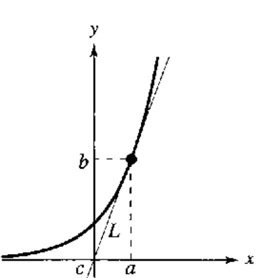
d) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

8. Sea L la recta tangente de la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre b y c siempre es igual a uno.



9. Sea L la línea tangente de la gráfica de la función $y = e^x$ en el punto (a, b).Demostrar que la distancia entre b y c siempre es igual a uno.



10. Usar integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + x}$$

Entre $x = 1$ y $x = 4$.

11. Usar la integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\text{sen}^2 x + 4\cos^2 x}$$

Entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

12. *a*) Usar una computadora para comparar la gráfica de la función $y = e^x$ con las gráficas de cada una de las funciones dadas.

i) $y_1 = 1 + \frac{x}{1!}$

ii) $y_2 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$

iii) $y_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

b) Identificar el patrón de las funciones polinómicas sucesivas en el apartado *a*) y extender el patrón un término más y comparar la gráfica de la función polinómica resultante con la gráfica de $y = e^x$.

c) ¿Qué implica este patrón?

13. Una hipoteca de una casa por \$120 000 por 35 años a un $9\frac{1}{2}\%$ tiene un pago mensual de \$985.93. Parte de este pago mensual va al interés sobre el balance no pagado y el resto del pago se utiliza para reducir el capital principal. La cantidad que va para el interés es

$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la cantidad que va directamente hacia la reducción del capital principal es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

En esas fórmulas P es la cantidad de la hipoteca, r la tasa de interés, M el pago mensual, y t el tiempo en años.

a) Usar una computadora para representar cada función en la misma pantalla. (La pantalla debe mostrar los 35 años de pagos de la hipoteca.)

b) En los primeros años, ¿a qué corresponde la mayor parte de la mensualidad? Estimar el momento en que se dedican cantidades iguales a los intereses y a la amortización.

c) Usar las gráficas del apartado *a*) para formular una conjetura acerca de la relación entre las pendientes de las rectas tangentes de las dos curvas para un valor específico de t. Proporcionar un argumento analítico para verificar la conjetura. Encontrar $u'(15)$ y $v'(15)$.

d) Repetir los apartados *a*) y *b*) para un plazo de 20 años ($M = \$1\,118.56$). ¿Qué se puede concluir?

Ecuaciones diferenciales

El SkyDome en Toronto es un centro de entretenimiento que tiene un techo plegable. ¿Cómo comparar los niveles de ruido en el estadio cuando el techo está abierto y cuando está cerrado? Explique su razonamiento.

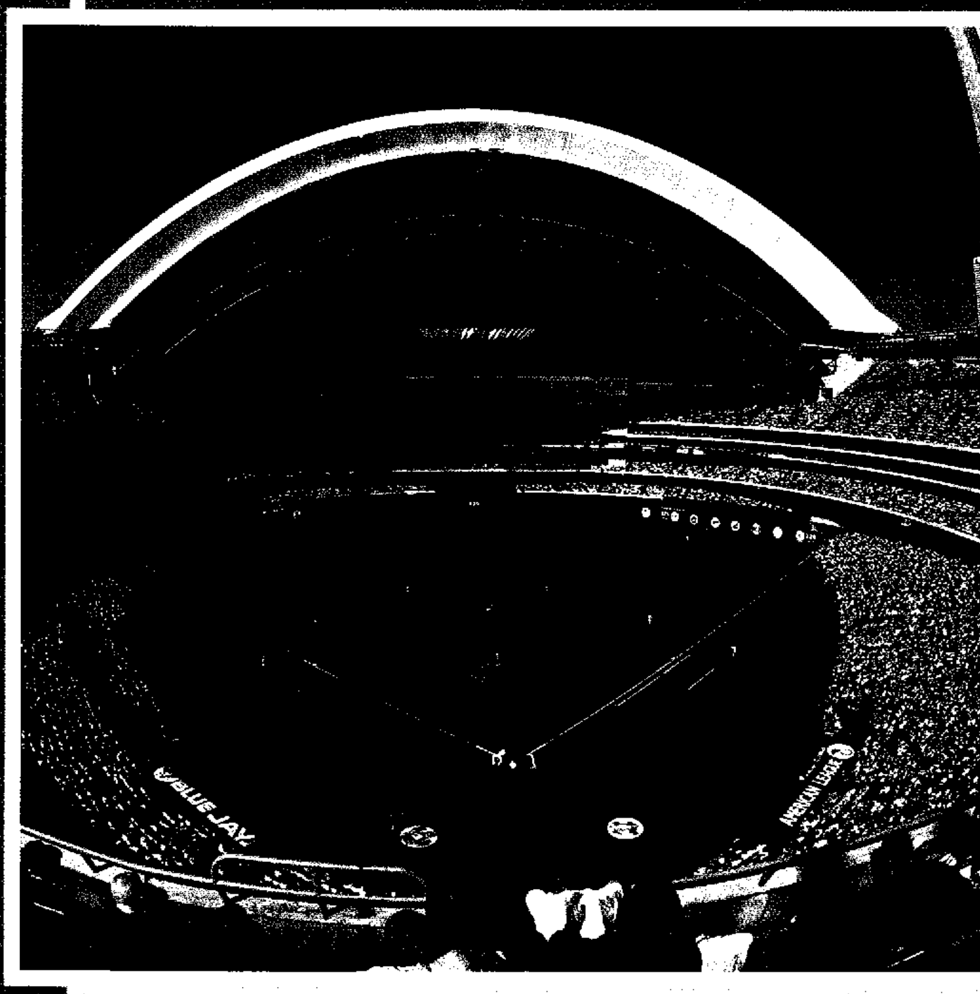


Image Gap/Alamy Images

Sección 6.1 Campos de pendientes y método de Euler

- **Usar condiciones iniciales para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar campos de pendientes para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar el método de Euler para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**

Soluciones general y particular

En este texto se aprenderá que los fenómenos físicos se pueden describir por medio de ecuaciones diferenciales. En la sección 6.2 se observará que los problemas acerca de la descomposición radiactiva, el crecimiento poblacional, y las leyes de enfriamiento de Newton se pueden formular en términos de ecuaciones diferenciales.

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo, la derivación y sustitución demostrarán que $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. Lo cual demuestra que cada solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$y = Ce^{-2x} \qquad \text{Solución general de } y' - 2y = 0.$$

donde C es cualquier número real. La solución se llama **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen **soluciones singulares** que no se pueden escribir como casos especiales de la solución general. Sin embargo, tales soluciones no se consideran en este texto. El **orden** de una ecuación diferencial se determina por la derivada de mayor orden en la ecuación. Como ejemplo, $y' = 4y$ es una ecuación diferencial de primer orden.

NOTA Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se discuten en la sección 6.4.

En la sección 4.1, ejemplo 8, se observó que la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32.$$

que contiene dos constantes arbitrarias. Se puede mostrar que una ecuación diferencial de orden n tiene una solución general con n constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Verificación de soluciones

Determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

a) $y = \operatorname{sen} x$ ***b)*** $y = 4e^{-x}$ ***c)*** $y = Ce^x$

Solución

a) Dado que $y = \operatorname{sen} x$, $y' = \cos x$, y $y'' = -\operatorname{sen} x$, se deduce que

$$y'' - y = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Así, $y = \operatorname{sen} x$ *no* es una solución.

b) Dado que $y = 4e^{-x}$, $y' = -4e^{-x}$, y $y'' = 4e^{-x}$, se deduce que

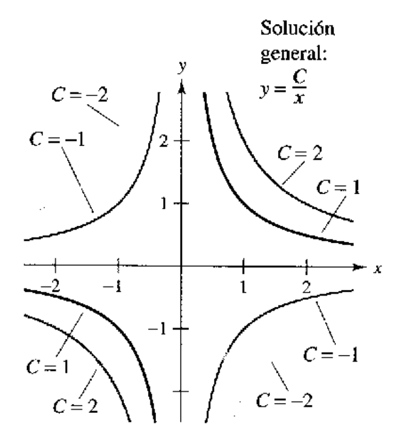
$$y'' - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0.$$

Así, $y = 4e^{-x}$ es una solución.

c) Dado que $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$, y $y'' = Ce^x$, se deduce que

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0.$$

Así, $y = Ce^x$ es una solución para cualquier valor de C.



Curvas solución para $xy' + y = 0$
Figura 6.1

Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas conocidas como **curvas solución**, una para cada valor asignado a la constante arbitraria. Como ejemplo, se puede verificar que cada función de la forma

$$y = \frac{C}{x}$$ Solución general de $xy' + y = 0$.

es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$. La figura 6.1 muestra cuatro de las curvas solución correspondientes a diferentes valores de C.

Como se discutió en la sección 4.1, las **soluciones particulares** de la ecuación diferencial se obtienen de las **condiciones iniciales** que da el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas para un valor particular de la variable independiente. El término "condición inicial" deriva del hecho de que, con frecuencia en problemas que involucran tiempo, el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas es conocida en el tiempo *inicial* $t = 0$. Como ejemplo, la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2$$ Solución general de $s''(t) = -32$.

podrá tener las siguientes condiciones iniciales.

$$s(0) = 80, \qquad s'(0) = 64$$ Condiciones iniciales.

En este caso, las condiciones iniciales llevan a la solución particular

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$$ Solución particular.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$, verificar que $y = Cx^3$ es una solución, y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$.

Solución Se sabe que $y = Cx^3$ es una solución dado que $y' = 3Cx^2$ y

$$\begin{aligned} xy' - 3y &= x(3Cx^2) - 3(Cx^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$ lleva a

$$y = Cx^3$$ Solución general.

$$2 = C(-3)^3$$ Sustituye la condición inicial.

$$-\frac{2}{27} = C$$ Solución para C.

y se puede concluir que la solución particular es

$$y = -\frac{2x^3}{27}.$$ Solución particular.

Verificar esta solución al sustituir a y y y' en la ecuación diferencial original.

NOTA Para determinar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe corresponder al número de constantes en la solución general.

Campos de pendientes

Resolver una ecuación diferencial analíticamente puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial. Considerar una ecuación diferencial de la forma

$$y' = F(x, y). \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

En cada punto (x, y) en el plano xy F se define donde la ecuación diferencial determina la pendiente $y' = F(x, y)$ de la solución en ese punto. Si se dibuja una recta corta con pendiente $F(x, y)$ en los puntos seleccionados (x, y) en el dominio de F, entonces esos segmentos forman un **campo de pendientes**, o un *campo de direcciones* para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$. Cada segmento de recta tiene la misma pendiente que la curva de solución a través de ese punto. Un campo de pendientes muestra la forma general de todas las soluciones.

EJEMPLO 3 Representación gráfica de un campo de pendientes

Representar un campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x - y$ para los puntos $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

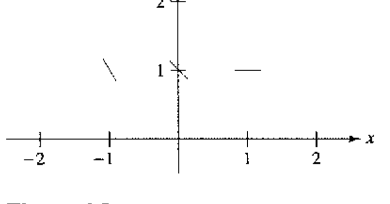


Figura 6.2

Solución

La pendiente de la curva solución en cualquier punto (x, y) es $F(x, y) = x - y$. Así, la pendiente en el punto $(-1, 1)$ es $y' = -1 - 1 = -2$, la pendiente en $(0, 1)$ es $y' = 0 - 1 = -1$, y la pendiente en $(1, 1)$ es $y' = 1 - 1 = 0$. Dibujar segmentos cortos en los tres puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.2.

EJEMPLO 4 Identificar campos de pendientes para ecuaciones diferenciales

Asociar a cada campo vectorial su ecuación diferencial.

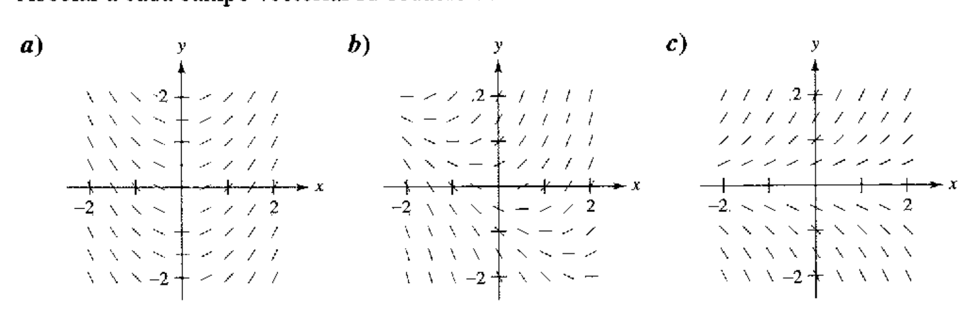


Figura 6.3

i) $y' = x + y$ *ii)* $y' = x$ *iii)* $y' = y$

Solución

a) En la figura 6.3*a* se puede observar que la pendiente de cualquier punto a lo largo del eje y es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x$. Así, la gráfica corresponde con *ii*).

b) En la figura 6.3*b* se puede observar que la pendiente en el punto $(1, -1)$ es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x + y$. Así, la gráfica corresponde con *i*).

c) En la figura 6.3*c* se puede observar que la pendiente de algún punto a lo largo del eje x es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = y$. Así, la gráfica corresponde con *iii*).

Una curva solución de una ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ es simplemente una curva en el plano xy cuya recta tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente igual a $F(x, y)$. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Mediante un campo de pendientes trazar una gráfica

Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial

$$y' = 2x + y.$$

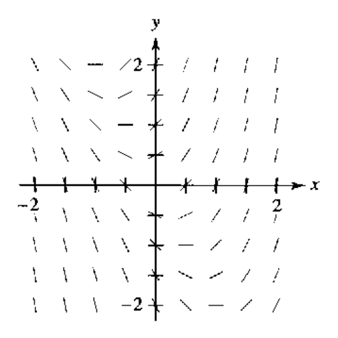
Usar un campo de pendientes para representar gráficamente la solución que pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución

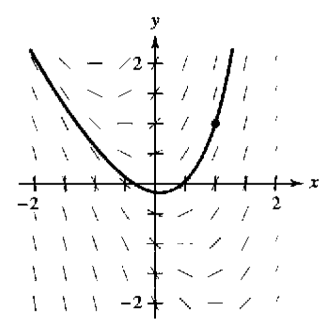
Hacer una tabla que muestre las pendientes en varios puntos. La tabla siguiente es un pequeño ejemplo. Se deben calcular las pendientes de muchos puntos para obtener un campo de pendientes representativo.

x	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$y' = 2x + y$	-5	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3	5

A continuación, dibujar segmentos de rectas en los puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.4.



Campo de pendientes para $y' = 2x + y$
Figura 6.4



Solución particular para $y' = 2x + y$ que pasa a través de $(1, 1)$
Figura 6.5

Después de dibujar el campo de pendientes, se comienza en el punto inicial $(1, 1)$ y se mueve a la derecha en dirección del segmento. A continuación, dibujar la curva solución tal que ésta se mueva paralela al segmento más cercano. Hacer lo mismo para la izquierda de $(1, 1)$. La solución resultante se muestra en la figura 6.5.

Del ejemplo 5, notar que el campo de pendientes muestra que mientras x aumenta, y' lo hace hasta el infinito.

NOTA Dibujar un campo de pendientes a mano es tedioso. En la práctica, los campos de pendientes usualmente se dibujan mediante un método gráfico.

Método de Euler

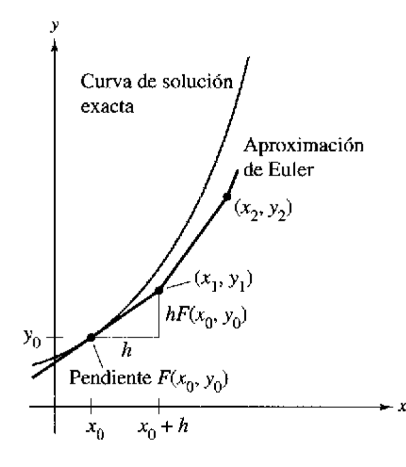


Figura 6.6

El **método de Euler** es un método numérico para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y)$$

que pasa a través del punto (x_0, y_0). Con esta información, se sabe que la gráfica de esa solución pasa a través del punto (x_0, y_0) y tiene una pendiente de $F(x_0, y_0)$ en ese punto. Esto da un "punto inicial" para aproximar la solución.

A partir del punto inicial, se sigue en la dirección indicada por la pendiente. Mediante un pequeño paso h, se mueve a lo largo de la recta tangente hasta llegar al punto (x_1, y_1), donde

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{y} \quad y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

como se muestra en la figura 6.6. Si se considera a (x_1, y_1) como un nuevo punto inicial, se puede repetir el proceso para obtener un segundo punto (x_2, y_2). Los valores de x_i y y_i son los siguientes.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) \\ x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + h & y_n &= y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

NOTA Se pueden obtener mejores aproximaciones de la solución exacta si se escogen tamaños de paso cada vez más pequeños.

EJEMPLO 6 Aproximar una solución mediante el método de Euler

Usar el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = x - y$$

que pasa a través del punto (0, 1). Usar un paso de $h = 0.1$.

Solución Mediante $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x - y$, se tiene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3, \ldots$, y

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0 - 1) = 0.9 \\ y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) = 0.9 + (0.1)(0.1 - 0.9) = 0.82 \\ y_3 &= y_2 + hF(x_2, y_2) = 0.82 + (0.1)(0.2 - 0.82) = 0.758. \end{aligned}$$

Las primeras diez aproximaciones se muestran en la tabla. Se pueden representar esos valores para obtener una gráfica de la solución aproximada, como se muestra en la figura 6.7.

Figura 6.7

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1	0.900	0.820	0.758	0.712	0.681	0.663	0.657	0.661	0.675	0.697

NOTA Para la ecuación diferencial aplicada en el ejemplo 6, se puede verificar que la solución exacta es $y = x - 1 + 2e^{-2x}$. La figura 6.7 compara esta solución exacta con la solución aproximada obtenida en el ejemplo 6.

Ejercicios de la sección 6.1

En los ejercicios 1 a 8, verificar la solución de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial*
1.	$y = Ce^{4x}$	$y' = 4y$
2.	$y = e^{-x}$	$3y' + 4y = e^{-x}$
3.	$x^2 + y^2 = Cy$	$y' = 2xy/(x^2 - y^2)$
4.	$y^2 - 2\ln y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$
5.	$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$	$y'' + y = 0$
6.	$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$	$y'' + 2y' + 2y = 0$
7.	$y = -\cos x \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	$y'' + y = \tan x$
8.	$y = \frac{2}{5}(e^{-2x} + e^{x})$	$y'' + 2y' = 2e^{x}$

En los ejercicios 9 a 12, verificar la solución particular de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial y condición inicial*
9.	$y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x$	$2y + y' = 2\operatorname{sen}(2x) - 1$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
10.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4\cos x + 2$	$y' = x + 4\operatorname{sen} x$ $y(0) = -2$
11.	$y = 6e^{-2x^2}$	$y' = -4xy$ $y(0) = 6$
12.	$y = e^{-\cos x}$	$y' = y \operatorname{sen} x$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

En los ejercicios 13 a 18, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.

13. $y = 3\cos x$

14. $y = 3\cos 2x$

15. $y = e^{-2x}$

16. $y = 5\ln x$

17. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \operatorname{sen} 2x + C_4 \cos 2x$

18. $y = 3e^{2x} - 4\operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios 19 a 24, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = x^3e^x$.

19. $y = x^2$

20. $y = x^2e^x$

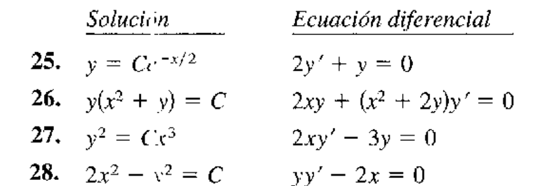
21. $y = x^2(2 + e^x)$

22. $y = \operatorname{sen} x$

23. $y = \ln x$

24. $y = x^2e^x - 5x^2$

En los ejercicios 25 a 28 se dan algunas de las curvas correspondientes a los diferentes valores de C en la solución general de la ecuación diferencial. Encontrar la solución particular que pasa a través del punto mostrado en la gráfica.



	Solución	*Ecuación diferencial*
25.	$y = Ce^{-x/2}$	$2y' + y = 0$
26.	$y(x^2 + y) = C$	$2xy + (x^2 + 2y)y' = 0$
27.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$
28.	$2x^2 - y^2 = C$	$yy' - 2x = 0$

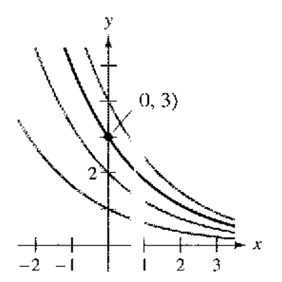


Figura para 25

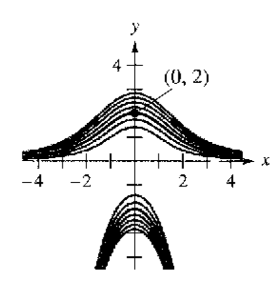


Figura para 26

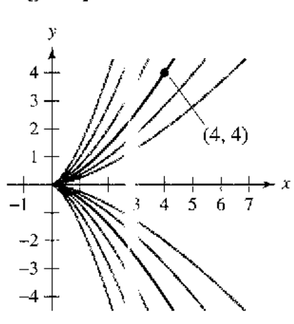


Figura para 27

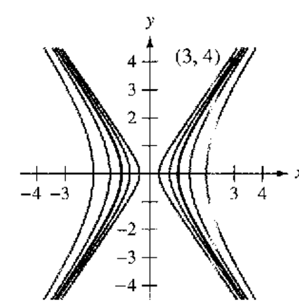


Figura para 28

En los ejercicios 29 y 30, la solución general de la ecuación diferencial está dada. Usar un paquete gráfico de computadora para hacer la gráfica de las soluciones particulares para los valores dados de C.

29. $4yy' - x = 0$
$4y^2 - x^2 = C$
$C = 0, C = \pm 1, C = \pm 4$

30. $yy' + x = 0$
$x^2 + y^2 = C$
$C = 0, C = 1, C = 4$

En los ejercicios 31 a 36, verificar que la solución general satisface la ecuación diferencial. Entonces encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

31. $y = Ce^{-2x}$
$y' + 2y = 0$
$y = 3$ cuando $x = 0$

32. $3x^2 + 2y^2 = C$
$3x + 2yy' = 0$
$y = 3$ cuando $x = 1$

33. $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$
$y'' + 9y = 0$
$y = 2$ cuando $x = \pi/6$
$y' = 1$ cuando $x = \pi/6$

34. $y = C_1 + C_2 \ln x$
$xy'' + y' = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = \frac{1}{2}$ cuando $x = 2$

33. $y = C_1x + C_2x^3$
$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = 4$ cuando $x = 2$

34. $y = e^{2x/3}(C_1 + C_2x)$
$9y'' - 12y' + 4y = 0$
$y = 4$ cuando $x = 0$
$y = 0$ cuando $x = 3$

En los ejercicios 37 a 48, encontrar la solución general de la ecuación diferencial por integración.

37. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

38. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - 4x$

39. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$

40. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

41. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2}{x}$

42. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos x^2$

43. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 2x$

44. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2 x$

45. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 3}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{5 - x}$

47. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}$

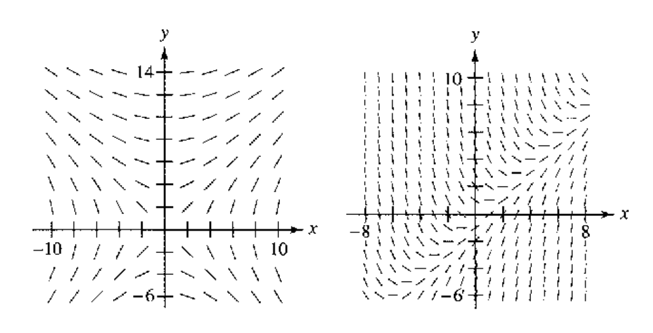
48. $\dfrac{dy}{dx} = 5e^{-x/2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, se dan una ecuación diferencial y su campo de pendientes. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

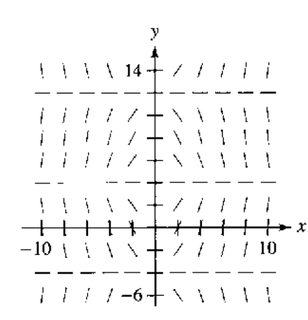
49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

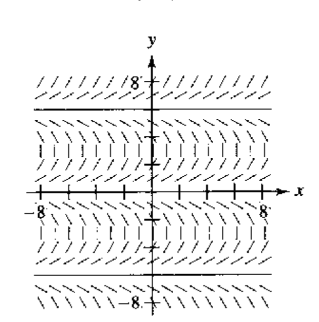
50. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$



51. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos \dfrac{\pi y}{8}$

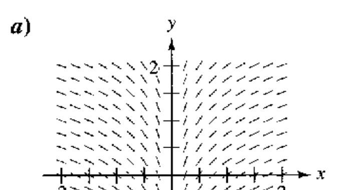
52. $\dfrac{dy}{dx} = \tan\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)$



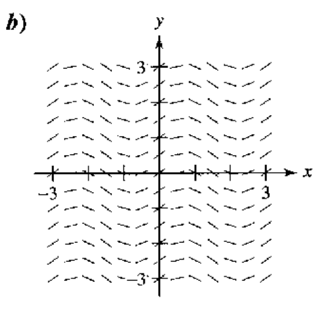


En los ejercicios 53 a 56, ubicar la ecuación diferencial con su respectivo campo de pendientes. [Los campos de pendientes se etiquetaron como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

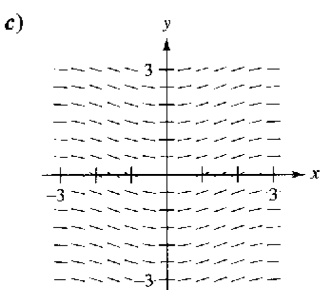
***a*)**



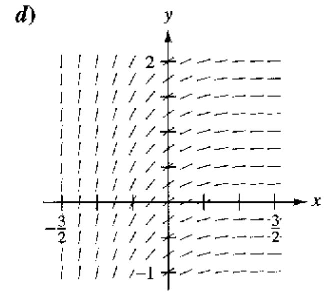
***b*)**



***c*)**



***d*)**



53. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(2x)$

54. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$

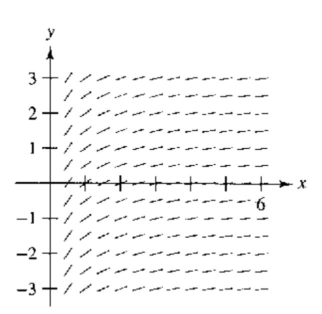
55. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x}$

56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 57 a 60, *a*) hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) usar el campo de pendientes para hacer la gráfica de la función que pasa a través del punto dado, y *c*) discutir la gráfica de la solución cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.**

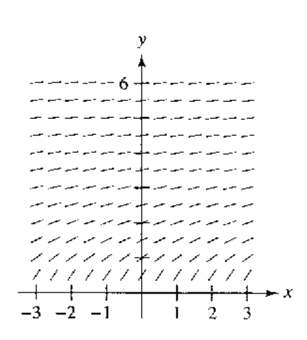
	Ecuación diferencial	*Punto*
57.	$y' = -x + 1$	$(2, 4)$
58.	$y' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x$	$(1, 1)$
59.	$y' = y - 2x$	$(1, 1)$
60.	$y' = y + xy$	$(0, 4)$

61. ***Campo de pendientes*** Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/x$, donde $x > 0$, para representar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/x$ cuando $x \to \infty$.



a) $(1, 0)$ *b)* $(2, -1)$

62. ***Campo de pendientes*** Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/y$, donde $y > 0$, para esbozar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/y$ cuando $x \to \infty$.



a) $(0, 1)$ *b)* $(1, 1)$

Campos de pendientes **En los ejercicios 63 a 68, usar un sistema algebraico de computadora para *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y *b*) dibujar la gráfica de la solución que satisface la condición inicial especificada.**

63. $\dfrac{dy}{dx} = 0.5y, \quad y(0) = 6$

64. $\dfrac{dy}{dx} = 2 - y, \quad y(0) = 4$

65. $\dfrac{dy}{dx} = 0.02y(10 - y), \quad y(0) = 2$

66. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2x(2 - y), \quad y(0) = 9$

67. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4y(3 - x), \quad y(0) = 1$

68. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}e^{-x/8} \operatorname{sen} \dfrac{\pi y}{4}, \quad y(0) = 2$

Método de Euler **En los ejercicios 69 a 74, usar el método de Euler para hacer una tabla de valores para la solución aproximada de la ecuación diferencial con un valor inicial específico. Usar *n* pasos de tamaño *h*.**

69. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

70. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 20, \quad h = 0.05$

71. $y' = 3x - 2y, \quad y(0) = 3, \quad n = 10, \quad h = 0.05$

72. $y' = 0.5x(3 - y), \quad y(0) = 1, \quad n = 5, \quad h = 0.4$

73. $y' = e^{xy}, \quad y(0) = 1, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

74. $y' = \cos x + \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 5, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

En los ejercicios 75 a 77, completar la tabla mediante la solución exacta de la ecuación diferencial y dos aproximaciones obtenidas mediante el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial. Usar $h = 0.2$ y 0.1 y calcular cada aproximación con cuatro decimales.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y(x)$ (exacta)						
$y(x)$ ($h = 0.2$)						
$y(x)$ ($h = 0.1$)						

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Solución exacta*
75.	$\dfrac{dy}{dx} = y$	$(0, 3)$	$y = 3e^x$
76.	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$	$(0, 2)$	$y = \sqrt{2x^2 + 4}$
77.	$\dfrac{dy}{dx} = y + \cos(x)$	$(0, 0)$	$y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x)$

78. Comparar los valores de las aproximaciones en los ejercicios 75 a 77 con los valores dados por la solución exacta. ¿Cómo cambia el error cuando se incrementa h?

79. ***Temperatura*** En el tiempo $t = 0$ minutos, la temperatura de un objeto es 140°F. La temperatura del objeto cambia en un ritmo o velocidad dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(y - 72).$$

a) Usar un programa gráfico de computadora y el método de Euler para aproximar las soluciones de esta ecuación diferencial en $t = 1$, 2 y 3. Usar un tamaño de paso de $h = 0.1$.

b) Comparar sus resultados con la solución exacta

$$y = 72 + 68e^{-t/2}.$$

80. ***Temperatura*** Repetir el ejercicio 79 con un tamaño de paso de $h = 0.05$. Comparar los resultados.

Desarrollo de conceptos

81. Describir la diferencia entre una solución general de una ecuación diferencial y una solución particular.

82. Explicar cómo interpretar un campo de pendientes.

83. Describir cómo usar el método de Euler para aproximar la solución particular de una ecuación diferencial.

84. Se sabe que $y = Ce^{kx}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = 0.07y$. ¿Es posible determinar C o k con la información dada? Si es posible, encontrar sus valores.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 85 a 88, determinar si los enunciados son verdaderos o falsos. Si son falsos, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

85. Si $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, entonces $y = f(x) + C$ es también una solución.

86. La solución general de una ecuación diferencial es $y = -4.9x^2 + C_1x + C_2$. Para encontrar la solución particular se deben tener dos condiciones iniciales.

87. Los campos de pendientes representan las soluciones generales de ecuaciones diferenciales.

88. Un campo de pendientes muestra que la pendiente en el punto (1, 1) es 6. Este campo de pendientes representa la familia de soluciones para la ecuación diferencial $y' = 4x + 2y$.

89. ***Error y método de Euler*** La solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

donde $y(0) = 4$, es $y = 4e^{-2x}$.

a) Usar un programa gráfico de computadora para completar la tabla, donde y es el valor exacto de la solución, y_1 es la solución aproximada que se tiene mediante el método de Euler con $h = 0.1$, y_2 es la solución aproximada obtenida mediante el método de Euler con $h = 0.2$, e_1 es el error absoluto $|y - y_1|$, e_2 es el error absoluto $|y - y_2|$, y r es la relación e_1/e_2.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y						
y_1						
y_2						
e_1						
e_2						
r						

b) ¿Qué se puede concluir acerca de la razón r a medida que cambia h?

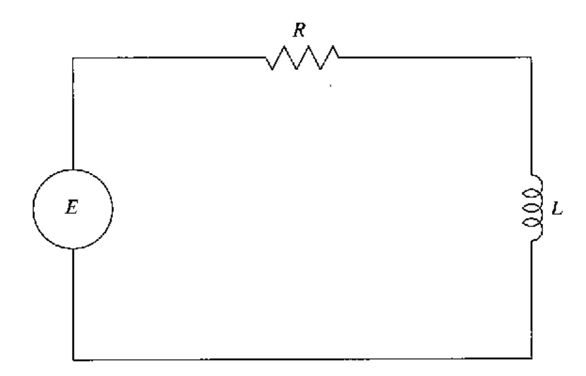
c) Predecir el error absoluto cuando $h = 0.05$.

90. ***Error y método de Euler*** Repetir el ejercicio 89 donde la solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

donde $y(0) = 1$ es $y = x - 1 + 2e^{-x}$.

91. ***Circuitos eléctricos*** El diagrama muestra un circuito eléctrico simple que consiste de una fuente de potencia, un resistor y un inductor.



Un modelo de la corriente I, en amperes (A), en un tiempo t está dado por la ecuación diferencial de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

donde $E(t)$ es el voltaje (V) producido por la fuente de potencia, R es la resistencia, en ohms (Ω), y L es la inductancia, en henrys (H). Suponer que el circuito eléctrico consiste de una fuente de potencia de 24 V, un resistor de 12 Ω y un inductor de 4 H.

a) Trazar la gráfica para el campo de pendientes de la ecuación diferencial.

b) ¿Cuál es el valor limitante de la corriente? Explicar.

92. ***Para pensar*** Se sabe que $y = e^{kt}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 16y = 0$. Encontrar los valores de k.

93. ***Para pensar*** Se sabe que $y = A \text{ sen } \omega t$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$. Encontrar los valores de ω.

Preparación del examen Putnam

94. Sea f una función de valor real dos veces derivable que satisfaga

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x)$$

donde $g(x) \geq 0$ para todo x real. Probar que $|f(x)|$ está acotada.

95. Probar si la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

es cortada por la recta $x = k$, las tangentes de los puntos de intersección son concurrentes.

Sección 6.2 Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento

- **Usar la separación de variables para resolver una ecuación diferencial simple.**
- **Usar funciones exponenciales para modelar el crecimiento y decrecimiento en problemas de aplicación.**

Ecuaciones diferenciales

En la sección anterior se aprendió a analizar de manera visual las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante los campos de pendientes y la solución aproximada de forma numérica mediante el método de Euler. Analíticamente, se aprendió a resolver sólo dos tipos de ecuaciones diferenciales, las de la forma

$$y' = f(x) \qquad \text{y} \qquad y'' = f(x).$$

En esta sección, se aprenderá a resolver un tipo más general de ecuaciones diferenciales. La estrategia es reescribir la ecuación, tal que cada variable ocurre sólo en un lado de la ecuación. La estrategia se denomina *separación de variables*. (Se estudiará esa estrategia más a detalle en la sección 6.3.)

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación diferencial

Resolver la ecuación diferencial $y' = 2x/y$.

Solución

$$y' = \frac{2x}{y} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$yy' = 2x \qquad \text{Multiplicar ambos miembros por } y.$$

$$\int yy'\,dx = \int 2x\,dx \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx \qquad dy = y'\,dx.$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1 \qquad \text{Aplicar la regla de las potencias.}$$

$$y^2 - 2x^2 = C \qquad \text{Reescribir, sea } C = 2C_1.$$

Así, la solución general está dada por

$$y^2 - 2x^2 = C.$$

Se puede usar la derivación implícita para verificar este resultado.

NOTA Cuando se integran ambos miembros de la ecuación en el ejemplo 1, no se necesita agregar una constante de integración a ambos miembros de la ecuación. Si se hace, se obtendrá el mismo resultado que en el ejemplo 1.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 + C_2 = x^2 + C_3$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + (C_3 - C_2)$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

En el ejemplo 1, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y^2 - 2x^2 = C.$$

Usar un método gráfico de computadora para graficar varias soluciones particulares, éstas se dan por $C = \pm 2$, $C = \pm 1$ y $C = 0$. Describir las soluciones gráficamente. ¿Es verdadero o falso el enunciado de cada solución?

La pendiente de la gráfica en el punto (x, y) es igual a dos veces la razón de x y y.

Explicar el razonamiento. ¿Están todas las curvas para las cuales este enunciado es verdadero representadas por la solución general?

En la práctica, más personas prefieren usar la notación de Leibniz y las diferenciales cuando se aplica separación de variables. La solución del ejemplo 1 se muestra abajo por medio de esta notación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$y\,dy = 2x\,dx$$

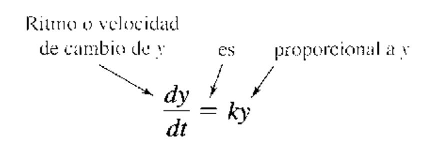
$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

$$y^2 - 2x^2 = C$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento

En muchas aplicaciones, el ritmo velocidad de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Si y es una función del tiempo t, la proporción se puede escribir como se muestra.



$$\frac{dy}{dt} = ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial se proporciona en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1 Modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

$$y = Ce^{kt}$$

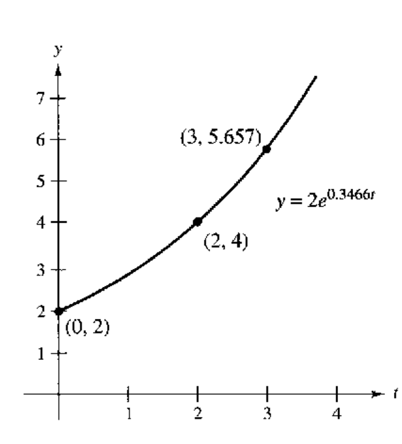
C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad.** El **crecimiento exponencial** se produce cuando $k > 0$, y el **decrecimiento** cuando $k < 0$.

NOTA Diferenciar la función $y = Ce^{kt}$ con respecto a t, y verificar que $y' = ky$.

Demostración

$y' = ky$	Escribir la ecuación original.
$\frac{y'}{y} = k$	Separar variables.
$\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt$	Integrar con respecto a t.
$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$	$dy = y'\,dt$.
$\ln y = kt + C_1$	Encontrar la antiderivada de cada miembro.
$y = e^{kt}e^{C_1}$	Despejar y.
$y = Ce^{kt}$	Sea $C = e^{C_1}$.

Así, todas las soluciones de $y' = ky$ son de la forma $y = Ce^{kt}$.



Si el ritmo o velocidad de cambio de y es proporcional a y, entonces y sigue un modelo exponencial
Figura 6.8

EJEMPLO 2 Uso de un modelo de crecimiento exponencial

El ritmo de cambio de y es proporcional a y. Cuando $t = 0$, $y = 2$. Cuando $t = 2$, $y = 4$. ¿Cuál es el valor de y cuando $t = 3$?

Solución Dado que $y' = ky$, se sabe que y y t se relacionan con la ecuación $y = Ce^{kt}$. Al aplicar las condiciones iniciales se encuentran los valores de las constantes C y k.

$2 = Ce^0$	$\Rightarrow$	$C = 2$	Cuando $t = 0$, $y = 2$.
$4 = 2e^{2k}$	$\Rightarrow$	$k = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466$	Cuando $t = 2$, $y = 4$.

Así, el modelo es $y \approx 2e^{0.3466t}$. Cuando $t = 3$, el valor de y es $2e^{0.3466(3)} \approx 5.657$. (Ver la figura 6.8.)

AYUDA DE ESTUDIO Mediante propiedades logarítmicas, notar que el valor de k en el ejemplo 2 puede también escribirse como $\ln(\sqrt{2})$. Así, el modelo se convierte en $y = 2e^{(\ln\sqrt{2})t}$, el cual se puede reescribir como $y = 2(\sqrt{2})^t$.

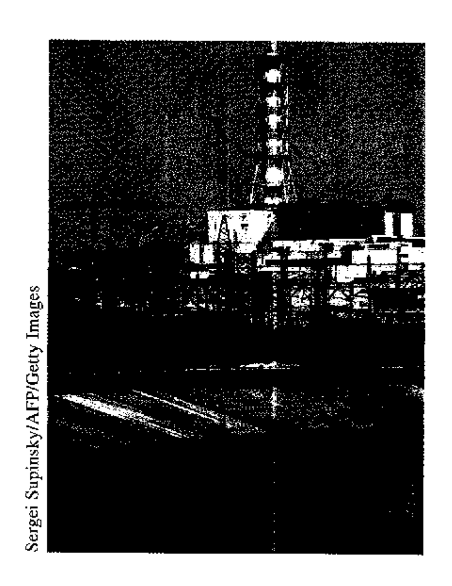
TECNOLOGÍA La mayoría de los métodos gráficos tienen funciones para ajustar curvas que se pueden usar para encontrar modelos que representen los datos. Usar la función de *regresión exponencial* y la información del ejemplo 2 para encontrar un modelo para los datos. Comparar el modelo obtenido con el modelo dado.

El decrecimiento radiactivo se mide en términos de la semivida o *vida media* que es el número de años requeridos para reducir la muestra radiactiva a la mitad. Las vidas medias de algunos isótopos radiactivos comunes se muestran:

Uranio (^{238}U)	4 470 000 000 años
Plutonio (^{239}Pu)	24 100 años
Carbono (^{14}C)	5 715 años
Radio (^{226}Ra)	1 599 años
Einstenio (^{254}Es)	276 años
Nobelio (^{257}No)	25 segundos

EJEMPLO 3 Desintegración radiactiva

Suponer que 10 gramos del isótopo Pu-239 se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir a 1 gramo?


Sergei Supinsky/AFP/Getty Images

Solución Considerar que y representa la masa (en gramos) del plutonio. Dado que la tasa de desintegración es proporcional a y, se sabe que

$$y = Ce^{kt}$$

donde t es el tiempo en años. Para encontrar los valores de las constantes C y k, aplicar las condiciones iniciales. Con base en que $y = 10$ cuando $t = 0$, se puede escribir

$$10 = Ce^{k(0)} = Ce^{0}$$

lo cual implica que $C = 10$. Luego, con base en que $y = 5$ cuando $t = 24\ 100$, se puede escribir

$$5 = 10e^{k(24\ 100)}$$
$$\frac{1}{2} = e^{24\ 100k}$$
$$\frac{1}{24\ 100}\ln\frac{1}{2} = k$$
$$-0.000028761 \approx k.$$

Así, el modelo es

$$y = 10e^{-0.000028761t}. \qquad \text{Modelo de semivida o vida media.}$$

Para encontrar el tiempo en que 10 gramos decrecen a 1 gramo, se puede despejar para t en la ecuación

$$1 = 10e^{-0.000028761t}.$$

La solución es aproximadamente 80 059 años.

NOTA El modelo de decrecimiento exponencial en el ejemplo 3 se pudo escribir como $y = 10(\frac{1}{2})^{t/24\ 100}$. Este modelo es más fácil de derivar, pero para algunas aplicaciones no es conveniente usarlo.

Del ejemplo 3, notar que en un crecimiento o decrecimiento exponencial, es fácil obtener el valor de C cuando se da el valor de y para $t = 0$. El siguiente ejemplo demuestra un procedimiento para resolver C y k cuando no se conoce el valor de y en $t = 0$.

EJEMPLO 4 Crecimiento de población

Suponer que una población experimental de moscas se incremente conforme a la ley de crecimiento exponencial. Habían 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Solución Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas al momento t, donde t se mide en días. Dado que $y = 100$ cuando $t = 2$ y $y = 300$ cuando $t = 4$, se puede escribir

$$100 = Ce^{2k} \quad \text{y} \quad 300 = Ce^{4k}$$

Por la primera ecuación, se sabe que $C = 100e^{-2k}$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} 300 &= 100e^{-2k}e^{4k} \\ 300 &= 100e^{2k} \\ \ln 3 &= 2k \\ \frac{1}{2}\ln 3 &= k \\ 0.5493 &\approx k \end{aligned}$$

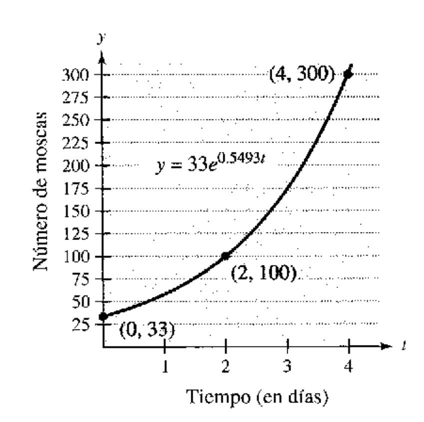


Figura 6.9

Así, el modelo de crecimiento exponencial es

$$y = Ce^{0.5493t}$$

Para resolver C, reaplicar la condición $y = 100$ cuando $t = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 100 &= Ce^{0.5493(2)} \\ C &= 100e^{-1.0986} \approx 33. \end{aligned}$$

Así, la población original (cuando $t = 0$) consistía en aproximadamente $y = C = 33$ moscas, como se muestra en la figura 6.9.

EJEMPLO 5 Ventas decrecientes

Cuatro meses después de que se detuviera la publicidad, una compañía fabricante notifica que sus ventas han caído de 100 000 unidades por mes a 80 000. Si las ventas siguen un patrón de decrecimiento exponencial, ¿qué unidades habrá después de los siguientes dos meses?

Solución Usar el modelo de decrecimiento exponencial $y = Ce^{kt}$, donde t se mide en meses. De la condición inicial ($t = 0$), se sabe que $C = 100\,000$. Además, dado que $y = 80\,000$ cuando $t = 4$, se tiene

$$\begin{aligned} 80\,000 &= 100\,000e^{4k} \\ 0.8 &= e^{4k} \\ \ln(0.8) &= 4k \\ -0.0558 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, después de 2 meses más ($t = 6$), se puede especular que la tasa de ventas mensuales será

$$\begin{aligned} y &\approx 100\,000e^{-0.0558(6)} \\ &\approx 71\,500 \text{ unidades} \end{aligned}$$

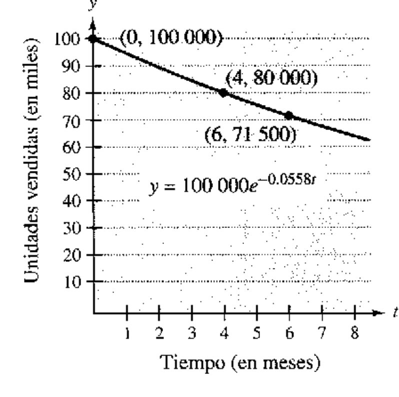


Figura 6.10

Ver la figura 6.10.

En los ejemplos 2 a 5, en realidad no se tuvo que resolver la ecuación diferencial

$$y' = ky$$

(Esto se hizo una vez en la prueba del teorema 6.1.) El siguiente ejemplo ilustra un problema cuya solución involucra la técnica de separación de variables. El ejemplo concierne a la **ley de enfriamiento de Newton**, la cual establece que el ritmo o velocidad de cambio en la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio circundante.

EJEMPLO 6 Ley de enfriamiento de Newton

Sea y la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60°. Si la temperatura del objeto baja de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80°?

Solución Por la ley de enfriamiento de Newton, se sabe que el ritmo o velocidad de cambio en y es proporcional a la diferencia entre y y 60. Esto se puede escribir como

$$y' = k(y - 60), \qquad 80 \leq y \leq 100.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, usar la separación de variables, como se muestra.

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$\left(\frac{1}{y - 60}\right) dy = k\,dt \qquad \text{Separar variables.}$$

$$\int \frac{1}{y - 60}\,dy = \int k\,dt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\ln|y - 60| = kt + C_1 \qquad \text{Encontrar la antiderivada o primitiva de cada miembro.}$$

Dado que $y > 60$, $|y - 60| = y - 60$, se pueden omitir los signos del valor absoluto. Mediante notación exponencial, se tiene

$$y - 60 = e^{kt + C_1} \quad \Longrightarrow \quad y = 60 + Ce^{kt}. \qquad C = e^{C_1}$$

Mediante $y = 100$ cuando $t = 0$, se obtiene $100 = 60 + Ce^{k(0)} = 60 + C$, lo cual implica que $C = 40$. Dado que $y = 90$ cuando $t = 10$,

$$90 = 60 + 40e^{k(10)}$$
$$30 = 40e^{10k}$$
$$k = \tfrac{1}{10} \ln \tfrac{3}{4} \approx -0.02877.$$

Así, el modelo es

$$y = 60 + 40e^{-0.02877t} \qquad \text{Modelo de enfriamiento.}$$

y finalmente, cuando $y = 80$, se obtiene

$$80 = 60 + 40e^{-0.02877t}$$
$$20 = 40e^{-0.02877t}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-0.02877t}$$
$$\ln \tfrac{1}{2} = -0.02877t$$
$$t \approx 24.09 \text{ minutos.}$$

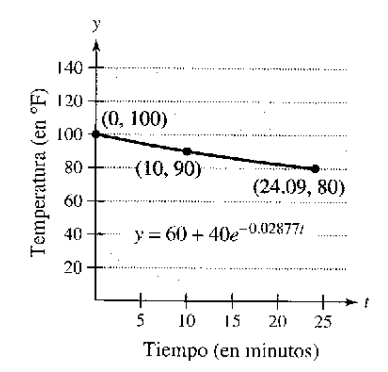


Figura 6.11

Así, se requerirán alrededor de 14.09 minutos *más* para enfriar el objeto a una temperatura de 80° (ver la figura 6.11).

Ejercicios de la sección 6.2

En los ejercicios 1 a 10, resolver la ecuación diferencial.

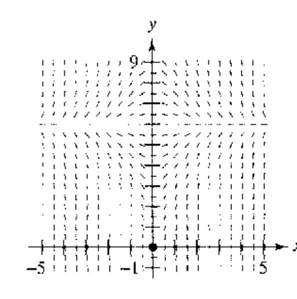
1. $\dfrac{dy}{dx} = x + 2$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - x$
3. $\dfrac{dy}{dx} = y + 2$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y$
5. $y' = \dfrac{5x}{y}$
6. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{3y}$
7. $y' = \sqrt{x}\,y$
8. $y' = x(1 + y)$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
10. $xy + y' = 100x$

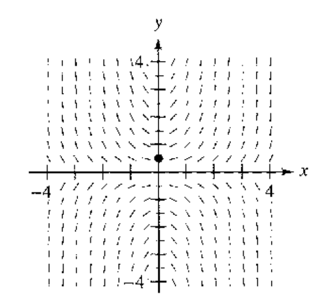
En los ejercicios 11 a 14, escribir y resolver la ecuación diferencial que modela el enunciado verbal.

11. El ritmo o velocidad de cambio de Q con respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.
12. El ritmo o velocidad de cambio de P con respecto a t es proporcional a $10 - t$.
13. El ritmo o velocidad de cambio de N con respecto a s es proporcional a $250 - s$.
14. El ritmo o velocidad de cambio de y con respecto a x varía juntamente con x y $L - y$.

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes son dados. *a*) Trazar la gráfica de dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, uno de los cuales pasa a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar un método gráfico de computadora para trazar la gráfica de la solución. Comparar el resultado con la gráfica en el apartado *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = x(6 - y), \quad (0, 0)$
16. $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$





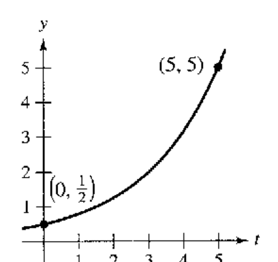
En los ejercicios 17 a 20, encontrar la función $y = f(t)$ que pasa a través del punto (0, 10) con la primera derivada dada. Usar un método gráfico para representar la solución.

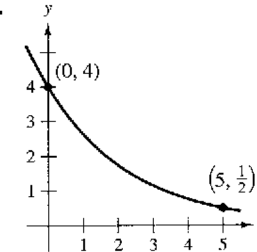
17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t$
18. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{t}$
19. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}y$
20. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}y$

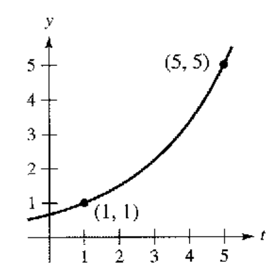
En los ejercicios 21 a 24, escribir y resolver la ecuación diferencial que modele el enunciado verbal. Evaluar la solución en los valores específicos de la variable independiente.

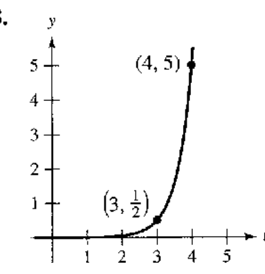
21. El ritmo o velocidad de cambio de y es proporcional a y. Cuando $x = 0$, $y = 4$ y cuando $x = 3$, $y = 10$. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 6$?
22. El ritmo o velocidad de cambio de N es proporcional a N. Cuando $t = 0$, $N = 250$ y cuando $t = 1$, $N = 400$. ¿Cuál es el valor de N cuando $t = 4$?
23. El ritmo o velocidad de cambio de V es proporcional a V. Cuando $t = 0$, $V = 20\,000$ y cuando $t = 4$, $N = 12\,500$. ¿Cuál es el valor de V cuando $t = 6$?
24. El ritmo o velocidad de cambio de P es proporcional a P. Cuando $t = 0$, $P = 5\,000$ y cuando $t = 1$, $P = 4\,750$. ¿Cuál es el valor de P cuando $t = 5$?

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pase a través de los dos puntos dados.

25.


26.


27.


28.


Desarrollo de conceptos

29. Describir qué representan los valores de C y k en el modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial, $y = Ce^{kt}$.
30. Proporcionar una ecuación diferencial que modele el crecimiento y decrecimiento exponencial.

En los ejercicios 31 y 32, determinar los cuadrantes en los cuales la solución de la ecuación diferencial es una función creciente. Explicar. (No resolver la ecuación diferencial.)

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}xy$
32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2y$

Desintegración radiactiva **En los ejercicios 33 a 40, completar la tabla de los isótopos radiactivos.**

	Isótopo	*Semivida o vida media (en años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1 000 años*	*Cantidad después de 10 000 años*
33.	^{226}Ra	1 599	10 g		
34.	^{226}Ra	1 599		1.5 g	
35.	^{226}Ra	1 599			0.5 g
36.	^{14}C	5 715			2 g
37.	^{14}C	5 715	5 g		
38.	^{14}C	5 715		3.2 g	
39.	^{239}Pu	24 100		2.1 g	
40.	^{239}Pu	24 100			0.4 g

41. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una semivida o vida media de aproximadamente 1 599 años. ¿Qué porcentaje de una cantidad dada permanece después de 100 años?

42. ***Datación mediante carbono 14*** La datación por carbono 14 supone que el contenido de dióxido de carbono sobre la Tierra hoy tiene el mismo contenido radiactivo que el de hace siglos. Si esto es cierto, la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que creció hace varios siglos debe tener la misma cantidad de ^{14}C absorbida por un árbol que crece hoy. Una pieza de carbón viejo contiene sólo 15% de la cantidad de carbono de una pieza de carbón actual. ¿Hace cuánto tiempo fue quemado el árbol para formar la pieza antigua de leño? (La vida media del ^{14}C es 5 715 años.)

Interés compuesto **En los ejercicios 43 a 48, completar la tabla para una cuenta de ahorros en la que se tiene un interés continuo.**

	Inversión inicial	*Tasa anual*	*Tiempo para duplicar*	*Cantidad después de 10 años*
43.	\$1 000	6%		
44.	\$20 000	$5\frac{1}{2}\%$		
45.	\$750		$7\frac{3}{4}$ años	
46.	\$10 000		5 años	
47.	\$500			\$1 292.85
48.	\$2 000			\$5 436.56

Interés compuesto **En los ejercicios 49 a 52, encontrar el capital principal P que debe invertirse a una tasa r, a un interés mensual compuesto, tal que \$500 000 garanticen la jubilación en t años.**

49. $r = 7\frac{1}{2}\%, \quad t = 20$ **50.** $r = 6\%, \quad t = 40$

51. $r = 8\%, \quad t = 35$ **52.** $r = 9\%, \quad t = 25$

Interés compuesto **En los ejercicios 53 a 56, encontrar el tiempo necesario para que \$1 000 se dupliquen si se invierten a una tasa de r compuesta *a*) anual, *b*) mensual, *c*) diaria y *d*) continua.**

53. $r = 7\%$ **54.** $r = 6\%$

55. $r = 8.5\%$ **56.** $r = 5.5\%$

Población **En los ejercicios 57 a 60, se dan la población (en millones) de un país en 2001 y el ritmo o velocidad de cambio continua anual especulada k de la población para los años 2000 a 2010. (*Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base.*)**

a) **Encontrar el modelo de crecimiento exponencial $P = Ce^{kt}$ de la población con $t = 0$ correspondiendo a 2000.**

b) **Usar el modelo para predecir la población del país en 2015.**

c) **Discutir la relación entre el signo de k y el cambio en la población para el país.**

	País	*Población de 2001*	*k*
57.	Bulgaria	7.7	−0.009
58.	Camboya	12.7	0.018
59.	Jordania	5.2	0.026
60.	Lituania	3.6	−0.002

61. ***Modelo matemático*** **Sea un cultivo con una cantidad inicial de cien bacterias y N el número de bacterias que se cuentan cada hora durante 5 horas. Los resultados se muestran en la tabla, donde t es el tiempo en horas.**

t	0	1	2	3	4	5
N	100	126	151	198	243	297

a) Usar la función de regresión de una calculadora para encontrar un modelo exponencial para los datos.

b) Usar el modelo para estimar el tiempo requerido para que la población se cuadriplique.

62. ***Crecimiento de bacterias*** El número de bacterias en un cultivo se incrementó acorde a la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 horas se tienen 125 bacterias en el cultivo y 350 bacterias después de 4 horas.

a) Encontrar la población inicial.

b) Escribir un modelo de crecimiento exponencial de la población bacteriana. Sea t el tiempo en horas.

c) Usar el modelo para determinar el número de bacterias después de 8 horas.

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias será de 25 000?

63. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una fábrica ha calculado que un trabajador puede producir más de 30 unidades en un día. La curva de aprendizaje del número N de unidades producidos por día después de que un nuevo empleado haya trabajado t días es $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un trabajador produce 19 unidades.

a) Encontrar la curva de aprendizaje de este trabajador.

b) ¿Cuántos días pasarían antes de que este trabajador produzca 25 unidades por día?

64. ***Curva de aprendizaje*** Si en el ejercicio 63 el gerente requiere que un nuevo empleado produzca al menos 20 unidades por día después de 30 días en el trabajo, encuentre *a*) la curva de aprendizaje que describe este requisito mínimo y *b*) días necesarios antes de que un trabajador produzca, como mínimo, 25 unidades por día.

65. ***Análisis de datos*** La tabla muestra la población P (en millones) de Estados Unidos desde 1960 hasta 2000. (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

Año	1960	1970	1980	1990	2000
Población, P	181	205	228	250	282

a) Usar los datos de 1960 y 1970 para encontrar un modelo exponencial P_1 para los datos. Considerar $t = 0$ a 1960.
b) Usar un método gráfico de computadora para representar un modelo exponencial P_2 para los datos. Considerar $t = 0$ a 1960.
c) Usar un método gráfico de computadora para trazar los datos así como ambos modelos. Comparar el dato real con las predicciones. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
d) Estimar cuándo la población será de 320 millones.

66. ***Análisis de datos*** La tabla muestra los ingresos netos y las cantidades necesarias para satisfacer la deuda nacional (fondos de garantía de los intereses adeudados por la Tesorería) de Estados Unidos desde 1992 hasta 2001. Las cantidades monetarias se dan en miles de millones de dólares. (*Fuente: U. S. Office of Management and Budget.*)

Año	1992	1993	1994	1995	1996
Ingresos	1 091.3	1 154.4	1 258.6	1 351.8	1 453.1
Intereses	292.3	292.5	296.3	332.4	343.9

Año	1997	1998	1999	2000	2001
Ingresos	1 579.3	1 721.8	1 827.5	2 025.2	1 991.2
Intereses	355.8	363.8	353.5	361.9	359.5

a) Usar la capacidad de regresión de una calculadora para encontrar un modelo exponencial R para los ingresos y un modelo cuártico I para la cantidad necesaria para satisfacer la deuda. Considerar t como el tiempo en años, con $t = 2$ que corresponde a 1992.
b) Usar un método gráfico para trazar los puntos correspondientes a los ingresos, y trazar el correspondiente modelo. Con base en el modelo, ¿cuál es la tasa de crecimiento continuo de los ingresos?
c) Usar un método gráfico para representar los puntos que corresponden a la cantidad necesaria para satisfacer la deuda, y trazar el modelo cuártico.
d) Encontrar una función $P(t)$ que aproxime el porcentaje de los ingresos, y gráfica del modelo cuártico. Usar un método gráfico para representar esta función.

67. ***Intensidad del sonido*** El nivel del sonido β (en decibeles), con una intensidad de I es

$$\beta(I) = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es una intensidad de 10^{-16} watts por centímetro cuadrado, que corresponde a la intensidad del sonido más débil que se puede escuchar. Determinar $\beta(I)$ para

a) $I = 10^{-14}$ watts por centímetro cuadrado (susurro)
b) $I = 10^{-9}$ watts por centímetro cuadrado (esquina de calle ruidosa)
c) $I = 10^{-6.5}$ watts por centímetro cuadrado (golpe de martillo)
d) $I = 10^{-4}$ watts por centímetro cuadrado (umbral de dolor)

68. ***Nivel de ruido*** Con la instalación de materiales de aislamiento sonoro, el nivel de ruido en un auditorio se redujo de 93 a 80 decibeles. Usar la función exponencial del ejercicio 67 para encontrar el porcentaje de decrecimiento en el nivel de intensidad del ruido como un resultado de la instalación de esos materiales.

69. ***Silvicultura*** El valor de un terreno de árboles maderables es

$$V(t) = 100\,000e^{0.8\sqrt{t}}$$

donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1998. Si el dinero gana intereses continuamente de 10%, el actual valor del bosque maderero en cualquier tiempo t es $A(t) = V(t)\, e^{-0.10t}$. Encontrar el año en el cual el bosque se talará para maximizar la presente función valor.

70. ***Intensidad del terremoto*** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10}$$

donde I_0 es la intensidad mínima usada como comparación. Suponer que $I_0 = 1$.

a) Encontrar la intensidad del terremoto de San Francisco en 1906 ($R = 8.3$).
b) Encontrar el factor para el cual la intensidad aumente si la medida en la escala Richter es el doble.
c) Encontrar dR/dI.

71. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Cuando un objeto se extrae del horno y se coloca en un entorno con una temperatura constante de 80° F, la temperatura en el centro es 1 500° F. Una hora después de extraerlo, la temperatura del centro es 1 120° F. Encontrar la temperatura del centro 5 horas después de extraer el objeto del horno.

72. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Un contenedor de líquido caliente se coloca un congelador que se mantiene a una temperatura constante de 20° F. La temperatura inicial del líquido es 160° F. Después de 5 minutos, la temperatura del líquido es 60° F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que su temperatura disminuya a 30° F?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 73 a 76, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

73. En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es constante.

74. En el crecimiento lineal, la tasa de crecimiento es constante.

75. Si los precios aumentan a una tasa de 0.5% mensual, entonces éstos aumentan a una tasa de 6% por año.

76. El modelo exponencial de la ecuación diferencial de crecimiento es $dy/dx = ky$, donde k es una constante.

Sección 6.3 Separación de variables y la ecuación logística

- **Reconocer y resolver las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante separación de variables.**
- **Reconocer y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.**
- **Usar ecuaciones diferenciales para modelar y resolver problemas de aplicación.**
- **Resolver y analizar las ecuaciones diferenciales logísticas.**

Separación de variables

Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0$$

donde M es una función continua de x sola y N es una función continua de y sola. Como se observó en la sección anterior, para este tipo de ecuación, todos los términos x se pueden agrupar con dx y todos los de y con dy, y puede obtener una solución por integración. Tales ecuaciones se dice que son **separables**, y el procedimiento de solución se denomina *separación de variables*. Abajo se muestran algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que son separables.

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separables*
$x^2 + 3y\dfrac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2\,dx$
$(\operatorname{sen} x)y' = \cos x$	$dy = \cot x\,dx$
$\dfrac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\dfrac{1}{e^y + 1}\,dy = \dfrac{2}{x}\,dx$

EJEMPLO 1 Separación de variables

Encontrar la solución general de $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx}=xy$.

Solución Para iniciar, observar que $y = 0$ es una solución. Para encontrar otras soluciones, suponer que $y \neq 0$ y separar las variables como se muestra.

$$(x^2 + 4)\,dy = xy\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Separar variables.}$$

Ahora, integrar para obtener

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2 + 4} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}.$$

Dado que $y = 0$ es también una solución, se puede escribir la solución general como

$$y = C\sqrt{x^2 + 4}. \qquad \text{Solución general.}$$

NOTA Asegurarse de verificar las soluciones de este capítulo. En el ejemplo 1, se debe verificar la solución $y = C\sqrt{x^2 + 4}$ por derivación y sustitución en la ecuación original.

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$(x^2 + 4)\frac{Cx}{\sqrt{x^2 + 4}} \stackrel{?}{=} x\left(C\sqrt{x^2 + 4}\right)$$

$$Cx\sqrt{x^2 + 4} = Cx\sqrt{x^2 + 4}$$

Así, la solución concuerda.

En algunos casos, no es factible escribir la solución general en la forma explícita $y = f(x)$. El siguiente ejemplo ilustra tal situación. La derivación implícita se puede usar para verificar esta solución.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para un ejemplo (de ingeniería) de una ecuación diferencial que es separable, ver el artículo "Designing a Rose Cutter", de J. S. Hartzler en *The College Mathematics Journal.*

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la condición inicial $y(0) = 1$, encontrar la solución particular de la ecuación

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy = 0.$$

Solución Notar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, pero esta solución no satisface la condición inicial. Así, se puede suponer que $y \neq 0$. Para separar variables, se debe despejar el primer término de y y el segundo término de e^{-x^2}. Así, se debe multiplicar por e^{x^2}/y y obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= 0 \\ e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= -xy\,dx \\ \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy &= \int -xe^{x^2}\,dx \\ \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = 1$, se tiene $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$, lo cual implica que $C = 1$. Así, la solución particular tiene la forma implícita

$$\frac{y^2}{2} - \ln|y| = -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1$$

$$y^2 - \ln y^2 + e^{x^2} = 2.$$

Se puede verificar esto derivando y reescribiendo para obtener la ecuación original.

EJEMPLO 3 Encontrar una curva de solución particular

Encontrar la ecuación de la curva que pasa a través del punto (1, 3) y tiene pendiente de y/x^2 en cualquier punto (x, y).

Solución Dado que la pendiente de la curva está dada por y/x^2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

Con la condición inicial $y(1) = 3$. Separando las variables e integrándolas se tiene

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x^2}, \quad y \neq 0$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C_1$$

$$y = e^{-(1/x)+C_1} = Ce^{\ 1/x}.$$

Dado que $y = 3$ cuando $x = 1$, se sigue que $3 = Ce^{-1}$ y $C = 3e$. Así, la ecuación de la curva especificada es

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x},\ x > 0.$$

Ver la figura 6.12.

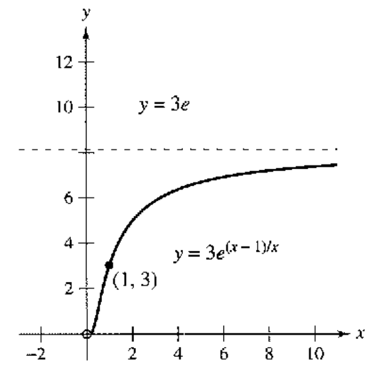


Figura 6.12

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables en x y y se pueden separar por un cambio de variables. El caso de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$, donde f es una **función homogénea**. La función dada por $f(x, y)$ es **homogénea de grado n** si

NOTA La notación $f(x, y)$ se usó para denotar una función de dos variables de la misma forma como $f(x)$ denota una función de una variable. Se estudiarán funciones de dos variables a detalle en el capítulo 13.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$ Función homogénea de grado n.

donde n es un número real.

EJEMPLO 4 Verificar funciones homogéneas

a) $f(x, y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) - 4(tx)^3 + 3(tx)(ty)^2 \\ &= t^3(x^2y) - t^3(4x^3) + t^3(3xy^2) \\ &= t^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2) \\ &= t^3 f(x, y). \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = xe^{x/y} + y \operatorname{sen}(y/x)$ es una función homogénea de grado 1 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= txe^{tx/ty} + ty \operatorname{sen} \frac{ty}{tx} \\ &= t\left(xe^{x/y} + y \operatorname{sen} \frac{y}{x}\right) \\ &= tf(x, y). \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x + y^2$ *no* es una función homogénea dado que

$$f(tx, ty) = tx + t^2y^2 = t(x + ty^2) \neq t^n(x + y^2).$$

d) $f(x, y) = x/y$ es una función homogénea de grado 0 dado que

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y}.$$

Definición de ecuación diferencial homogénea

Una **ecuación diferencial homogénea** es una ecuación de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

EJEMPLO 5 Prueba para ecuaciones diferenciales homogéneas

a) $(x^2 + xy)\,dx + y^2\,dy = 0$ es homogénea de grado 2.

b) $x^3\,dx = y^3\,dy$ es homogénea de grado 3.

c) $(x^2 + 1)\,dx + y^2\,dy = 0$ *no* es una ecuación diferencial homogénea.

Para resolver una ecuación diferencial homogénea por el método de separación de variables, usar el siguiente teorema de cambio de variables.

TEOREMA 6.2 Cambio de variables para ecuaciones homogéneas

Si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea, entonces se puede transformar en una ecuación diferencial cuyas variables son separables por la sustitución

$$y = vx$$

donde v es una función derivable de x.

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación diferencial homogénea

Encontrar la solución general de

$$(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$$

AYUDA DE ESTUDIO La sustitución $y = vx$ llevará una ecuación diferencial que es separable con respecto a las variables x y v. Se debe escribir su solución final, sin embargo, en términos de x y y.

Solución Dado que $(x^2 - y^2)$ y $3xy$ son homogéneas de grado 2, usar $y = vx$ para obtener $dy = x\,dv + v\,dx$. Entonces, por sustitución, se tiene

$$\begin{aligned}
(x^2 - v^2x^2)\,dx + 3x(vx)\overbrace{(x\,dv + v\,dx)}^{dy} &= 0\\
(x^2 + 2v^2x^2)\,dx + 3x^3v\,dv &= 0\\
x^2(1 + 2v^2)\,dx + x^2(3vx)\,dv &= 0.
\end{aligned}$$

Al dividir entre x^2 y separar variables, se produce

$$\begin{aligned}
(1 + 2v^2)\,dx &= -3vx\,dv\\
\int\frac{dx}{x} &= \int\frac{-3v}{1 + 2v^2}\,dv\\
\ln|x| &= -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1\\
4\ln|x| &= -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C|\\
\ln x^4 &= \ln|C(1 + 2v^2)^{-3}|\\
x^4 &= C(1 + 2v^2)^{-3}.
\end{aligned}$$

Al sustituir por v se produce la siguiente solución general.

$$\begin{aligned}
x^4 &= C\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3}\\
\left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)^3 x^4 &= C\\
(x^2 + 2y^2)^3 &= Cx^2 \qquad \text{Solución general.}
\end{aligned}$$

Se puede verificar esto al derivar y reescribir para obtener la ecuación original.

Soluciones generales de $(x^2 + y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$
Figura 6.13

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a una calculadora para hacer gráficas, represente varias soluciones para el ejemplo 6. La figura 6.13 muestra las gráficas de

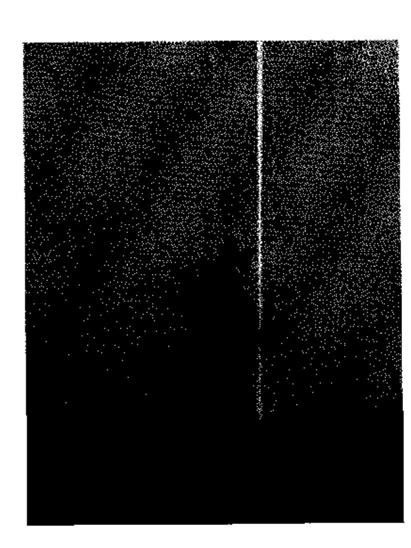
$$(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

para $C = 1, 2, 3$ y 4.

Aplicaciones

EJEMPLO 7 Población salvaje

El ritmo o velocidad de cambio del número de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población es 300, y cuando $t = 2$, la población se incrementó a 500. Encontrar la población cuando $t = 3$.



Solución Dado que el ritmo o velocidad de cambio de la población es proporcional a $650 - N(t)$, se puede escribir la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = k(650 - N)$$

Se puede resolver esta ecuación diferencial por separación de variables.

$$dN = k(650 - N)\,dt \qquad \text{Forma diferencial.}$$
$$\frac{dN}{650 - N} = k\,dt \qquad \text{Variables separables.}$$
$$-\ln|650 - N| = kt + C_1 \qquad \text{Integrar.}$$
$$\ln|650 - N| = -kt - C_1$$
$$650 - N = e^{-kt - C_1} \qquad \text{Suponer } N < 650.$$
$$N = 650 - Ce^{-kt} \qquad \text{Solución general.}$$

Si se usa $N = 300$ cuando $t = 0$, se puede concluir que $C = 350$, lo cual produce

$$N = 650 - 350e^{-kt}$$

Entonces, mediante el valor de $N = 500$ cuando $t = 2$, se sigue que

$$500 = 650 - 350e^{-2k} \implies e^{-2k} = \frac{3}{7} \implies k \approx 0.4236.$$

Así, el modelo para la población de coyotes es

$$N = 650 - 350e^{-0.4236t} \qquad \text{Modelo para la población.}$$

Cuando $t = 3$, se puede aproximar la población a

$$N = 650 - 350e^{-0.4236(3)} \approx 552 \text{ coyotes}$$

El modelo para la población se muestra en la figura 6.14.

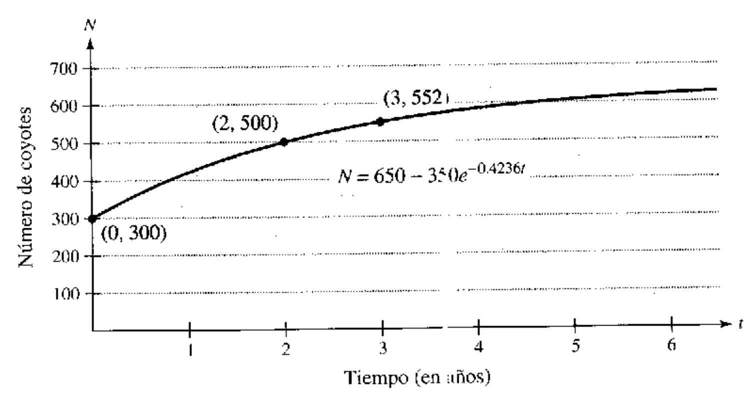
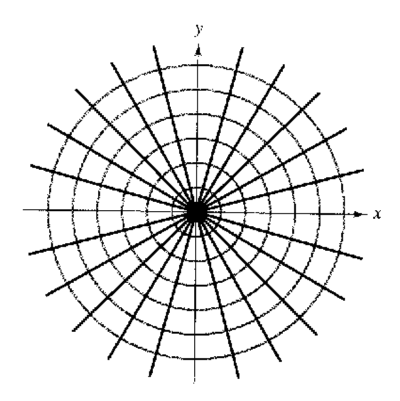


Figura 6.14



Cada recta $y = Kx$ es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias
Figura 6.15

Un problema común en electrostática, termodinámica e hidrodinámica involucra encontrar una familia de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los miembros de una familia de curvas dada. Por ejemplo, la figura 6.15 muestra una familia de circunferencia

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{Familia de circunferencias.}$$

cada una de las cuales interseca las rectas en la familia

$$y = Kx \qquad \text{Familia de rectas.}$$

en ángulos rectos. Esas dos familias de curvas se dice que son **mutuamente ortogonales**, y cada curva en una de las familias se denomina como una **trayectoria ortogonal** de las otras familias. En electrostática, las líneas de fuerzas son ortogonales a las *curvas equipotenciales*. En termodinámica, el flujo de calor que atraviesa una superficie plana es ortogonal a las *curvas isotérmicas*. En hidrodinámica, las líneas de flujo (corriente) son trayectorias ortogonales a las *curvas de potencial de velocidad*.

EJEMPLO 8 Trayectorias ortogonales

Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por

$$y = \frac{C}{x}$$

para $C \neq 0$. Trazar la gráfica para varios miembros de cada familia.

Solución Primero, resolver la ecuación dada para C y escribir $xy = C$. Entonces, por derivación implícita con respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

$$xy' + y = 0 \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \qquad \text{Pendiente de familia dada.}$$

Dado que y' representa la pendiente de la familia de curvas dada en (x, y), se sigue que la familia ortogonal tiene la pendiente recíproca negativa x/y. Así,

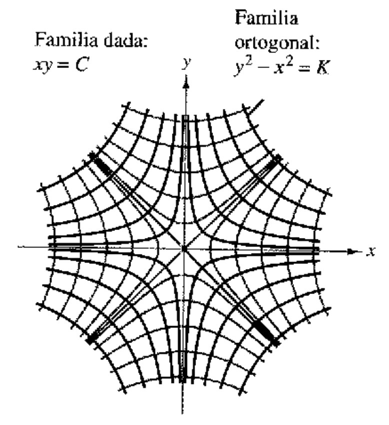
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \qquad \text{Pendiente de familia ortogonal.}$$

Ahora se puede encontrar la familia ortogonal por separación de variables e integrando.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = K$$

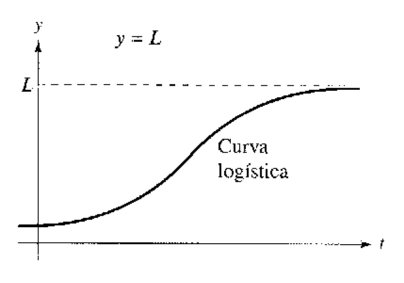


Trayectoria ortogonal
Figura 6.16

Los centros están en el origen y los ejes transversales son verticales para $K > 0$ y horizontales para $K < 0$. Si $K = 0$, las trayectorias ortogonales son las líneas $y = \pm x$. Si $K \neq 0$, las trayectorias ortogonales son hipérbolas. Varias trayectorias se muestran en la figura 6.16.

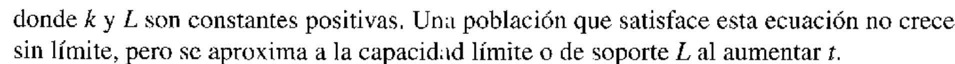
Ecuación diferencial logística

En la sección 6.2, el modelo de crecimiento exponencial se deriva del hecho de que el ritmo o velocidad de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Se observó que la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ tiene la solución general $y = Ce^{kt}$. El crecimiento exponencial es ilimitado, pero cuando describe una población, con frecuencia existe algún límite superior L más allá del cual no puede haber crecimiento. El límite superior L se denomina **capacidad límite o de soporte**, la cual es la máxima población $y(t)$ que se puede sostener o soportar a medida que se incrementa el tiempo t. Un modelo que con regularidad se usa para este tipo de crecimiento es la **ecuación diferencial logística**



Notar que, como $t \to \infty$, $y \to L$
Figura 6.17

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) \qquad \text{Ecuación diferencial logística.}$$



donde k y L son constantes positivas. Una población que satisface esta ecuación no crece sin límite, pero se aproxima a la capacidad límite o de soporte L al aumentar t.

De la ecuación, se puede observar que si y está entre 0 y la capacidad límite o de soporte L, entonces $dy/dt > 0$, y la población se incrementa. Si k es mayor que L, entonces $dy/dt < 0$, y la población decrece. La gráfica de la función y se denomina *curva logística*, como se muestra en la figura 6.17.

EJEMPLO 9 Obtención de la solución general

Resolver la ecuación diferencial logística $\dfrac{dy}{dt} = ky\left(1 - \dfrac{y}{L}\right)$.

Solución Empezar por separar variables.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) \qquad \text{Escribir la ecuación diferencial.}$$

$$\frac{1}{y(1 - y/L)}dy = kdt \qquad \text{Variables separables.}$$

$$\int \frac{1}{y(1 - y/L)}dy = \int kdt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L - y}\right)dy = \int kdt \qquad \text{Reescribir el primer miembro mediante fracciones parciales.}$$

$$\ln|y| - \ln|L - y| = kt + C \qquad \text{Encontrar la antiderivada de cada miembro.}$$

$$\ln\left|\frac{L - y}{y}\right| = -kt - C \qquad \text{Multiplicar cada miembro por } -1 \text{ y simplificar.}$$

$$\left|\frac{L - y}{y}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt} \qquad \text{Tomar exponenciales en cada miembro.}$$

$$\frac{L - y}{y} = be^{-kt} \qquad \text{Sea } \pm e^{-C} = b.$$

Al resolver esta ecuación para y se produce $y = \dfrac{L}{1 + be^{-kt}}$

Exploración

Usar un método gráfico de computadora para investigar los efectos de los valores de L, b y k sobre la gráfica de

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

Incluir algunos ejemplos para justificar los resultados.

Del ejemplo 9, se puede concluir que todas las soluciones de la ecuación diferencial logística son de la forma

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

EJEMPLO 10 Solución de una ecuación diferencial logística

John Edwards/Getty Images

Una comisión estatal libera 40 alces en una zona de refugio. Después de 5 años, la población de alces es de 104. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4 000 alces. La tasa de crecimiento de la población de alces p es

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right), \quad 40 \le p \le 4\,000$$

donde t es el número de años.

a) Escribir un modelo para la población de alces en términos de t.
b) Representar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y la solución que pasa a través del punto (0, 40).
c) Usar el modelo para estimar la población de alces después de 15 años.
d) Encontrar el límite del modelo cuando $t \to \infty$.

Solución

a) Se sabe que $L = 4\,000$. Así, la solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$p = \frac{4\,000}{1 + be^{-kt}}.$$

Explicar qué sucede si $p(0) = L$.

Dado que $p(0) = 40$, se puede resolver para b como se muestra.

$$40 = \frac{4\,000}{1 + be^{-k(0)}}$$

$$40 = \frac{4\,000}{1 + b} \implies b = 99$$

Entonces, dado que $p = 104$ cuando $t = 5$, se puede resolver para k.

$$104 = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-k(5)}} \implies k \approx 0.194$$

Así, un modelo para la población de alces está dada por $p = \dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$.

b) Utilizando una calculadora para hacer gráficas, se puede representar el campo de pendientes de

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right)$$

y la solución que pasa a través de (0, 40) se muestra en la figura 6.18.

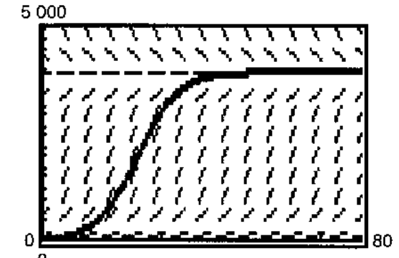


Figura 6.18

c) Para estimar la población de alces después de 15 años, sustituir 15 en vez de t en el modelo

$$p = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194(15)}} \qquad \text{Sustituir 15 para } t.$$

$$= \frac{4\,000}{1 + 99e^{-2.91}} \approx 626 \qquad \text{Simplificar.}$$

d) Como t se incrementa sin saltos, el denominador de $\dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$ se cierra a 1.

Así, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}} = 4\,000.$

Ejercicios de la sección 6.3

En los ejercicios 1 a 12, encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2}{3y^2}$
3. $\frac{dr}{ds} = 0.05r$
4. $\frac{dr}{ds} = 0.05s$
5. $(2 + x)y' = 3y$
6. $xy' = y$
7. $yy' = \operatorname{sen} x$
8. $yy' = 6\cos(\pi x)$
9. $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' = x$
10. $\sqrt{x^2 - 9}\, y' = 5x$
11. $y \ln x - xy' = 0$
12. $4yy' - 3e^x = 0$

En los ejercicios 13 a 22, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
13.	$yy' - e^x = 0$	$y(0) = 4$
14.	$\sqrt{x} + \sqrt{y}\, y' = 0$	$y(1) = 4$
15.	$y(x + 1) + y' = 0$	$y(-2) = 1$
16.	$2xy' - \ln x^2 = 0$	$y(1) = 2$
17.	$y(1 + x^2)y' - x(1 + y^2) = 0$	$y(0) = \sqrt{3}$
18.	$y\sqrt{1 - x^2}\, y' - x\sqrt{1 - y^2} = 0$	$y(0) = 1$
19.	$\frac{du}{dv} = uv \operatorname{sen} v^2$	$u(0) = 1$
20.	$\frac{dr}{ds} = e^{r-2s}$	$r(0) = 0$
21.	$dP - kP\, dt = 0$	$P(0) = P_0$
22.	$dT + k(T - 70)\, dt = 0$	$T(0) = 140$

En los ejercicios 23 y 24, encontrar una ecuación para las gráficas que pasen por los puntos y tengan la pendiente dada.

23. $(1, 1), \quad y' = -\frac{9x}{16y}$
24. $(8, 2), \quad y' = \frac{2y}{3x}$

En los ejercicios 25 y 26, encontrar todas las funciones f que tienen la propiedad indicada.

25. La tangente de la gráfica de f en el punto (x, y) en intersección con el eje x en $(x + 2, 0)$.
26. Todas las tangentes de la gráfica de f que pasan a través del origen.

En los ejercicios 27 a 34, determinar si la función es homogénea y, si lo es, determinar su grado.

27. $f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^3$
28. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 - 2y^2$
29. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
30. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
31. $f(x, y) = 2 \ln xy$
32. $f(x, y) = \tan(x + y)$
33. $f(x, y) = 2 \ln \frac{x}{y}$
34. $f(x, y) = \tan \frac{y}{x}$

En los ejercicios 35 a 40, resolver la ecuación diferencial homogénea.

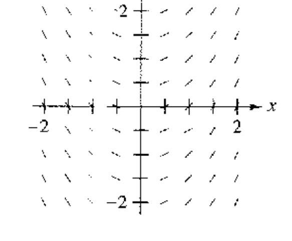
35. $y' = \frac{x + y}{2x}$
36. $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$
37. $y' = \frac{x - y}{x + y}$
38. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$
39. $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$
40. $y' = \frac{2x + 3y}{x}$

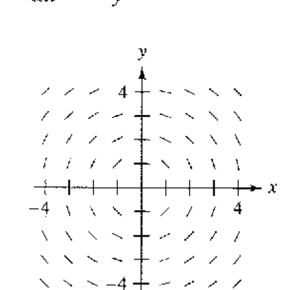
En los ejercicios 41 a 44, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
41.	$x\, dy - (2xe^{-y/x} + y)\, dx = 0$	$y(1) = 0$
42.	$-y^2\, dx + x(x + y)\, dy = 0$	$y(1) = 1$
43.	$\left(x \sec \frac{y}{x} + y\right) dx - x\, dy = 0$	$y(1) = 0$
44.	$(2x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$	$y(1) = 0$

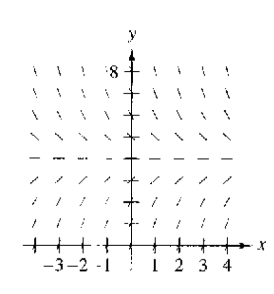
Campos de pendientes **En los ejercicios 45 a 48, representar algunas soluciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y entonces encontrar la solución general analíticamente.**

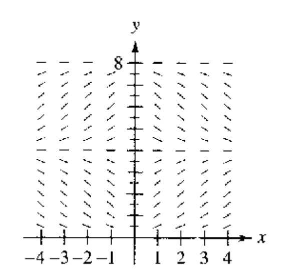
45. $\frac{dy}{dx} = x$
46. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$





47. $\frac{dy}{dx} = 4 - y$
48. $\frac{dy}{dx} = 0.25x(4 - y)$





Método de Euler **En los ejercicios 49 a 52, *a*) usar el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 0.1$ para aproximar la solución particular del problema de valor inicial en un valor de x dado, *b*) encontrar analíticamente la solución exacta de la ecuación diferencial y *c*) comparar las soluciones en los valores de x dados.**

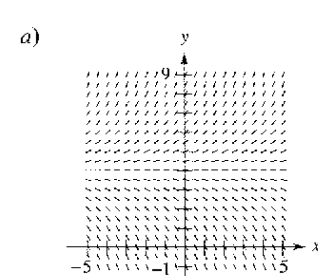
	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Valor x*
49.	$\frac{dy}{dx} = -6xy$	$(0, 5)$	$x = 1$
50.	$\frac{dy}{dx} + 6xy^2 = 0$	$(0, 3)$	$x = 1$
51.	$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 12}{3y^2 - 4}$	$(1, 2)$	$x = 2$
52.	$\frac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2)$	$(1, 0)$	$x = 1.5$

53. ***Desintegración radiactiva*** La tasa de descomposición de radio radiactivo es proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo. La semivida o vida media de radio radiactivo es de 1 599 años. ¿Qué cantidad permanecerá después de 25 años?

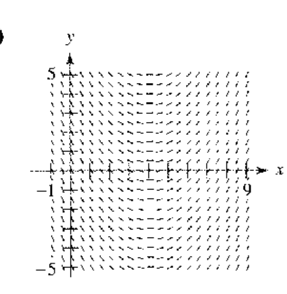
54. ***Reacción química*** En una reacción química, un compuesto se transforma en otro a una tasa proporcional a la cantidad no cambiada. Si inicialmente existen 20 gramos del compuesto original, y permanecen 16 gramos después de 1 hora, ¿cuándo se transformará 75% del compuesto?

Campos de pendientes **En los ejercicios 55 a 58, *a*) escribir una ecuación diferencial para el enunciado, *b*) corresponder la ecuación diferencial con un posible campo de pendientes, y *c*) verificar los resultados mediante un método gráfico de computadora para trazar un campo de pendientes de la ecuación diferencial. [Los campos de pendientes se marcaron con *a*), *b*), *c*) y *d*).]**

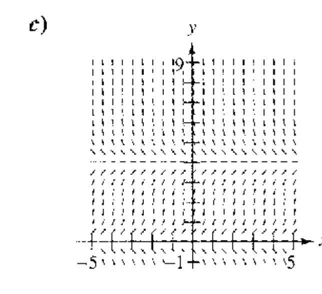
a)



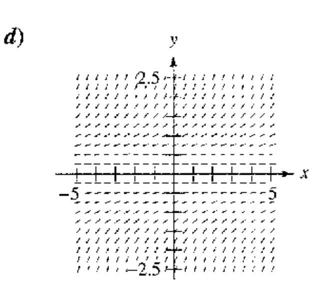
b)



c)



d)



55. El ritmo o velocidad de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre y y 4.

56. El ritmo o velocidad de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre x y 4.

57. El ritmo o velocidad de cambio de y con respecto a x es proporcional al producto de y y la diferencia entre y y 4.

58. El ritmo o velocidad de cambio de y con respecto a x es proporcional a y^2.

59. ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa 60 libras al nacer gana peso a razón de

$$\frac{dw}{dt} = k(1\,200 - w)$$

donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

a) Usar un sistema algebraico de computadora para resolver la ecuación diferencial para $k = 0.8$, 0.9 y 1. Representar las tres soluciones.

b) Si el animal se vende cuando su peso alcanza 800 libras, encontrar el tiempo de venta de cada uno de los modelos en el apartado *a*).

c) ¿Cuál es el peso máximo del animal para cada uno de los modelos?

60. ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa w_0 libras al nacer gana peso a razón de

$$\frac{dw}{dt} = 1\,200 - w$$

donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

En los ejercicios 61 a 66, encontrar las trayectorias ortogonales de la familia. Usar un método gráfico de computadora para obtener varios miembros de cada familia.

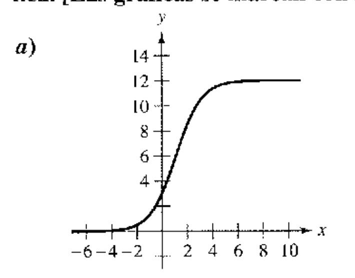
61. $x^2 + y^2 = C$ **62.** $x^2 - 2y^2 = C$

63. $x^2 = Cy$ **64.** $y^2 = 2Cx$

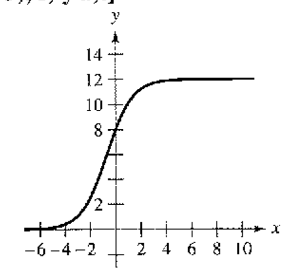
65. $y^2 = Cx^3$ **66.** $y = Ce^x$

En los ejercicios 67 a 70, señalar la ecuación logística con su gráfica. [Las gráficas se marcan con *a*), *b*), *c*) y *d*).]

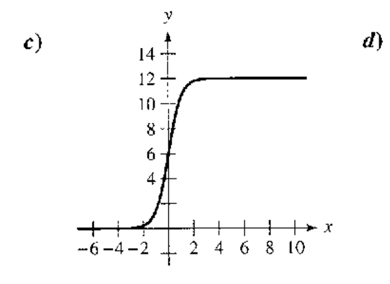
a)



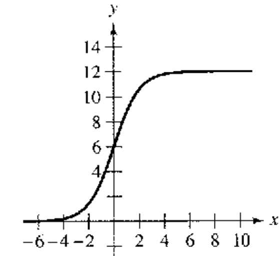
b)



c)



d)



67. $y = \dfrac{12}{1 + e^{-x}}$

68. $y = \dfrac{12}{1 + 3e^{-x}}$

69. $y = \dfrac{12}{1 + \frac{1}{2}e^{-x}}$

70. $y = \dfrac{12}{1 + e^{-2x}}$

En los ejercicios 71 y 72, la ecuación logística modela el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) encontrar la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir una ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

71. $P(t) = \dfrac{1\,500}{1 + 24e^{-0.75t}}$

72. $P(t) = \dfrac{5\,000}{1 + 39e^{-0.2t}}$

En los ejercicios 73 a 74, la ecuación diferencial logística modela la tasa de crecimiento de una población. Usar la ecuación diferencial para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad de soporte, *c*) usar un sistema algebraico de computadora para trazar la gráfica de un campo de pendientes y *d*) determinar el valor de *P* en el cual la tasa del crecimiento de población es el más alto.

73. $\dfrac{dP}{dt} = 3P\left(1 - \dfrac{P}{100}\right)$

74. $\dfrac{dP}{dt} = 0.1P - 0.0004P^2$

En los ejercicios 75 a 78, encontrar la ecuación logística que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
75.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{40}\right)$	(0, 8)
76.	$\dfrac{dy}{dt} = 1.2y\left(1 - \dfrac{y}{8}\right)$	(0, 5)
77.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4y}{5} - \dfrac{y^2}{150}$	(0, 8)
78.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3y}{20} - \dfrac{y^2}{1\,600}$	(0, 15)

79. ***Especies en peligro*** Una organización de conservación libera 25 panteras de Florida en una zona de refugio. Después de 2 años, hay 39 panteras en la zona. El refugio tiene una capacidad límite o de soporte de 200 panteras.

a) Escribir una ecuación logística que modele la población de las panteras en el refugio.

b) Encontrar la población después de 5 años.

c) ¿Cuándo la población será de 100 panteras?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la tasa de crecimiento de la población de las panteras. Entonces repetir el apartado *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con las respuestas exactas.

e) ¿En qué tiempo la población de las panteras crecerá más rápidamente? Explicar.

80. ***Crecimiento de bacterias*** En el tiempo $t = 0$, un cultivo bacteriano pesa 1 gramo. Dos horas después, el cultivo pesa 2 gramos. El peso máximo del cultivo es de 10 gramos.

a) Escribir una ecuación logística que modele el peso del cultivo bacteriano.

b) Encontrar el peso del cultivo después de 5 horas.

c) ¿Cuándo el peso del cultivo será de 8 gramos?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la razón de crecimiento del peso del cultivo. Entonces repetir el apartado *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con los resultados exactos.

e) ¿En qué tiempo se incrementará el peso más rápidamente? Explicar.

Desarrollo de conceptos

81. Describir cómo reconocer y resolver ecuaciones diferenciales que se pueden resolver por separación de variables.

82. Establecer la prueba para determinar si una ecuación diferencial es homogénea. Dar un ejemplo.

83. Describir la relación entre dos familias de curvas que son mutuamente ortogonales.

84. ***Navegación*** Un bote de navegación, que parte del reposo, acelera (dv/dt) a una tasa proporcional a la diferencia entre las velocidades del viento y el bote, se ignora la resistencia del aire.

a) El viento sopla a 20 nudos, y después de 1 minuto el bote se mueve a 5 nudos. Escribir la velocidad v como función del tiempo t.

b) Usar el resultado del apartado *a*) para escribir la distancia que se desplazó el bote como función del tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 85 a 88, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

85. La función $y = 0$ es siempre una solución de una ecuación diferencial que puede resolverse por separación de variables.

86. La ecuación diferencial $y' = xy - 2y + x - 2$ se puede escribir en forma de variables separadas.

87. La función $f(x, y) = x^2 + xy + 2$ es homogénea.

88. Las familias $x^2 + y^2 = 2Cy$ y $x^2 + y^2 = 2Kx$ son mutuamente ortogonales.

89. Demostrar que si $x = \dfrac{1}{1 + be^{-kt}}$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = ky(1 - y)$.

Preparación del examen Putman

90. En un error de cálculo muy común, se cree que la regla del producto para derivadas dice que $(fg)' = f'g'$. Si $f(x) = e^{x^2}$, determinar, con prueba, si existe un intervalo abierto (a, b) y una función distinta de cero g definida en (a, b) tal que esta regla errónea del producto sea verdadera para x en (a, b).

Sección 6.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

- **Resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.**
- **Resolver una ecuación diferencial de Bernoulli.**
- **Usar ecuaciones diferenciales lineales para resolver problemas de aplicación.**

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta sección se estudiará cómo resolver una clase muy importante de ecuaciones diferenciales de primer orden: las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Definición de ecuación diferencial lineal de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas de x. Esta ecuación diferencial lineal de primer orden se dice que es de la **forma normal**.

NOTA Es útil ver por qué el factor integrante ayuda a resolver una ecuación diferencial lineal de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$. Cuando ambos miembros de la ecuación se multiplican por el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$, el primer miembro se convierte en la derivada de un producto.

$$y'e^{\int P(x)\,dx} + P(x)ye^{\int P(x)\,dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$
$$\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right]' = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

Al integrar ambos miembros de la segunda ecuación y dividir entre $u(x)$ se produce la solución general.

Para resolver una ecuación diferencial lineal, hay que escribirla en forma normal para identificar las funciones $P(x)$ y $Q(x)$. Después integrar $P(x)$ y formar la expresión

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} \qquad \text{Factor integrante.}$$

el cual se denomina **factor integrante**. La solución general de la ecuación es

$$y = \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)\,dx. \qquad \text{Solución general.}$$

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial lineal

Encontrar la solución general de

$$y' + y = e^x.$$

Solución

Para esta ecuación, $P(x) = 1$ y $Q(x) = e^x$. Así, el factor integrante es

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)\,dx} && \text{Factor integrante.} \\ &= e^{\int dx} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Esto implica que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)\,dx \\ &= \frac{1}{e^x}\int e^x(e^x)\,dx \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right) \\ &= \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

TEOREMA 6.3 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Un factor integrante para la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

es $u(x) = e^{\int P(x)dx}$. La solución de la ecuación diferencial es

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

ANNA JOHNSON PELL WHEELER (1883-1966)

Anna Johnson Pell Wheeler obtuvo su maestría en la Universidad de Iowa con su tesis *La extensión de la teoría de Galois a ecuaciones diferenciales* en 1904. Influida por David Hilbert, trabajó en ecuaciones diferenciales mientras estudiaba espacios lineales infinitos.

AYUDA DE ESTUDIO Más que memorizar la fórmula del teorema 6.3, basta con recordar que al multiplicar por el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$, se convierte el miembro izquierdo de la ecuación diferencial en la derivada del producto $ye^{\int P(x)dx}$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución de

$$xy' - 2y = x^2.$$

Solución La forma normal de la ecuación dada es

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = x. \qquad \text{Forma normal.}$$

Así, $P(x) = -2/x$, y se tiene

$$\int P(x)\,dx = -\int \frac{2}{x}\,dx$$

$$= -\ln x^2$$

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\ln x^2}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln x^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2}. \qquad \text{Factor integrante.}$$

Así, al multiplicar cada miembro de la forma normal por $1/x^2$ se llega a

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{y}{x^2} = \ln|x| + C$$

$$y = x^2(\ln|x| + C). \qquad \text{Solución general.}$$

En la figura 6.19 se muestran varias curvas solución (para $C = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4).

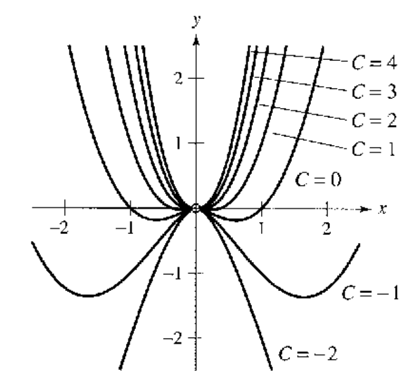


Figura 6.19

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución general de

$$y' - y\tan t = 1, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Solución La ecuación ya está en la forma normal $y' + P(x)y = Q(x)$. Así, $P(t) = -\tan t$, y

$$\int P(t)\,dt = -\int \tan t\,dt = \ln|\cos t|$$

lo cual indica que el factor integrante es

$$\begin{aligned} e^{\int P(t)\,dt} &= e^{\ln|\cos t|} \\ &= |\cos t|. \end{aligned}$$ Factor integrante.

Un rápido examen muestra que $\cos t$ es también un factor integrante. Así, al multiplicar $y' - y\tan t = 1$ por $\cos t$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[y\cos t] &= \cos t \\ y\cos t &= \int \cos t\,dt \\ y\cos t &= \operatorname{sen} t + C \\ y &= \tan t + C\sec t. \end{aligned}$$ Solución general.

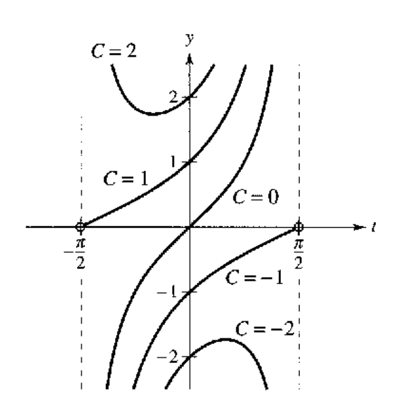


Figura 6.20

Varias curvas solución se muestran en la figura 6.20.

Ecuación de Bernoulli

La también conocida ecuación no lineal que reduce a una lineal con una apropiada sustitución, es la **ecuación de Bernoulli**, llamada así por James Bernoulli (1654-1705).

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$ Ecuación de Bernoulli.

Esta ecuación es lineal si $n = 0$, y tiene variables separadas si $n = 1$. Así, en el siguiente desarrollo, se supone que $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Al multiplicar por y^{-n} y $(1 - n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) \\ (1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \\ \frac{d}{dx}[y^{1-n}] + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \end{aligned}$$

la cual es una ecuación lineal en la variable y^{1-n}. Considerar que $z = y^{1-n}$ produce la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Por último, mediante el teorema 6.3, la *solución general de la ecuación de Bernoulli* es

$$y^{1-n}e^{\int(1-n)P(x)\,dx} = \int (1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,dx}\,dx + C.$$

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación de Bernoulli

Encontrar la solución de

$$y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}.$$

Solución Para esta ecuación de Bernoulli, sea $n = -3$, y usar la sustitución

$$z = y^4 \qquad \text{Sea } z = y^{1-n} = y^{1-(-3)}.$$
$$z' = 4y^3y'. \qquad \text{Derivar.}$$

Al multiplicar la ecuación original por $4y^3$ se produce

$$y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$
$$4y^3y' + 4xy^4 = 4xe^{-x^2} \qquad \text{Multiplicar cada miembro por } 4y^3.$$
$$z' + 4xz = 4xe^{-x^2}. \qquad \text{Ecuación lineal: } z' + P(x)z = Q(x).$$

Esta ecuación es lineal en z. Mediante $P(x) = 4x$ se produce

$$\int P(x)\,dx = \int 4x\,dx$$
$$= 2x^2$$

lo cual implica que e^{2x^2} es un factor integrante. Al multiplicar la ecuación lineal por este factor se produce

$$z' + 4xz = 4xe^{-x^2} \qquad \text{Ecuación lineal.}$$
$$z'e^{2x^2} + 4xze^{2x^2} = 4xe^{x^2} \qquad \text{Multiplicar por el factor integrante.}$$
$$\frac{d}{dx}[ze^{2x^2}] = 4xe^{x^2} \qquad \text{Escribir el miembro izquierdo como una derivada.}$$
$$ze^{2x^2} = \int 4xe^{x^2}\,dx \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$
$$ze^{2x^2} = 2e^{x^2} + C$$
$$z = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. \qquad \text{Dividir cada miembro por } e^{2x^2}.$$

Por último, al sustituir $z = y^4$, la solución general es

$$y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. \qquad \text{Solución general.}$$

Hasta aquí se han estudiado varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. De éstas, el caso de las variables separables es usualmente el más simple, y la solución por factor integrante es ordinariamente usada sólo como último recurso.

Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

Método	*Forma de ecuación*
1. Variables separables:	$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$
2. Homogéneas:	$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, donde M y N son homogéneas de n-ésimo grado
3. Lineal:	$y' + P(x)y = Q(x)$
4. Ecuación de Bernoulli:	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

Aplicaciones

Un tipo de problema que se puede describir en términos de una ecuación diferencial involucra mezclas químicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

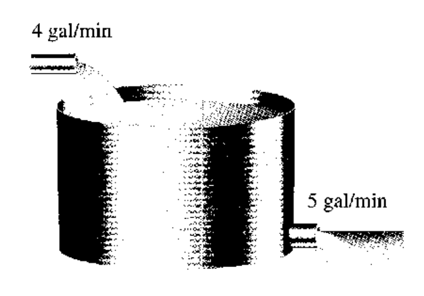


Figura 6.21

EJEMPLO 5 Un problema de mezcla

Un tanque contiene 50 galones de una disolución compuesta por 90% agua y 10% alcohol. Una segunda disolución que contiene 50% agua y 50% alcohol, se agrega al tanque a una tasa de 4 galones por minuto. Conforme se añade la segunda, el tanque empieza a drenar a una tasa de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 6.21. Si se supone que la disolución en el tanque se agita constantemente, ¿cuánto alcohol permanecerá en el tanque después de 10 minutos?

Solución Sea y el número de galones de alcohol en el tanque en cualquier instante t. Se sabe que $y = 5$ cuando $t = 0$. Dado que el número de galones en el tanque en cualquier tiempo es $50 - t$, y que el tanque pierde 5 galones por minuto, se debe perder

$$\left(\frac{5}{50 - t}\right)y$$

galones de alcohol por minuto. Además, ya que el tanque gana 2 galones de alcohol por minuto, el ritmo o velocidad de cambio de alcohol en el tanque está dada por

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50 - t}\right)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50 - t}\right)y = 2.$$

Para resolver esta ecuación lineal, sea $P(t) = 5/(50 - t)$ y se obtiene

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{5}{50 - t}\,dt = -5\ln|50 - t|.$$

Ya que $t < 50$, se puede eliminar el signo del valor absoluto y concluir que

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{-5\ln(50 - t)} = \frac{1}{(50 - t)^5}.$$

Así, la solución general es

$$\frac{y}{(50 - t)^5} = \int \frac{2}{(50 - t)^5}\,dt = \frac{1}{2(50 - t)^4} + C$$

$$y = \frac{50 - t}{2} + C(50 - t)^5.$$

Dado que $y = 5$ cuando $t = 0$, se tiene

$$5 = \frac{50}{2} + C(50)^5 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{20}{50^5} = C$$

lo cual significa que la solución particular es

$$y = \frac{50 - t}{2} - 20\left(\frac{50 - t}{50}\right)^5.$$

Por último, cuando $t = 10$, la cantidad de alcohol en el tanque es

$$y = \frac{50 - 10}{2} - 20\left(\frac{50 - 10}{50}\right)^5 \approx 13.45 \text{ gal}$$

lo cual representa una solución que contiene 33.6% de alcohol.

Hasta ahora en problemas relacionados con la caída de un cuerpo se ha despreciado la resistencia del aire. El siguiente ejemplo incluye este factor. En el ejemplo, la resistencia del aire sobre el objeto que cae se supone proporcional a su velocidad v. Si g es la constante gravitacional, la fuerza descendente F sobre el objeto que cae de masa m se da por medio de la diferencia $mg - kv$. Pero, por la segunda ley de movimiento de Newton, se sabe que

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= m(dv/dt) \end{aligned}$$

Lo cual lleva a la siguiente ecuación diferencial.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

EJEMPLO 6 Un objeto que cae con resistencia al aire

Un objeto de masa m cae desde un helicóptero. Encontrar su velocidad en función del tiempo t, si se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto.

Solución La velocidad v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$$

donde g es la constante gravitatoria y k es la constante de proporcionalidad. Si $b = k/m$, se pueden *separar variables* para obtener

$$\begin{aligned} dv &= (g - bv)\,dt \\ \int \frac{dv}{g - bv} &= \int dt \\ -\frac{1}{b}\ln|g - bv| &= t + C_1 \\ \ln|g - bv| &= -bt - bC_1 \\ g - bv &= Ce^{-bt}. \end{aligned}$$

Dado que el objeto cayó, $v = 0$ cuando $t = 0$; así $g = C$, y se sigue que

$$-bv = -g + ge^{-bt} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{g - ge^{-bt}}{b} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

NOTA Observar en el ejemplo 6 que la velocidad se aproxima al límite mg/k como resultado de la resistencia al aire. Para problemas de objetos que caen y en los que la resistencia al aire es despreciada, la velocidad se incrementa sin límite.

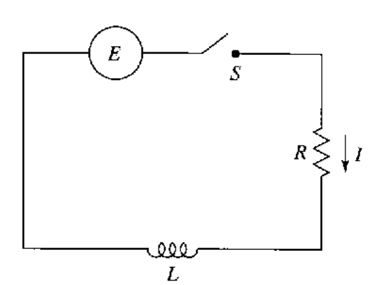


Figura 6.22

Un circuito eléctrico simple consta de una corriente eléctrica I (en amperes), una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys), y una fuerza electromotriz E constante (en volts), como se muestra en la figura 6.22. Con base en la segunda ley de Kirchhoff, si el interruptor S se cierra cuando $t = 0$, la fuerza electromotriz aplicada (voltaje) es igual a la suma de la caída de voltaje en el resto del circuito. De hecho, esto significa que la corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

EJEMPLO 7 Un problema de circuitos eléctricos

Encontrar la corriente I como función del tiempo t (en segundos), dado que I satisface la ecuación diferencial $L(dI/dt) + RI = \text{sen } 2t$, donde R y L son constantes diferentes de cero.

Solución En forma normal, la ecuación lineal dada es

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}\text{sen } 2t.$$

Si $P(t) = R/L$, tal que $e^{\int P(t)\,dt} = e^{(R/L)t}$, y, por el teorema 6.3,

$$Ie^{(R/L)t} = \frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\,\text{sen } 2t\,dt$$

$$= \frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R\,\text{sen } 2t - 2L\cos 2t) + C.$$

Así, la solución general es

$$I = e^{-(R/L)t}\left[\frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R\,\text{sen } 2t - 2L\cos 2t) + C\right]$$

$$I = \frac{1}{4L^2 + R^2}(R\,\text{sen } 2t - 2L\cos 2t) + Ce^{-(R/L)t}.$$

TECNOLOGÍA La integral del ejemplo 7 se encontró mediante un software de álgebra simbólica. Si se tiene acceso a *Derive*, *Maple*, *Mathcad*, *Mathematica*, o al *TI-89*, tratar de usarlo para integrar

$$\frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\,\text{sen } 2t\,dt.$$

En el capítulo 8 se estudiará cómo integrar funciones de ese tipo mediante integración por partes.

Ejercicios de la sección 6.4

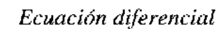
En los ejercicios 1 a 4, determinar si la ecuación diferencial es lineal. Explicar las razones.

1. $x^3y' + xy = e^x + 1$
2. $2xy - y'\ln x = y$
3. $y' + y\cos x = xy^2$
4. $\dfrac{1 - y'}{y} = 3x$

En los ejercicios 5 a 14, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

5. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 3x + 4$
6. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2}{x}\right)y = 3x + 2$
7. $y' - y = 10$
8. $y' + 2xy = 4x$
9. $(y + 1)\cos x\,dx - dy = 0$
10. $(y - 1)\,\text{sen } x\,dx - dy = 0$
11. $(x - 1)y' + y = x^2 - 1$
12. $y' + 3y = e^{3x}$
13. $y' - 3x^2y = e^{x^3}$
14. $y' - y = \cos x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, *a*) representar manualmente una solución gráfica aproximada de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial sobre el campo de pendientes, *b*) encontrar la solución particular que satisface la condición inicial y *c*) usar un método gráfico de computadora para representar la solución particular. Comparar la gráfica con la realizada manualmente en el apartado *a*).**



	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
15.	$\dfrac{dy}{dx} = e^x - y$	$(0, 1)$
16.	$y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \text{sen } x^2$	$(\sqrt{\pi}, 0)$

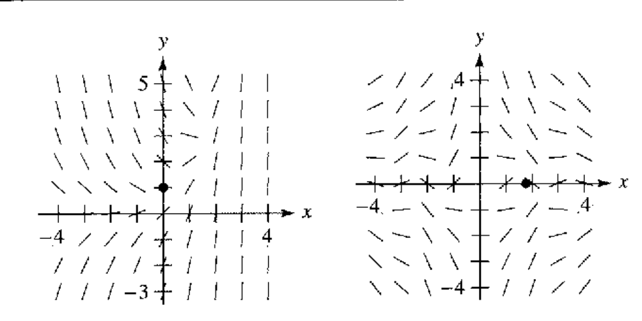


Figura para 15

Figura para 16

En los ejercicios 17 a 24, encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface las condiciones de frontera iniciales especificadas.

	Ecuación diferencial	*Condición límite o de frontera*
17.	$y'\cos^2 x + y - 1 = 0$	$y(0) = 5$
18.	$x^3y' + 2y = e^{1/x^2}$	$y(1) = e$
19.	$y' + y\tan x = \sec x + \cos x$	$y(0) = 1$
20.	$y' + y\sec x = \sec x$	$y(0) = 4$
21.	$y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 0$	$y(2) = 2$
22.	$y' + (2x - 1)y = 0$	$y(1) = 2$
23.	$x\,dy = (x + y + 2)\,dx$	$y(1) = 10$
24.	$2xy' - y = x^3 - x$	$y(4) = 2$

En los ejercicios 25 a 30, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

25. $y' + 3x^2y = x^2y^3$

26. $y' + xy = xy^{-1}$

27. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = xy^2$

28. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = x\sqrt{y}$

29. $y' - y = e^x\sqrt[3]{y}$

30. $yy' - 2y^2 = e^x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 31 a 34,** ***a*)** **usar un método gráfico de computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial,** ***b*)** **encontrar las soluciones particulares de la ecuación diferencial que pasa a través de los puntos dados y** ***c*)** **usar un método gráfico de computadora para representar las soluciones particulares sobre el campo de pendientes.**

	Ecuación diferencial	*Puntos*
31.	$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2$	$(-2, 4), (2, 8)$
32.	$\frac{dy}{dx} + 4x^3y = x^3$	$\left(0, \frac{7}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}\right)$
33.	$\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2$	$(1, 1), (3, -1)$
34.	$\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^2$	$(0, 3), (0, 1)$

35. *Crecimiento de población* Cuando se predice el crecimiento de una población, los demógrafos deben considerar tasa de natalidad y mortalidad (mortandad) así como el cambio neto causado por la diferencia entre las tasas de inmigración y emigración. Sea P la población en un tiempo t y N el incremento neto por unidad de tiempo resultante de la diferencia entre inmigración y emigración. Así, la tasa de crecimiento de la población está dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP + N, \qquad N \text{ es constante.}$$

Resolver esta ecuación diferencial para encontrar P como función del tiempo si en $t = 0$ el tamaño de la oblación es P_0.

36. *Aumento de inversión* Una gran corporación inicia en $t = 0$ a invertir parte de sus ingresos continuamente a una razón de P dólares por año, en un fondo para una futura expansión corporativa. Suponer que el fondo gana r por ciento de interés compuesto continuo por año. Así, la tasa de crecimiento de la cantidad A en el fondo está dada por

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

donde $A = 0$ cuando $t = 0$. Resolver esta ecuación diferencial para A como función de t.

Aumento de inversión **En los ejercicios 37 y 38, usar el resultado del ejercicio 36.**

37. Encontrar A para los siguientes casos.

a) $P = \$100\,000$, $r = 6\%$ y $t = 5$ años
b) $P = \$250\,000$, $r = 5\%$ y $t = 10$ años

38. Encontrar t si la corporación necesita \$800 000 y se pueden invertir \$75 000 por año en un fondo que gana 8% de interés compuesto de forma continua.

39. *Alimentación intravenosa* La glucosa se agrega por vía intravenosa al flujo sanguíneo a una tasa de q unidades por minuto, y el cuerpo elimina glucosa del flujo sanguíneo a una tasa proporcional la cantidad presente. Suponer que $Q(t)$ es la cantidad de glucosa en el flujo sanguíneo en un tiempo t.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe el ritmo o velocidad de cambio de glucosa en el flujo sanguíneo con respecto al tiempo.
b) Resolver la ecuación diferencial del apartado *a*), considerar $Q = Q_0$ cuando $t = 0$.
c) Encontrar el límite de $Q(t)$ cuando $t \to \infty$.

40. *Curva de aprendizaje* El gerente de una empresa ha encontrado que el número máximo de unidades que un trabajador puede producir en un día es 40. La tasa de incremento en el número N de unidades producido con respecto al tiempo t en días por un nuevo empleado, es proporcional a $40 - N$.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe el ritmo o velocidad de cambio con respecto al tiempo.
b) Resolver la ecuación diferencial del apartado *a*).
c) Encontrar la solución particular para un nuevo empleado que produce 10 unidades en el primer día y 19 unidades en el día doce.

Mezcla **En los ejercicios 41 a 46, considerar un tanque que en el tiempo $t = 0$ contiene v_0 galones de una disolución de la cual, por peso, q_0 libras es disolución concentrada. Otra disolución que contiene q libras del concentrado por galón fluye dentro del tanque a una tasa de r_1 galones por minuto. La disolución en el tanque se conserva bien mezclada y está concentrada a una tasa de r_2 galones por minuto.**

41. Si Q es la cantidad de concentrado en la disolución en cualquier tiempo t, demostrar que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r_2Q}{v_0 + (r_1 - r_2)t} = q_1r_1.$$

42. Si Q es la cantidad de concentración en la disolución en cualquier tiempo t, escribir la ecuación diferencial para el ritmo o velocidad de cambio de Q respecto de t si $r_1 = r_2 = r$.

43. Un tanque de 200 galones se llena con una disolución que contiene 25 libras de concentración. Al iniciar en el tiempo $t = 0$, se añade agua destilada en el tanque a una tasa de 10 galones por minuto, y la disolución mezclada se elimina con la misma tasa.

a) Encontrar la cantidad de concentración Q en la disolución como función de t.
b) Encontrar el tiempo en el cual la cantidad de concentración en el tanque alcanza 15 libras.
c) Encontrar la cantidad de concentración en la disolución cuando $t \to \infty$.

44. Repetir el ejercicio 43, si se supone que la disolución entera del tanque contiene 0.04 libras de concentrado por galón.

45. Un tanque de 200 galones está lleno a la mitad de agua destilada. En el tiempo $t = 0$, una solución que contiene 0.5 libras de concentrado por galón entra al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla bien agitada es eliminada a una tasa de 3 galones por minuto.

a) ¿En qué tiempo se llenará el tanque?
b) ¿En el tiempo en que el tanque se llena, cuántas libras de concentrado contendrá?

46. Repetir el ejercicio 45, si se supone que la disolución que entra al tanque contiene 1 libra de concentrado por galón.

Objeto que cae **En los ejercicios 47 y 48, considerar un objeto de ocho libras que cae desde una altura de 5 000 pies, donde la resistencia al aire es proporcional a la velocidad.**

47. Escribir la velocidad en función del tiempo si su velocidad después de 5 segundos es, aproximadamente, 101 pies por segundo. ¿Cuál es el valor limitante de la función velocidad?

48. Usar el resultado del ejercicio 47 para escribir la posición del objeto como función del tiempo. Aproximar la velocidad del objeto cuando éste alcance al suelo.

Circuitos eléctricos **En los ejercicios 49 y 50, usar la ecuación diferencial para circuitos eléctricos dada por**

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

En esta ecuación, I es la corriente, R es la resistencia, L es la inductancia y E es la fuerza electromotriz (voltaje).

49. Resolver la ecuación diferencial dado un voltaje constante E_0.

50. Usar el resultado del ejercicio 49 para encontrar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 120$ volts, $R = 600$ ohms y $L = 4$ henrys. ¿Cuándo alcanzará la corriente 90% de su valor limitante?

Desarrollo de conceptos

51. Se da la forma normal de una ecuación diferencial lineal de primer orden. ¿Cuál es su factor integrante?

52. Se da la forma normal de la ecuación de Bernoulli. Describir cómo ésta se reduce a una ecuación lineal.

En los ejercicios 53 a 56, marcar la ecuación diferencial con su respectiva solución.

	Ecuación diferencial	*Solución*
53.	$y' - 2x = 0$	*a)* $y = Ce^{x^2}$
54.	$y' - 2y = 0$	*b)* $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
55.	$y' - 2xy = 0$	*c)* $y = x^2 + C$
56.	$y' - 2xy = x$	*d)* $y = Ce^{2x}$

En los ejercicios 57 a 68, resolver la ecuación diferencial de primer orden por cualquier método apropiado.

57. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x+y}}{e^{x-y}}$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y(y+2)}$

59. $y\cos x - \cos x + \dfrac{dy}{dx} = 0$

60. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

61. $(3y^2 + 4xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy = 0$

62. $(x + y)\,dx - x\,dy = 0$

63. $(2y - e^x)\,dx + x\,dy = 0$

64. $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

65. $(x^2y^4 - 1)\,dx + x^3y^3\,dy = 0$

66. $y\,dx + (3x + 4y)\,dy = 0$

67. $3(y - 4x^2)\,dx + x\,dy = 0$

68. $x\,dx + (y + e^y)(x^2 + 1)\,dy = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 69 y 70, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué, o dar un contraejemplo.**

69. $y' + x\sqrt{y} = x^2$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

70. $y' + xy = e^xy$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Proyecto de trabajo: Pérdida de peso

El peso de una persona depende tanto del número de calorías consumidas como de la energía utilizada. Además, la cantidad de energía usada depende del peso de una persona; la cantidad media de energía usada por una persona es 17.5 calorías por libra por día. Así, entre mayor peso pierde una persona, es menor la energía que una persona usa (se supone que la persona mantiene un nivel de actividad constante). Para calcular el peso perdido se puede usar la siguiente ecuación

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = \frac{C}{3\,500} - \frac{17.5}{3\,500}w$$

donde w es el peso de la persona (en libras), t es el tiempo en días, y C es el consumo diario de calorías, que es constante.

a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

b) Considerar una persona que pesa 180 libras e inicia una dieta de 2 500 calorías por día. ¿Cuánto tiempo tardará la persona en perder 10 libras? ¿Cuánto tiempo le tomará a la persona en perder 35 libras?

c) Usar un método gráfico de computadora para presentar la solución. ¿Cuál es el peso límite de la persona?

d) Repetir los apartados *b)* y *c)* para una persona que pesa 200 libras cuando inició la dieta.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una mejor información sobre el modelo de pérdida de peso, ver el artículo "Un modelo lineal de dieta", por Arthur C. Segal en *The Collage Mathematics Journal*.

Ejercicios de repaso del capítulo 6

1. Determinar si la función $y = x^3$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + 3y = 6x^3$.

2. Determinar si la función $y = 2 \operatorname{sen} 2x$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' - 8y = 0$.

En los ejercicios 3 a 8, usar integración para encontrar una solución general de la ecuación diferencial.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 5$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - 2x$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x$

6. $\dfrac{dy}{dx} = 2 \operatorname{sen} x$

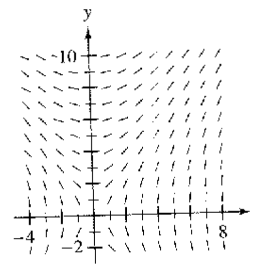
7. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x - 7}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{-x/3}$

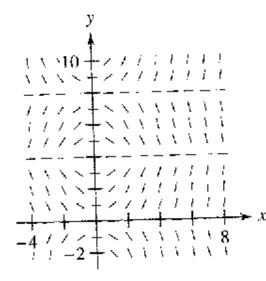
Campos de pendientes **En los ejercicios 9 y 10, una ecuación diferencial y su campo de pendientes son dados. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$



10. $\dfrac{dy}{dx} = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 11 a 16, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes dado por la ecuación diferencial y *b*) usar el campo de pendientes para graficar la solución que pasa a través del punto dado.**

	Ecuación diferencial	*Punto*
11.	$y' = -x - 2$	$(-1, 1)$
12.	$y' = 2x^2 - x$	$(0, 2)$
13.	$y' = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x$	$(0, 3)$
14.	$y' = y + 3x$	$(2, 1)$
15.	$y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$	$(0, 1)$
16.	$y' = \dfrac{y}{x^2 + 1}$	$(0, -2)$

En los ejercicios 17 a 22, resolver la ecuación diferencial.

17. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - x$

18. $\dfrac{dy}{dx} = y + 6$

19. $\dfrac{dy}{dx} = (3 + y)^2$

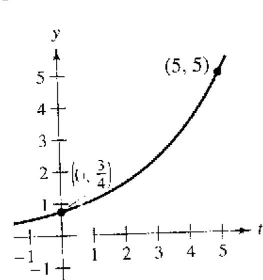
20. $\dfrac{dy}{dx} = 4\sqrt{y}$

21. $(2 + x)y' - xy = 0$

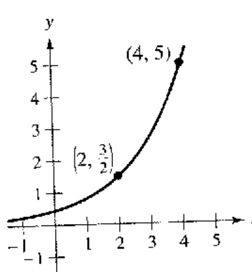
22. $xy' - (x + 1)y = 0$

En los ejercicios 23 a 26, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pasa a través de los dos puntos.

23.



24.



25. $(0, 5), \left(5, \dfrac{1}{6}\right)$

26. $(1, 9), (6, 2)$

27. ***Presión del aire*** Bajo condiciones ideales, la presión del aire decrece continuamente en relación con la altura sobre el nivel del mar a una tasa proporcional a la presión a esa altura. El barómetro marca 30 pulgadas al nivel del mar y 15 pulgadas a 18 000 pies. Encontrar la presión barométrica a 35 000 pies.

28. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una vida media de aproximadamente 1 599 años. La cantidad inicial es 5 gramos. ¿Qué cantidad permanece después de 600 años?

29. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado por t años está dada por

$$S = Ce^{k/t}$$

a) Encontrar S como una función de t si se han vendido 5 000 unidades después de 1 año y el punto de saturación el mercado es 30 000 unidades (es decir, $\lim\limits_{t\to\infty} S = 30$).

b) ¿Cuántas unidades se han vendido después de 5 años?

c) Usar un método gráfico de computadora para presentar esta función de ventas.

30. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado durante t años está dada por

$$S = 25(1 - e^{kt})$$

a) Encontrar S como función de t si se han vendido 45 000 unidades después de 1 año.

b) ¿Cuántas unidades saturarán este mercado?

c) ¿Cuántas unidades habrán sido vendidas después de 5 años?

d) Usar un método gráfico de computadora para presentar esta función de ventas.

31. ***Crecimiento de población*** Una población crece continuamente a una tasa de 1.5%. ¿Cuánto tiempo tardará la población en duplicarse?

32. ***Ahorro de gasolina*** Un automóvil recorre 28 millas por galón de gasolina a velocidades por encima de 50 millas por hora. A más de 50 millas por hora, el número de millas por galones cae a una tasa de 12% por cada 10 millas por hora.

a) s es la velocidad y y es el número de millas por galón. Encontrar y como función de s mediante la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = -0.012y, \quad s > 50.$$

b) Usar la función del apartado *a)* para completar la tabla.

Velocidad	50	55	60	65	70
Millas por galón					

En los ejercicios 33 a 38, resolver la ecuación diferencial.

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3}{x}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

35. $y' - 2xy = 0$

36. $y' - e^y \operatorname{sen} x = 0$

37. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

38. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(x + y)}{x}$

39. Verificar que la solución general $y = C_1x + C_2x^3$ satisface la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. Entonces, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial $y = 0$ y $y' = 4$ cuando $x = 2$.

40. ***Movimiento vertical*** Un objeto que cae se encuentra con la resistencia al aire que es proporcional a su velocidad. La aceleración debida a la gravedad es -9.8 metros por segundo al cuadrado. El cambio neto en la velocidad es $dv/dt = kv - 9.8$.

a) Encontrar la velocidad del objeto como función del tiempo si la velocidad inicial es v_0.

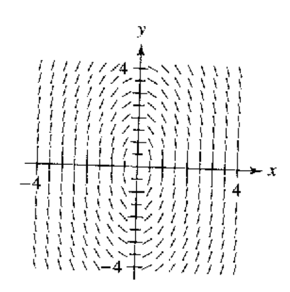
b) Usar el resultado del apartado *a)* para encontrar el límite de la velocidad cuando t se aproxima al infinito.

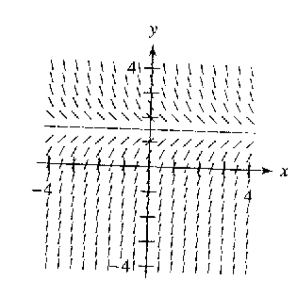
c) Integrar la función velocidad que se encontró en el apartado *a)* para encontrar la posición s.

Campos de pendientes **En los ejercicios 41 y 42, trazar la gráfica de algunas funciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y encontrar la solución general de forma analítica.**

41. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{y}$

42. $\dfrac{dy}{dx} = 3 - 2y$





En los ejercicios 43 y 44, usar la ecuación logística para calcular el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a)* encontrar el valor de k, *b)* encontrar la capacidad límite o de soporte, *c)* calcular la población inicial, *d)* determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e)* escribir la ecuación diferencial logística que tiene la solución $P(t)$.

43. $P(t) = \dfrac{7\,200}{1 + 44e^{-0.55t}}$

44. $P(t) = \dfrac{4\,800}{1 + 14e^{-0.15t}}$

45. ***Medio ambiente*** Un departamento de conservación libera 1 200 truchas de río en un lago. Se estima que la capacidad límite o de soporte del lago para las especies es 20 400. Después del primer año, existen 2 000 truchas en el lago.

a) Escribir la ecuación logística que calcula el número de truchas en el lago.

b) Encontrar el número de truchas en el lago después de 8 años.

c) ¿Cuándo el número de truchas en el lago será de 10 000?

46. ***Medio ambiente*** Escribir la ecuación diferencial logística que calcula la tasa de crecimiento de la población de las truchas en el ejercicio 45. Entonces repetir el apartado *b)* mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con la respuesta exacta.

En los ejercicios 47 a 56, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

47. $y - y = 8$

48. $e^x y' + 4e^x y = 1$

49. $4y' = e^{x/4} + y$

50. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

51. $(x - 2)y' + y = 1$

52. $(x + 3)y' + 2y = 2(x + 3)^2$

53. $(3y + \operatorname{sen} 2x)\, dx - dy = 0$

54. $dy = (y \tan x + 2e^x)\, dx$

55. $y' + 5y = e^{5x}$

56. $xy' - ay = bx^4$

En los ejercicios 57 a 60, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

57. $y' + y = xy^2$ [*Sugerencia:* $\int xe^{-x}\, dx = (-x - 1)e^{-x}$]

58. $y' + 2xy = xy^2$

59. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \dfrac{y^3}{x^2}$

60. $xy' + y = xy^2$

En los ejercicios 61 a 64, escribir un ejemplo de la ecuación diferencial dada. A continuación resolver la ecuación.

61. Ecuación diferencial homogénea.

62. Ecuación diferencial logística.

63. Ecuación diferencial lineal de primer orden.

64. Ecuación diferencial de Bernoulli.

SP Solución de problemas

1. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

donde k y ε son constantes positivas, se denomina como la **ecuación del día final**.

a) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = y^{1.01}$$

dado que $y(0) = 1$. Encontrar el tiempo T en el cual

$$\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty.$$

b) Resolver la ecuación del día final.

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

dado que $y(0) = y_0$. Explicar por qué esta ecuación se denomina ecuación del día final.

2. Un termómetro se lleva desde una habitación a 72° F hacia el exterior, donde la temperatura es 20° F. La lectura cae a 48° F después de 1 minuto. Determinar la lectura del termómetro después de 5 minutos.

3. Considerar que S representa las ventas de un nuevo producto (en miles de unidades), L es el nivel máximo de ventas (en miles de unidades) y t el tiempo (en meses). El ritmo o velocidad de cambio de S con respecto a t varía al mismo tiempo que el producto S y $L - S$.

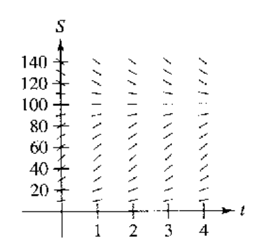
a) Escribir la ecuación diferencial para el modelo de ventas si $L = 100$, $S = 10$ cuando $t = 0$ y $S = 20$ cuando $t = 1$. Verificar que

$$S = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

b) ¿En qué tiempo se incrementa más rápidamente el crecimiento en ventas?

c) Usar un método gráfico de computadora para representar la función de ventas.

d) Representar gráficamente la solución del apartado *a*) sobre el campo de pendiente mostrado en la figura de abajo.



e) Si el nivel máximo de ventas estimado es correcto, usar el campo de pendientes para describir la forma de las curvas solución para ventas si, en algún periodo, las ventas exceden a L.

4. Otro modelo que se puede usar para representar el crecimiento de la población es la **ecuación Gompertz**, la cual es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k \ln\left(\frac{L}{y}\right)y$$

donde k es una constante y L es la capacidad límite o de soporte.

a) Resolver la ecuación diferencial.

b) Utilizar un método gráfico de computadora para presentar el campo de pendientes para la ecuación diferencial cuando $k = 0.05$ y $L = 1\,000$.

c) Describir el comportamiento de la gráfica cuando $t \to \infty$.

d) Trazar la gráfica de la ecuación diferencial que se encontró en el apartado *a*) para $L = 5\,000$, $y_0 = 500$ y $k = 0.02$. Determinar la concavidad de la gráfica y cómo se compara con la solución general de la ecuación diferencial logística.

5. Demostrar que la ecuación logística

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}$$

se puede escribir como

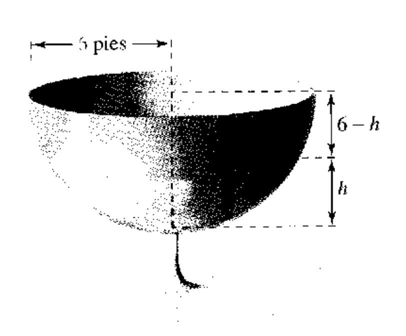
$$y = \frac{1}{2}L\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}k\left(t - \frac{\ln b}{k}\right)\right)\right].$$

¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación logística?

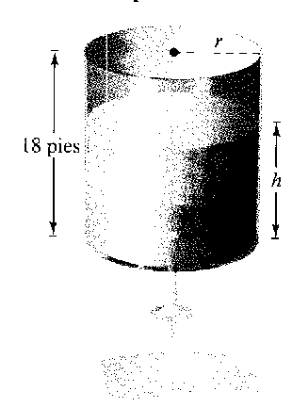
6. **La ley de Torricelli** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$$

donde h es la altura del agua en el tanque, k es el área de la abertura de la parte inferior del tanque, $A(h)$ es el área de la sección transversal a la altura h y g es la aceleración debida a la gravedad ($g \approx 32$ pies/s^2). Un tanque de agua hemisférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



7. El tanque cilíndrico de agua mostrado en la figura tiene una altura de 18 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular se abre en la parte inferior del tanque. Después de 30 minutos, la profundidad del agua es de 12 pies.



   a) ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?
   b) ¿Cuál es la profundidad del agua en el tanque después de 1 hora?

8. Suponer que el tanque del ejercicio 7 tiene una altura de 20 pies, un radio de 8 pies, y la válvula circular tiene un radio de 2 pulgadas. El tanque está completamente lleno cuando la válvula está abierta. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?

9. En áreas montañosas, la recepción de la radio puede ser débil. Considerar una situación donde una emisora de FM se localiza en el punto $(-1, 1)$ detrás de un monte representado por la gráfica de

$$y = x - x^2$$

y el receptor de radio está en el lado opuesto del monte. (Suponer que el eje x representa el nivel de referencia en la base del monte.)

   a) ¿Cuál es la posición más cercana de la radio $(x, 0)$ respecto al monte para que no haya interferencias?
   b) Escribir la posición de la radio más cercana $(x, 0)$ con x representada como una función de h si la emisora se localiza a $(-1, h)$.
   c) Usar un método gráfico de computadora para x en el apartado *b)*. Determinar la asíntota vertical de la función e interpretar el resultado.

10. La biomasa es una medida de la cantidad de la materia viviente en un ecosistema. Suponer que la biomasa $s(t)$ en un ecosistema dado se incrementa a una tasa de, aproximadamente, 3.5 toneladas por año, y decrece, aproximadamente, 1.9% por año. La situación se puede calcular mediante la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = 3.5 - 0.019s.$$

   a) Resolver la ecuación diferencial.
   b) Usar un método gráfico de computadora para presentar el campo de pendientes de la ecuación diferencial. ¿Qué se observa?
   c) Explicar qué sucede cuando $t \to \infty$.

En los ejercicios 11 a 13, un investigador médico quiere determinar la concentración C (en moles por litro) de un medicamento marcador inyectado en un fluido en movimiento. Resolver este problema al considerar un modelo de dilución de un compartimento simple (ver la figura). Suponer que el fluido está siendo mezclado y que el volumen de éste en el compartimento es constante.

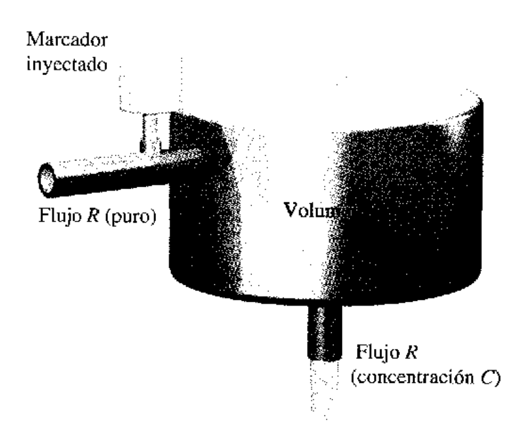


Figura para 11 a 13

11. Si el marcador es inyectado instantáneamente en el tiempo $t = 0$, entonces la concentración del fluido en el compartimento se empieza a diluir según la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \left(-\frac{R}{V}\right)C, \quad C = C_0 \text{ cuando } t = 0.$$

   a) Resolver la ecuación diferencial para encontrar la concentración C como función de t.
   b) Encontrar el límite de C cuando $t \to \infty$.

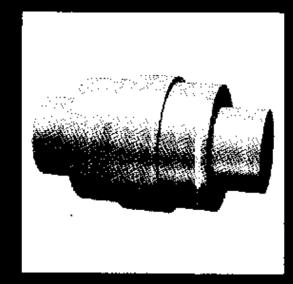
12. Usar la solución de la ecuación diferencial en el ejercicio 11 para encontrar la concentración C como función del tiempo t y usar un método gráfico de computadora para presentar la función.

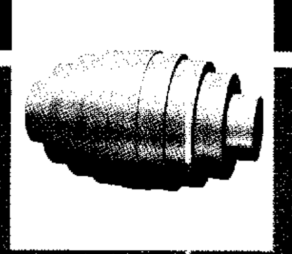
   a) $V = 2$ litros, $R = 0.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.
   b) $V = 2$ litros, $R = 1.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.

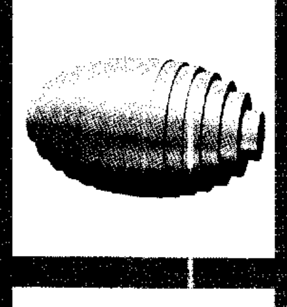
13. En los ejercicios 11 y 12, se supuso que había una inyección simple inicial del medicamento marcador dentro del compartimento. Ahora considerar el caso en el cual el marcador es continuamente inyectado (iniciando en $t = 0$) a una tasa de Q moles por minuto. Si considera Q despreciable comparada con R, usar la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} - \left(\frac{R}{V}\right)C, \quad C = 0 \text{ cuando } t = 0.$$

   a) Resolver esta ecuación diferencial para encontrar la concentración C como función del tiempo t.
   b) Encontrar el límite de C cuando $t \to \infty$.







Aplicaciones de la integral

El atomium, localizado en Bélgica, representa una molécula de cristal férrica amplificada 165 mil millones de veces. La estructura contiene nueve esferas conectadas con tubos cilíndricos. La esfera central tiene un tubo que pasa a través de su centro. Explicar cómo se puede encontrar el volumen de la porción de la esfera central que no incluye el tubo.

Andre Jenny/Alamy Images

Sección 7.1 Área de una región entre dos curvas

- **Encontrar el área de una región entre dos curvas usando la integral.**
- **Encontrar el área de una región entre curvas que se intersecan usando integral.**
- **Describir la integración como un proceso de acumulación.**

Área de una región entre dos curvas

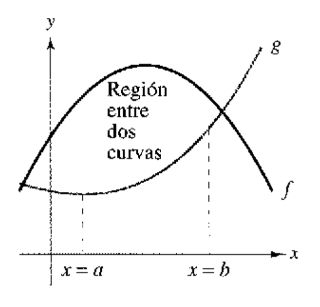


Figura 7.1

A partir de unas modificaciones se puede extender la aplicación de las integrales definidas para el área de una región *bajo* una curva al área de una región *entre* dos curvas. Considerar dos funciones f y g que son continuas en el intervalo $[a, b]$. Si, como en la figura 7.1, las gráficas de f y g están sobre el eje x y la gráfica de g debajo de la gráfica de f, se puede interpretar geométricamente el área de la región entre las gráficas como el área de la región bajo la gráfica de g sustraída del área de la región bajo la gráfica f, como se muestra en la figura 7.2.

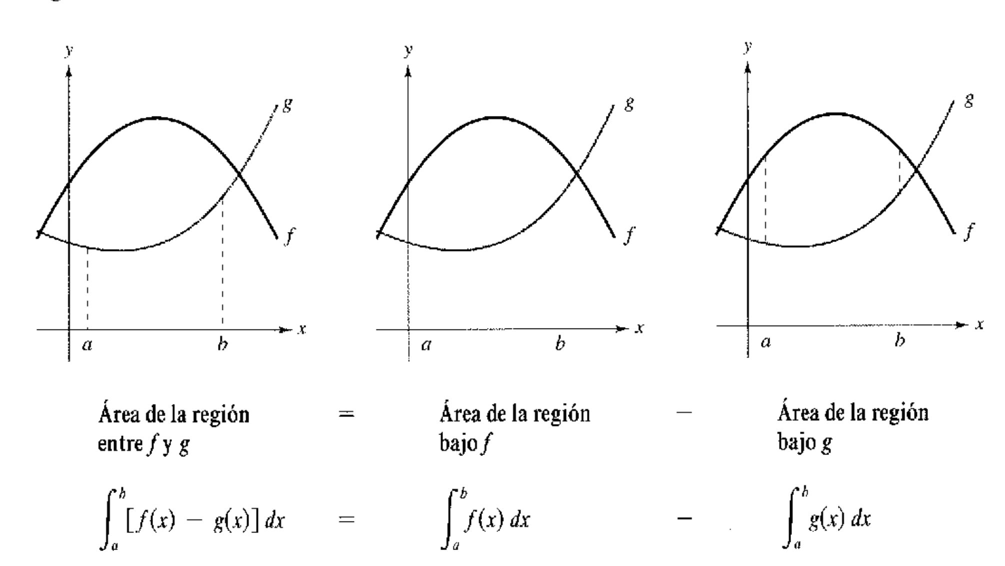


Figura 7.2

Para verificar que el resultado mostrado en la figura 7.2 es racional, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ entre n subintervalos, cada uno de anchura Δx. Entonces, como se muestra en la figura 7.3, se traza un **rectángulo representativo** de anchura Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i es un punto del i-ésimo subintervalo. El área de este rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = \text{(altura)(anchura)} = [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Rectángulo representativo
Altura: $f(x_i) - g(x_i)$
Anchura: Δx

Figura 7.3

Por adición de las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Porque f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ también es continua en $[a, b]$ y el límite existe. Así que, el área de la región dada es

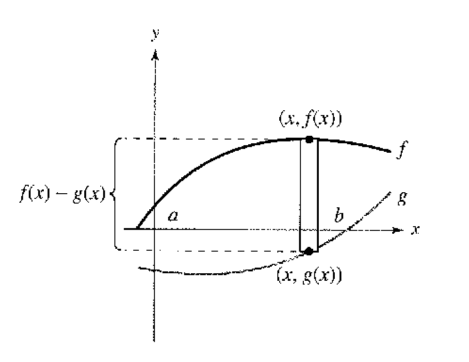
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \end{aligned}$$

Área de una región entre dos curvas

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

En la figura 7.1, las gráficas de f y g se muestran sobre el eje x. Esto, sin embargo, no es necesario. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ puede usarse con tal de que f y g sean continuas y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Este resultado se resume en la figura 7.4.



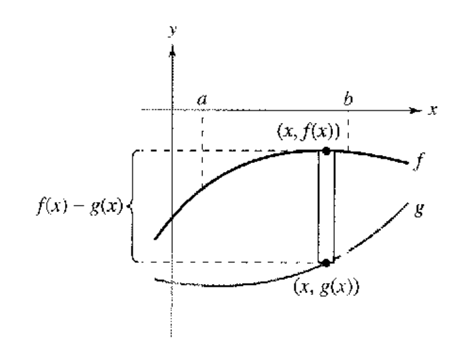


Figura 7.4

NOTA La altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$ sin tener en cuenta la posición relativa del eje x, como se muestra en la figura 7.4.

Se usan los rectángulos representativos a lo largo de este capítulo en varias aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica la integral con respecto a x, mientras que un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica la integral con respecto a y.

EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región entre dos curvas

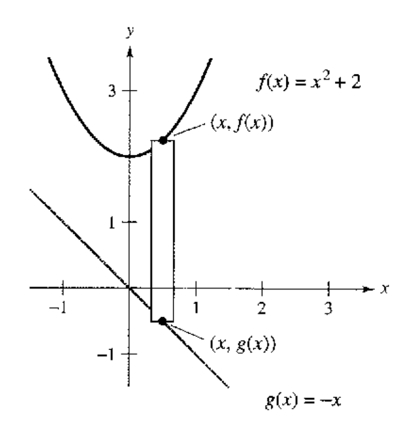
Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[0, 1]$, como se muestra en la figura 7.5. Así, el área del rectángulo representativo es

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x$$
$$= [(x^2 + 2) - (-x)]\,\Delta x$$

y el área de la región es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$$
$$= \frac{17}{6}.$$



Región comprendida por la gráfica de f, la gráfica de g, $x = 0$ y $x = 1$
Figura 7.5

Área de una región entre curvas que se intersecan

En el ejemplo 1, las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ no se intersecan, y los valores de a y b se dan explícitamente. Un problema más común involucra el área de una región comprendida entre dos gráficas que se intersecan donde los valores de a y b deben calcularse.

EJEMPLO 2 Una región determinada por dos gráficas que se intersecan

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.

Solución En la figura 7.6, se observa que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para encontrar las coordenadas x de estos puntos, se hace $f(x)$ y $g(x)$ iguales y se resuelve para x.

$$2 - x^2 = x$$ Igualar $f(x)$ con $g(x)$.

$$-x^2 - x + 2 = 0$$ Escribir en forma general.

$$-(x + 2)(x - 1) = 0$$ Factorizar.

$$x = -2 \text{ o } 1$$ Despejar para x.

Así, $a = -2$ y $b = 1$. Porque $g(x) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene un área de

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x = [(2 - x^2) - x]\,\Delta x$$

y el área de la región es

$$A = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Región comprendida por la gráfica de f y la gráfica de g
Figura 7.6

EJEMPLO 3 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

El seno y coseno de las curvas se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales, como se muestra en la figura 7.7. Encontrar el área de una de estas regiones.

Solución

$$\operatorname{sen} x = \cos x$$ Igualar $f(x)$ a $g(x)$.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$$ Dividir cada lado por el coseno de x.

$$\tan x = 1$$ Identidad trigonométrica.

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ o } \frac{5\pi}{4}, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$ Despejar para x.

Así, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Porque sen $x \geq$ cos de x para todo x en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

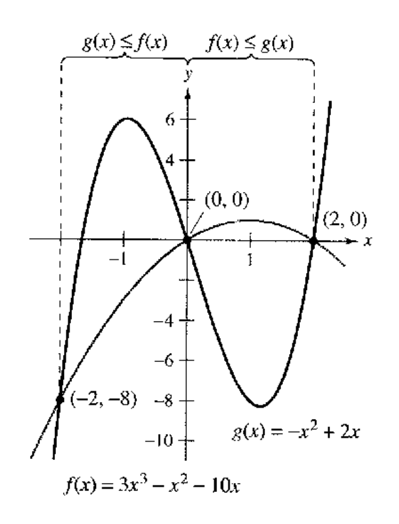
$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\operatorname{sen} x - \cos x]\,dx = \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}.$$

Una de las regiones acotada por las gráficas de las funciones del seno y coseno
Figura 7.7

Si dos curvas se intersecan en más de dos puntos, entonces para encontrar el área de la región comprendida entre las curvas, se deben encontrar todos los puntos de intersección y verificar en cada uno de los intervalos determinados por esos puntos, cuál de las gráficas está encima de la otra.

EJEMPLO 4 Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.



Sobre $[-2, 0]$, $g(x) \le f(x)$, y sobre $[0, 2]$, $f(x) \le g(x)$

Figura 7.8

Solución Empezar igualando $f(x)$ y $g(x)$ y resolviendo para x. Así se obtienen las coordenadas de x en cada punto de intersección de las dos gráficas.

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x).$$
$$3x^3 - 12x = 0 \qquad \text{Escribir en forma general.}$$
$$3x(x-2)(x+2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x = -2, 0, 2 \qquad \text{Despejar para } x.$$

Así, las dos gráficas se cortan cuando $x = -2$, 0 y 2. En la figura 7.8, se observa que $g(x) \le f(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$. Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y $f(x) \le g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Así, se necesitan dos integrales, una para el intervalo $[-2, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} \\ &= -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24 \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 4, se observa que se obtiene un resultado incorrecto si se integra de -2 a 2. Tal integral produce

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)\,dx = 0.$$

Si la gráfica de una función de y es una frontera de una región, es a menudo conveniente usar rectángulos representativos *horizontales* y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan

$$A = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} [(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]\,dx}_{\text{en la variable } x} \qquad \text{Rectángulos verticales.}$$

$$A = \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} [(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]\,dy}_{\text{en la variable } y} \qquad \text{Rectángulos horizontales.}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales

Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

Solución Considerar

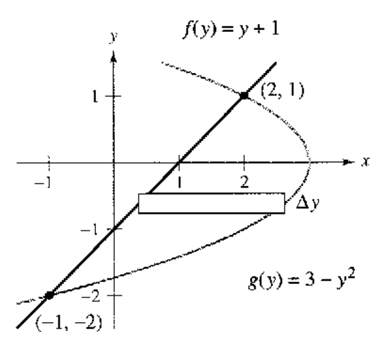
$$g(y) = 3 - y^2 \ \text{ y } f(y) = y + 1.$$

Estas dos curvas se intersecan cuando $y = -2$ y $y = 1$, como se muestra en la figura 7.9. Porque $f(y) \leq g(y)$ en este intervalo, se tiene

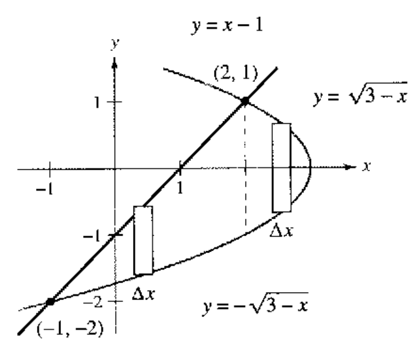
$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\,\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\,\Delta y.$$

Así, el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\,dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\,dy \\ &= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Rectángulos horizontales (integración con respecto a y)
Figura 7.9



Rectángulos verticales (integración con respecto a x)
Figura 7.10

En el ejemplo 5, se observa que integrando con respecto a y se necesita sólo una integral. Si se integran con respecto a x, se necesitarían dos integrales porque la frontera superior habría cambiado en $x = 2$, como se muestra en la figura 7.10.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[(x - 1) + \sqrt{3 - x}\right] dx + \int_{2}^{3} \left(\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}\right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} [x - 1 + (3 - x)^{1/2}]\,dx + 2\int_{2}^{3} (3 - x)^{1/2}\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{2} - 2\left[\frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{2}^{3} \\ &= \left(2 - 2 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{16}{3}\right) - 2(0) + 2\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

La integración como un proceso de acumulación

En esta sección, la fórmula de la integral para el área entre dos curvas se desarrolló usando un rectángulo como el *elemento representativo*. Para cada nueva aplicación en las secciones restantes de este capítulo, un elemento representativo apropiado se construirá a partir de las fórmulas previas al cálculo que ya se conocen. Cada fórmula de la integración se obtendrá sumando o acumulando estos elementos representativos.

Fórmula conocida previa al cálculo $\Longrightarrow$ Elemento representativo $\Longrightarrow$ Nueva fórmula de integración

Por ejemplo, en esta sección la fórmula del área se desarrolla como sigue.

$$A = (\text{altura})(\text{anchura}) \quad \Longrightarrow \quad \Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x \quad \Longrightarrow \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 6 Descripción de la integración como un proceso de acumulación

Encontrar el área de la región acotada por la gráfica de $y = 4 - x^2$ y el eje x. Describir la integración como un proceso de acumulación.

Solución El área de la región está dada por

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx.$$

Se piensa en la integración como una acumulación de las áreas de los rectángulos formados al ir desplazando los rectángulos representativos de $x = -2$ a $x = 2$, como se muestra en la figura 7.11.

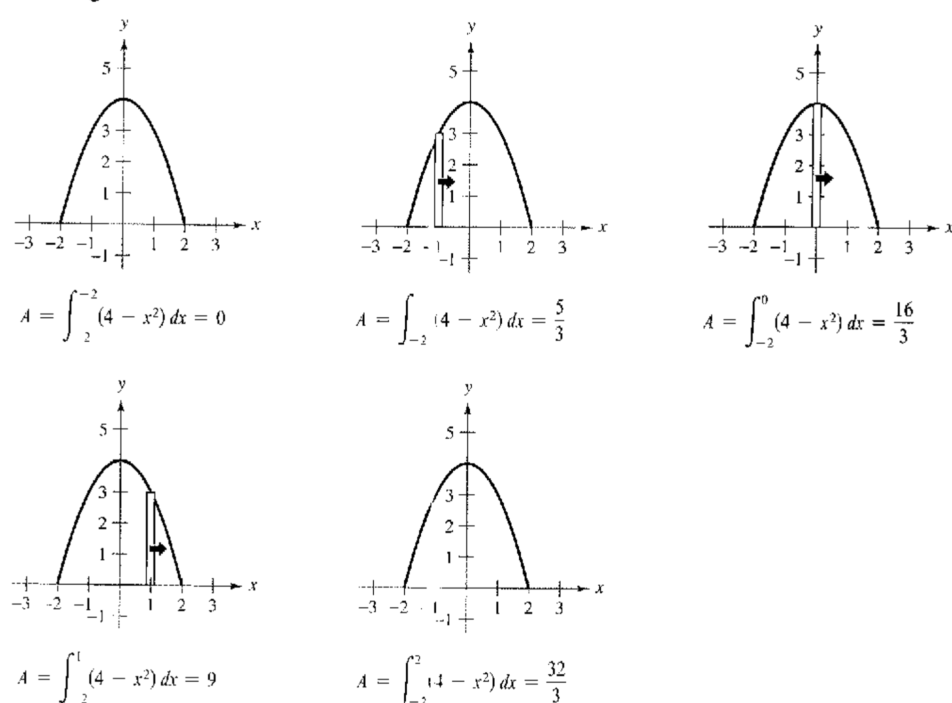
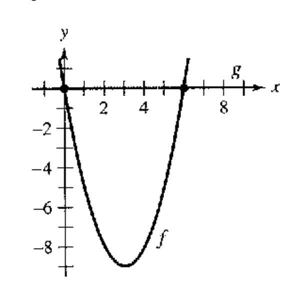


Figura 7.11

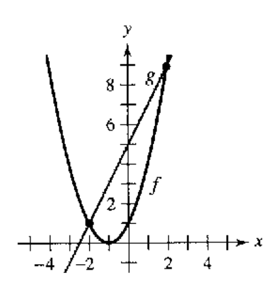
Ejercicios de la sección 7.1

En los ejercicios 1 a 6, formular la integral definida que da el área de la región.

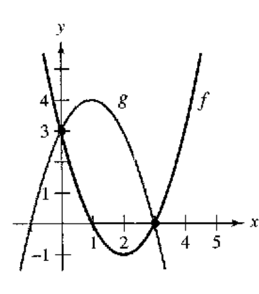
1. $f(x) = x^2 - 6x$
   $g(x) = 0$

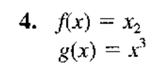


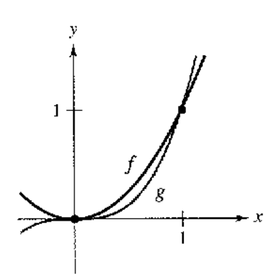
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
   $g(x) = 2x + 5$



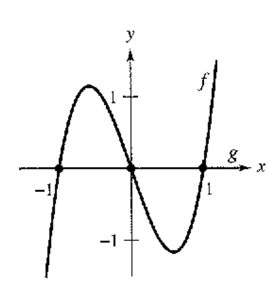
3. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
   $g(x) = 2x^2 + 2x + 3$

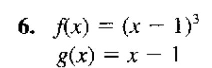


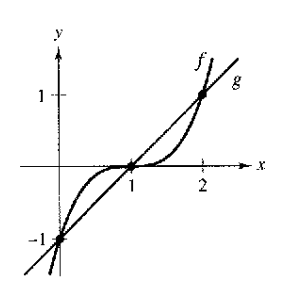
4. 
   $f(x) = x_2$
   $g(x) = x^3$



5. $f(x) = 3(x^3 - x)$
   $g(x) = 0$



6. 
   $f(x) = (x - 1)^3$
   $g(x) = x - 1$



En los ejercicios 7 a 12, el integrando de la integral definida es una diferencia de dos funciones. Dibujar la gráfica de cada función y sombrear la región cuya área está representada por la integral.

7. $\int_0^4 \left[(x + 1) - \frac{x}{2}\right] dx$

8. $\int_{-1}^1 [(1 - x^2) - (x^2 - 1)]\, dx$

9. $\int_0^6 \left[4(2^{-x/3}) - \frac{x}{6}\right] dx$

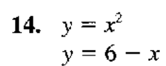
10. $\int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \frac{x}{3}\right] dx$

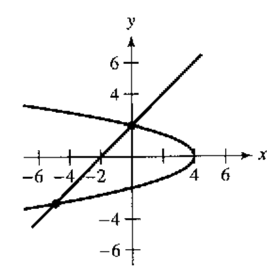
11. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - \sec x)\, dx$

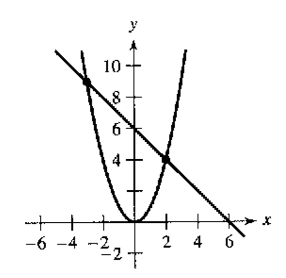
12. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x)\, dx$

En los ejercicios 13 y 14, encontrar el área de la región integrando *a*) con respecto a *x* y *b*) con respecto a *y*.

13. $x = 4 - y^2$
    $x = y - 2$

14. 
    $y = x^2$
    $y = 6 - x$





Para pensar **En los ejercicios 15 y 16, determinar qué valor se aproxima mejor al área de la región acotada por las gráficas de *f* y *g*. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región sin haber hecho algún cálculo.)**

15. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2$
    a) −2 *b*) 2 *c*) 10 *d*) 4 *e*) 8

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$
    a) 1 *b*) 6 *c*) −3 *d*) 3 *e*) 4

En los ejercicios 17 a 32, dibujar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y encontrar el área de la región.

17. $y = \frac{1}{2}x^3 + 2, \; y = x + 1, \; x = 0, \; x = 2$
18. $y = -\frac{3}{8}x(x - 8), \; y = 10 - \frac{1}{2}x, \; x = 2, \; x = 8$
19. $f(x) = x^2 - 4x, \; g(x) = 0$
20. $f(x) = -x^2 + 4x + 1, \; g(x) = x + 1$
21. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \; g(x) = 3x + 3$
22. $f(x) = -x^2 + 4x + 2, \; g(x) = x + 2$
23. $y = x, \; y = 2 - x, \; y = 0$
24. $y = \frac{1}{x^2}, \; y = 0, \; x = 1, \; x = 5$
25. $f(x) = \sqrt{3x} + 1, \; g(x) = x + 1$
26. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}, \; g(x) = x - 1$
27. $f(y) = y^2, \; g(y) = y + 2$
28. $f(y) = y(2 - y), \; g(y) = -y$
29. $f(y) = y^2 + 1, \; g(y) = 0, \; y = -1, \; y = 2$
30. $f(y) = \frac{y}{\sqrt{16 - y^2}}, \; g(y) = 0, \; y = 3$
31. $f(x) = \frac{10}{x}, \; x = 0, \; y = 2, \; y = 10$
32. $g(x) = \frac{4}{2 - x}, \; y = 4, \; x = 0$

En los ejercicios 33 a 42, *a*) usar calculadora para representar la región comprendida por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar calculadora para verificar los resultados.

33. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3),\ \ g(x) = x^2$

34. $f(x) = x^3 - 2x + 1,\ \ g(x) = -2x,\ \ x = 1$

35. $y = x^2 - 4x + 3,\ \ y = 3 + 4x - x^2$

36. $y = x^4 - 2x^2,\ \ y = 2x^2$

37. $f(x) = x^4 - 4x^2,\ \ g(x) = x^2 - 4$

38. $f(x) = x^4 - 4x^2,\ \ g(x) = x^3 - 4x$

39. $f(x) = 1/(1 + x^2),\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2$

40. $f(x) = 6x/(x^2 + 1),\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le 3$

41. $y = \sqrt{1 + x^3},\ \ y = \frac{1}{2}x + 2,\ \ x = 0$

42. $y = x\sqrt{\dfrac{4 - x}{4 + x}},\ \ y = 0,\ \ x = 4$

En los ejercicios 43 a 48, dibujar la región acotada por las gráficas de las funciones, y encontrar el área de la región.

43. $f(x) = 2\operatorname{sen} x,\ \ g(x) = \tan x,\ \ -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

44. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ \ g(x) = \cos 2x,\ \ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

45. $f(x) = \cos x,\ \ g(x) = 2 - \cos x,\ \ 0 \le x \le 2\pi$

46. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4} \tan \dfrac{\pi x}{4},\ \ g(x) = (\sqrt{2} - 4)x + 4,\ \ x = 0$

47. $f(x) = xe^{-x^2},\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le 1$

48. $f(x) = 3^x,\ \ g(x) = 2x + 1$

En los ejercicios 49 a 52, *a*) usar calculadora para trazar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar una calculadora para verificar los resultados.

49. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \pi$

50. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x,\ \ y = 0,\ \ 0 < x \le \pi$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x},\ \ y = 0,\ \ 1 \le x \le 3$

52. $g(x) = \dfrac{4 \ln x}{x},\ \ y = 0,\ \ x = 5$

En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar una calculadora para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) explicar por qué el área de la región es difícil de encontrar a mano y *c*) usar una calculadora para verificar los resultados con cuatro decimales significativos.

53. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{4 - x}},\ \ y = 0,\ \ x = 3$

54. $y = \sqrt{x}\,e^x,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = 1$

55. $y = x^2,\ \ y = 4\cos x$

56. $y = x^2,\ \ y = \sqrt{3 + x}$

En los ejercicios 57 a 60, encontrar la función de acumulación *F*. Entonces evaluar *F* en cada valor de la variable independiente y gráficamente mostrar el área dada por cada valor de *F*.

57. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t + 1\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(2)$ *c*) $F(6)$

58. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(4)$ *c*) $F(6)$

59. $F(\alpha) = \displaystyle\int_{-1}^{\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{2}\, d\theta$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F\left(\frac{1}{2}\right)$

60. $F(y) = \displaystyle\int_{-1}^{y} 4e^{x/2}\, dx$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F(4)$

En los ejercicios 61 a 64, usar la integración para encontrar el área de la figura que tiene los vértices dados.

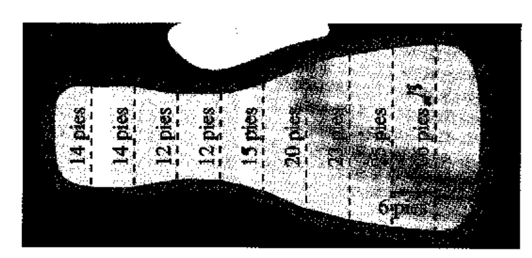
61. $(2, -3), (4, 6), (6, 1)$

62. $(0, 0), (a, 0), (b, c)$

63. $(0, 2), (4, 2), (0, -2), (-4, -2)$

64. $(0, 0), (1, 2), (3, -2), (1, -3)$

65. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del *green* de golf usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



66. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del derrame de petróleo usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

En los ejercicios 67 a 70, formular y evaluar la integral definida que da el área de la región acotada por la gráfica de la función y la recta tangente para la gráfica en el punto dado.

67. $f(x) = x^3,\ \ (1, 1)$

68. $y = x^3 - 2x,\ \ (-1, 1)$

69. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1},\ \ \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

70. $y = \dfrac{2}{1 + 4x^2},\ \ \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

Desarrollo de conceptos

71. Las gráficas $y = x^4 - 2x^2 + 1$ y $y = 1 - x^2$ se intersecan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas puede encontrarse por una sola integral. Explicar por qué es así, y escribir una integral para esta área.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

72. El área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$ *no puede* encontrarse por una integral única $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)\,dx$. Explicar por qué esto es así. Usar la simetría para escribir una sola integral que representa el área.

73. Un graduado de la universidad tiene dos ofertas de trabajo. El sueldo de arranque para cada una es $32 000 y después de 8 años de servicio cada una pagará $54 000. El aumento del sueldo para cada oferta se muestra en la figura. Dar un punto de vista estrictamente monetario de qué oferta es mejor. Explicar.

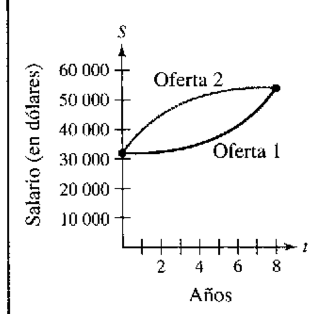


Figura para 73

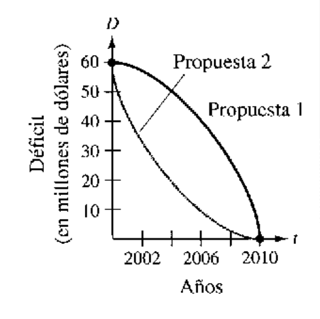


Figura para 74

74. Una legislatura estatal está debatiendo dos propuestas para eliminar el déficit del presupuesto anual para el año 2010. La tasa de disminución del déficit para cada propuesta se muestra en la figura. Desde el punto de vista de minimizar el déficit estatal acumulativo ¿cuál es la mejor propuesta? Explicar.

En los ejercicios 75 y 76, encontrar b tal que la recta $y = b$ divide la región intersecada por las gráficas de las dos ecuaciones en dos regiones de área igual.

75. $y = 9 - x^2, \; y = 0$ **76.** $y = 9 - |x|, \; y = 0$

En los ejercicios 77 y 78, encontrar a tal que la recta $x = a$ divida la región intersecada por las gráficas de las ecuaciones en dos regiones de área igual.

77. $y = x, \; y = 4, \; x = 0$ **78.** $y^2 = 4 - x, \; x = 0$

En los ejercicios 79 y 80, evaluar el límite y dibujar la gráfica de la región cuya área se representa por el límite.

79. $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = i/n$ y $\Delta x = 1/n$

80. $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = -2 + (4i/n)$ y $\Delta x = 4/n$

Ingresos **En los ejercicios 81 y 82, se dan dos modelos R_1 y R_2 para el ingreso (en miles de millones de dólares por año) para una corporación grande. El modelo R_1 da los ingresos anuales proyectados de 2000 a 2005, con $t = 0$ que corresponden a 2000, y R_2 da los ingresos proyectados si hay una disminución en la proporción de crecimiento de ventas corporativas sobre el periodo. Aproximar la reducción total en el ingreso si las ventas corporativas son realmente más cercanas al ejemplo R_2.**

81. $R_1 = 7.21 + 0.58t$
$R_2 = 7.21 + 0.45t$

82. $R_1 = 7.21 + 0.26t + 0.02t^2$
$R_2 = 7.21 + 0.1t + 0.01t^2$

83. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el total de ingresos recibido R y los gastos totales E para el Fondo Fiduciario del Seguro para Personas Mayores y sus Beneficiarios (Fondo Fiduciario del Seguro Social) en miles de millones de dólares. El tiempo t se da en años, con $t = 1$ que corresponde a 1991. (*Fuente: Social Security Administration*)

t	1	2	3	4	5	6
R	299.3	311.2	323.3	328.3	342.8	363.7
E	245.6	259.9	273.1	284.1	297.8	308.2

t	7	8	9	10	11
R	397.2	424.8	457.0	490.5	518.1
E	322.1	332.3	339.9	358.3	377.5

a) Usar una calculadora para ajustar un modelo exponencial para los datos de los ingresos. Trazar una gráfica de los datos y del modelo.

b) Usar una calculadora para ajustar un modelo exponencial para los datos de los gastos. Trazar una gráfica de los datos y del modelo.

c) Si se asume que los modelos son ciertos durante los años 2002 a 2007, usar la integración para aproximar el ingreso excedente generado durante esos años.

d) ¿Los modelos encontrados en los apartados *a)* y *b)* se intersecan? Explicar. Con base en la respuesta e informes nuevos sobre el fondo, ¿estos modelos serán fiables para un análisis a largo plazo?

84. ***Curva de Lorenz*** Los economistas usan la *curva de Lorenz* para ilustrar la distribución del ingreso en un país. Una curva de Lorenz, $y = f(x)$, representa la distribución del ingreso real en el país. En este modelo, x representa el porcentaje de familias en el país y y representa el porcentaje de ingreso total. El modelo $y = x$ representa un país en que cada familia tiene el mismo ingreso. El área entre estos dos modelos, donde $0 \le x \le 100$, indica la "desigualdad del ingreso" de un país. La tabla muestra el porcentaje de ingreso y para los porcentajes seleccionados de x familias en un país.

x	10	20	30	40	50
y	3.35	6.07	9.17	13.39	19.45

x	60	70	80	90
y	28.03	39.77	55.28	75.12

a) Usar una calculadora para encontrar un modelo cuadrático para la curva de Lorenz.

b) Trazar una gráfica de los datos y del modelo.

c) Representar el modelo $y = x$. ¿Cómo se compara este modelo con respecto al modelo *a)*?

d) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la "desigualdad del ingreso".

85. ***Beneficios*** El departamento de contabilidad de una compañía informa que los beneficios durante el último año fiscal fueron de \$893 000. El departamento predice que los beneficios por crecimiento continuo durante los próximos 5 años generarán una tasa anual continua entre $3\frac{1}{2}$ y 5%. Estimar la diferencia acumulativa en los beneficios durante los 5 años basados en el rango predicho de tasas de crecimiento.

86. ***Área*** La región sombreada en la figura consiste en todos los puntos cuyas distancias del centro del cuadrado es menor que las distancias a los bordes del cuadrado. Encontrar el área de la región.

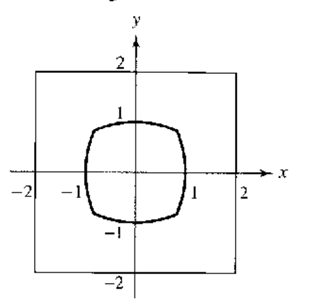


Figura para 86

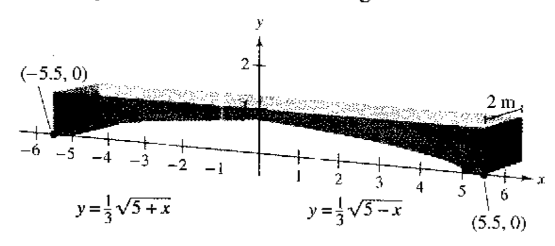
Figura para 87

87. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ y $y_2 = 0.08x^2 + k$ (véase la figura).

a) Encontrar k si la parábola es tangente a la gráfica de y_1.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

88. ***Diseño de construcción*** Las secciones de concreto (hormigón) para un nuevo edificio tienen las dimensiones (en metros) y la forma mostrada en la figura.

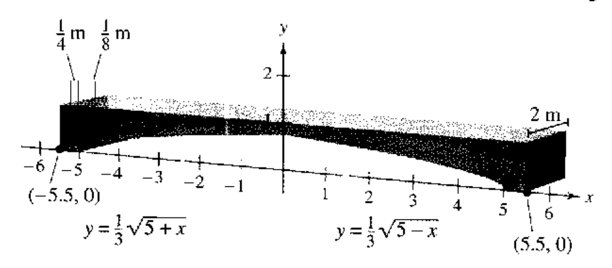


a) Encontrar el área de la cara adosada en el sistema de la coordenada rectangular.

b) Encontrar el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área obtenida en el apartado *a)* por 2 metros.

c) Un metro cúbico de concreto pesa 5 000 libras. Encontrar el peso de la sección.

89. ***Diseño de construcción*** Para disminuir el peso y ayudar en el proceso del endurecimiento, las secciones de concreto en el ejercicio 88 no son a menudo sólidas. Rehacer el ejercicio 88 haciendo orificios cilíndricos como los mostrados en la figura.



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 90 a 92, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

90. Si el área de la región limitada por las gráficas de f y g es 1, entonces el área de la región acotada por las gráficas de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

91. Si $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = A$, entonces $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = -A$.

92. Si las gráficas de f y g se intersecan a la mitad del camino entre $x = a$ y $x = b$, entonces,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = 0.$$

93. ***Área*** Encontrar el área entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, como se muestra en la figura.

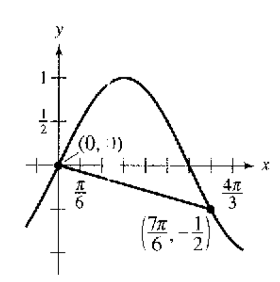


Figura para 93

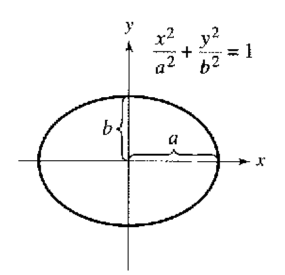


Figura para 94

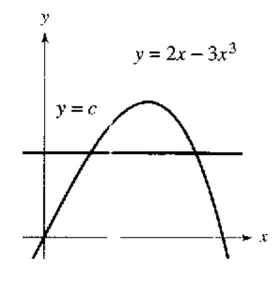
94. ***Área*** Sea $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es πab (ver la figura).

Preparación del examen Putnam

95. La recta horizontal $y = c$ interseca la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante como se muestra en la figura. Encontrar c para que las áreas de las dos regiones sombreadas sean iguales.

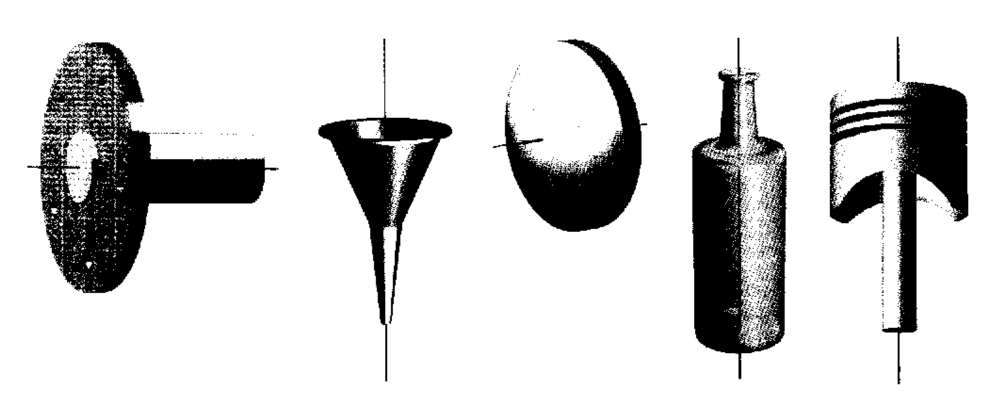


Sección 7.2 Volumen: el método de los discos

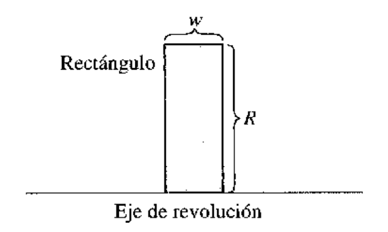
- **Calcular el volumen de un sólido de revolución usando el método de los discos.**
- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de las arandelas.**
- **Encontrar el volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas.**

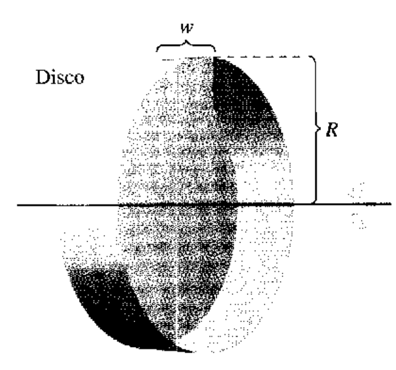
El método de los discos

En el capítulo 4 se mencionó que el área es una de las muchas aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante es su uso para encontrar el volumen de un sólido tridimensional. En esta sección se estudiará un tipo particular de un sólido tridimensional cuyas secciones transversales son similares. Por lo común se usan sólidos de revolución en ingeniería y manufactura. Algunos ejemplos son ejes, embudos, píldoras, botellas y pistones, como se muestra en la figura 7.12.



Sólidos de revolución
Figura 7.12





Volumen de un disco: $\pi R^2 w$
Figura 7.13

Si una región en el plano gira alrededor de una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta se llama **eje de revolución**. El sólido más simple es un cilindro circular recto o **disco** que se forma al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados como se muestra en la figura 7.13. El volumen de tal disco es

$$\begin{aligned}\text{Volumen del disco} &= (\text{área de disco})(\text{anchura de disco})\\ &= \pi R^2 w\end{aligned}$$

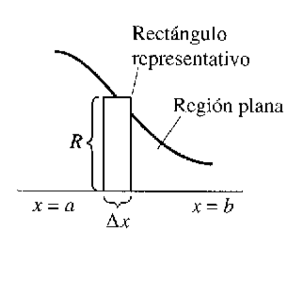
donde R es el radio del disco y w es la anchura.

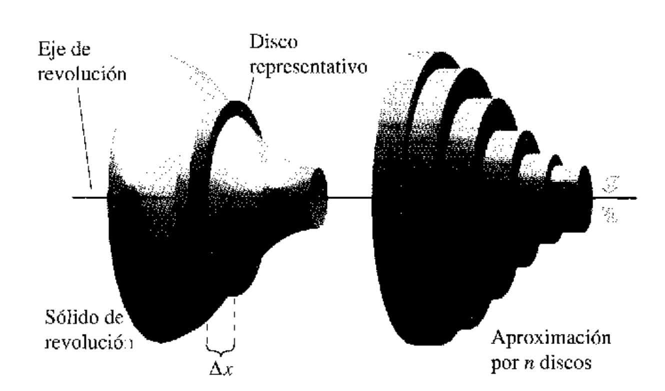
Para observar cómo usar el volumen de un disco para encontrar el volumen de un sólido general de revolución, considerar un sólido de revolución formado al girar la región plana en la figura 7.14 alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido, considerar un rectángulo representativo en la región plana. Cuando este rectángulo gira alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x.$$

Aproximando el volumen del sólido por el de los n discos de anchura Δx y radio $R(x_i)$ produce

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &\approx \sum_{i=1}^{n} \pi[R(x_i)]^2\,\Delta x\\ &= \pi\sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2\,\Delta x.\end{aligned}$$





Método de los discos
Figura 7.14

Esta aproximación parece mejor y aún más cuando $\|\Delta\| \to 0 (n \to \infty)$. Así, se puede definir el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del disco} = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \, \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx.$$

Esquemáticamente, el método del disco es como sigue

Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	⇒	$\Delta V = \pi[R(x_i)]^2 \, \Delta x$	⇒	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$

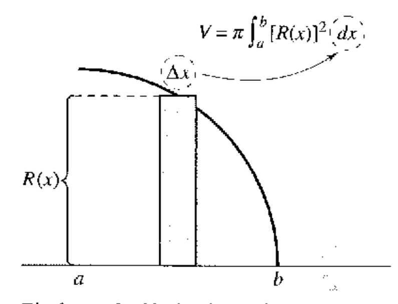
Una fórmula similar puede derivarse si el eje de revolución es vertical.

El método de los discos

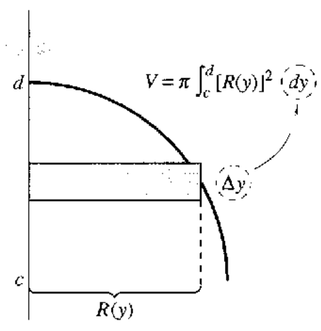
Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de los discos**, usar una de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.15.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$	$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 \, dy$

NOTA En la figura 7.15, observar que se puede determinar la variable de integración tomando un rectángulo representativo en la región plana "perpendicular" al eje de revolución. Si la anchura del rectángulo es Δx, integrar con respecto a x, y si la anchura del rectángulo es Δy, integrar con respecto a y.



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical

Figura 7.15

La aplicación más simple del método de los discos involucra una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x. Si el eje de revolución es el eje x, el radio $R(x)$ simplemente es $f(x)$.

EJEMPLO 1 Uso del método de los discos

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

y el eje x $(0 \leq x \leq \pi)$ alrededor del eje x.

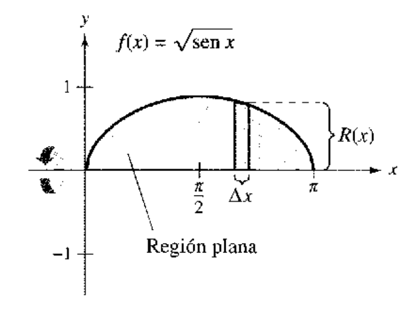


Figura 7.16

Solución Del rectángulo representativo en la gráfica superior en la figura 7.16, se puede ver que el radio de este sólido es

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) \\ &= \sqrt{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Así, el volumen del sólido de revolución es

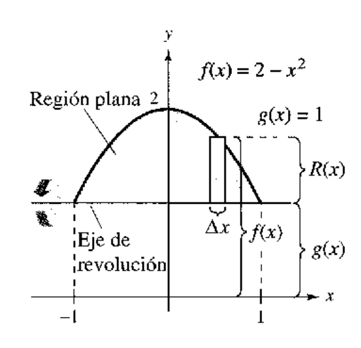
$$\begin{aligned} V = \pi\int_a^b [R(x)]^2\, dx &= \pi\int_0^{\pi} \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} && \text{Integrar.} \\ &= \pi(1 + 1) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por

$$f(x) = 2 - x^2$$

y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$, como se muestra en la figura 7.17.



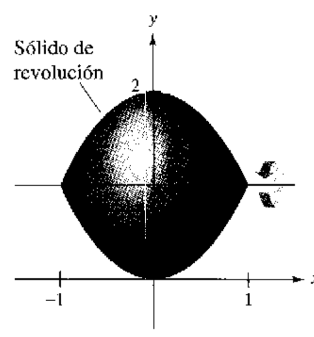


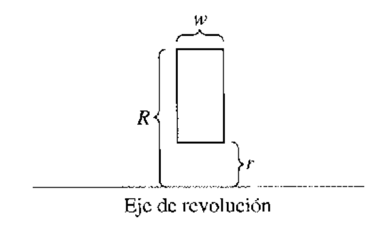
Figura 7.17

Solución Igualando $f(x)$ y $g(x)$, se puede determinar que las dos gráficas se intersecan cuando $x = \pm 1$. Para encontrar el radio, restar $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Por último, integrar entre -1 y 1 para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V = \pi\int_a^b [R(x)]^2\, dx &= \pi\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi\int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$



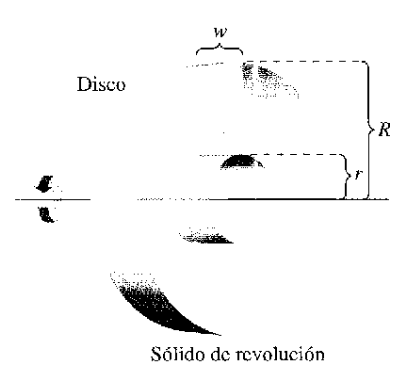


Figura 7.18

El método de las arandelas o del anillo

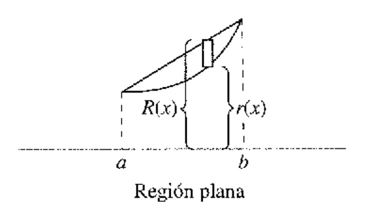
El método de los discos puede extenderse para cubrir sólidos de revolución huecos reemplazando el disco con una **arandela** o anillo. La arandela se forma al girar un rectángulo alrededor del eje, como se muestra en la figura 7.18. Si r y R son los radios interiores y exteriores de la arandela y w es la anchura, el volumen está dado por

$$\text{Volumen de la arandela o anillo} = \pi(R^2 - r^2)w.$$

Para ver cómo este concepto puede usarse para encontrar el volumen de un sólido de revolución, considerar una región acotada por un **radio exterior** $R(x)$ y un **radio interior** $r(x)$, como se muestra en la figura 7.19. Si la región se gira alrededor de su eje de revolución, el volumen del sólido resultante está dado por

$$V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx. \qquad \text{Método de las arandelas.}$$

Observar que la integral que contiene el radio interior representa el volumen del hueco y se resta de la integral que contiene el radio exterior.



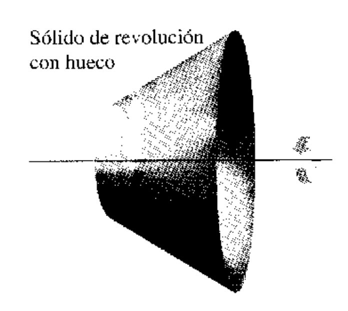
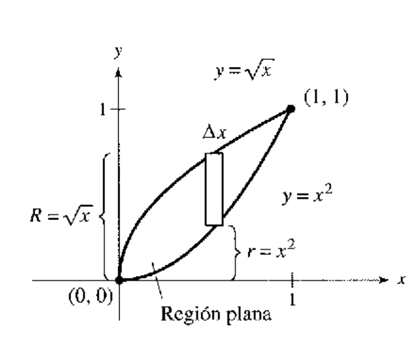


Figura 7.19



EJEMPLO 3 Uso del método de las arandelas o del anillo

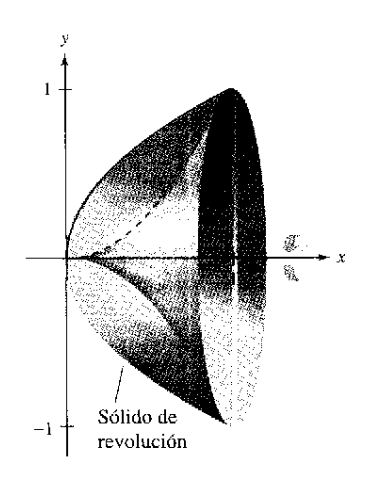
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura 7.20.

Solución En la figura 7.20, se puede observar que los radios exteriores e interiores son:

$$R(x) = \sqrt{x} \qquad \text{Radio exterior.}$$
$$r(x) = x^2 \qquad \text{Radio interior.}$$

Integrando entre 0 y 1 produce

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx && \text{Aplicar el método de las arandelas.}\\ &= \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right] dx \\ &= \pi\int_0^1 (x - x^4)\,dx && \text{Simplificar.}\\ &= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$



Sólido de revolución
Figura 7.20

Hasta ahora, en cada ejemplo el eje de revolución ha estado horizontal y se integraba con respecto a x. En el próximo ejemplo, el eje de revolución será vertical y se integrará con respecto a y. En este ejemplo, se necesita efectuar dos integrales separadas para calcular el volumen.

EJEMPLO 4 Integración en y, con dos integrales

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$ alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.21.

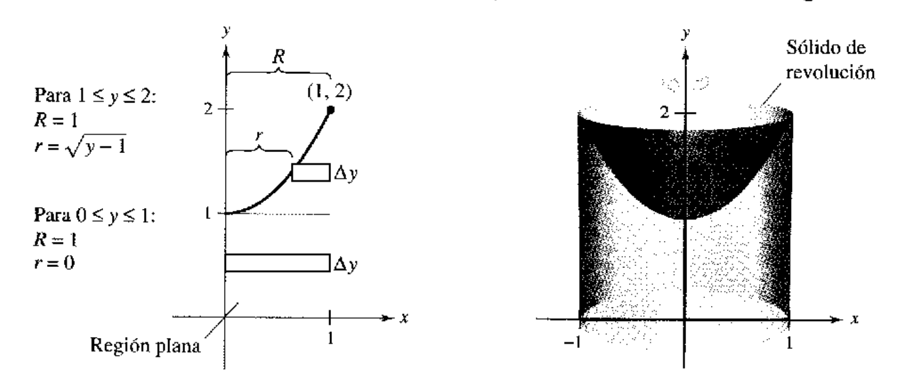


Figura 7.21

Solución Para la región mostrada en la figura 7.21, el radio exterior es $R = 1$. No hay, sin embargo, una fórmula única que represente el radio interior. Cuando $0 \le y \le 1$, $r = 0$, pero cuando $1 \le y \le 2$, r es determinado por la ecuación $y = x^2 + 1$ lo cual implica que $r = \sqrt{y - 1}$.

$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y-1}, & 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

Usando esta definición del radio interior, se utilizan dos integrales para encontrar el volumen.

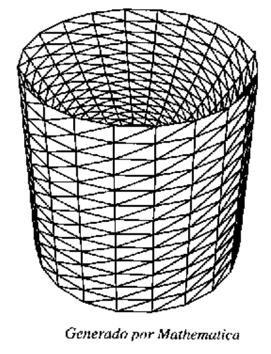
$$V = \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right]dy \qquad \text{Aplicar el método de las arandelas.}$$

$$= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2 - y)\,dy \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

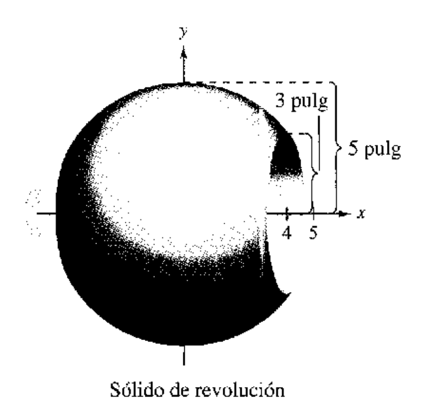
Observar que la primera integral $\pi\int_0^1 1\,dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1. Esta porción del volumen podría ser determinada sin recurrir a la integración.



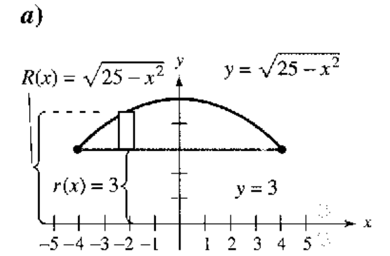
Generado por Mathematica

Figura 7.22

TECNOLOGÍA Algunas calculadoras tienen la capacidad para generar (o tienen el software capaz de generar) un sólido de revolución. Si tiene acceso a esta herramienta, usarla para hacer la gráfica de algunos de los sólidos de revolución descritos en esta sección. Por ejemplo, el sólido en el ejemplo 4 podría aparecer como el mostrado en la figura 7.22.



a)



b)

Figura 7.23

EJEMPLO 5 Diseño de manufactura

Un fabricante taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de 5 pulgadas de radio, como se muestra en la figura 7.23*a*. El orificio tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto de metal resultante?

Solución Puede imaginar el objeto generado por un segmento de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$, como se muestra en la figura 7.23*b*). Porque el radio del orificio es 3 pulgadas, sea $y = 3$ se resuelve la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Así que, los radios interiores y exteriores son $r(x) = 3$ y $R(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y el volumen está dado por

$$V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx = \pi\int_{-4}^{4} \left[\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 - (3)^2\right] dx$$

$$= \pi\int_{-4}^{4} (16 - x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4}$$

$$= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas.}$$

Sólidos con secciones transversales conocidas

Con el método de los discos, se puede encontrar el volumen de un sólido teniendo una sección transversal circular cuya área es $A = \pi R^2$. Este método puede generalizarse para los sólidos cuyas secciones, que son arbitrarias, sean de área conocida. Algunas secciones transversales comunes son cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

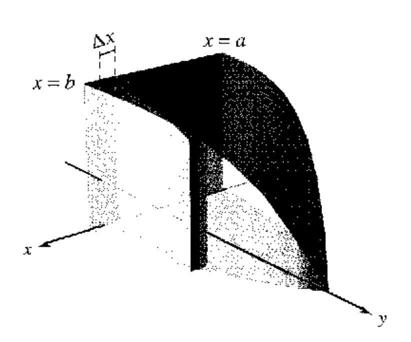
Volumen de sólidos con secciones transversales conocidas

1. Para secciones transversales de área $A(x)$ perpendiculares al eje x,

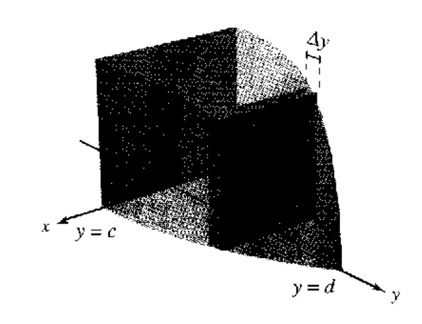
$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\,dx. \qquad \text{Ver figura 7.24}a.$$

2. Para secciones transversales de área $A(y)$ perpendiculares al eje y,

$$\text{Volumen} = \int_c^d A(y)\,dy. \qquad \text{Ver figura 7.24}b.$$



a) Secciones transversales perpendiculares al eje x
Figura 7.24



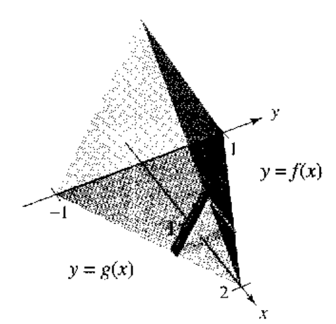
b) Secciones transversales perpendiculares al eje y
Figura 7.24

EJEMPLO 6 Secciones transversales triangulares

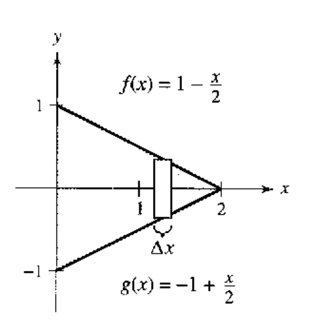
Encontrar el volumen del sólido mostrado en la figura 7.25. La base del sólido es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad g(x) = -1 + \frac{x}{2}, \quad \text{y} \quad x = 0.$$

Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.



Las secciones transversales son triángulos equiláteros



Base triangular en el plano xy
Figura 7.25

Solución La base y el área de cada sección transversal triangular son:

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \qquad \text{Longitud de la base.}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \qquad \text{Área de triángulo equilátero.}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \qquad \text{Área de sección transversal.}$$

Porque x varía entre 0 a 2, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\,dx$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(2 - x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

EJEMPLO 7 Una aplicación geométrica

Demostrar que el volumen de una pirámide con una base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h es la altura de la pirámide y B es el área de la base.

Solución Como se muestra en la figura 7.26, se puede cortar o intersecar la pirámide con un plano de altura paralelo a la base a la altura y para formar una sección transversal cuadrada cuyos lados son de longitud b'. Por semejanza de triángulos, se puede mostrar que

$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \quad \text{o} \quad b' = \frac{b}{h}(h - y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Así,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2.$$

Integrando entre 0 y h se obtiene

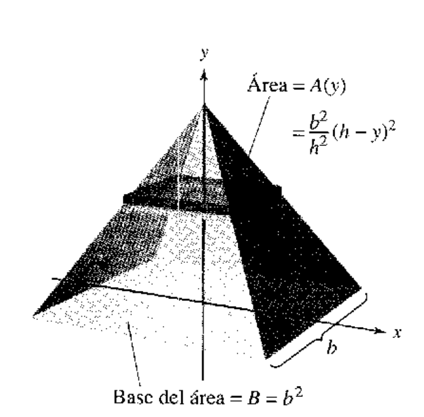
$$V = \int_0^h A(y)\,dy = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2\,dy$$

$$= \frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h - y)^2\,dy$$

$$= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right)\left[\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{b^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}hB. \qquad B = b^2.$$



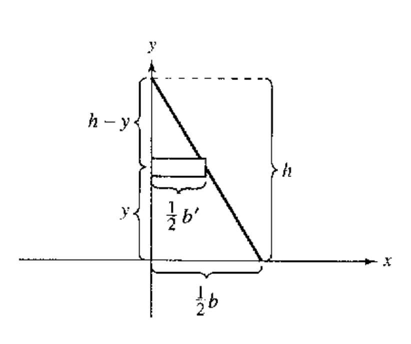
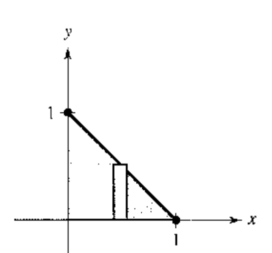


Figura 7.26

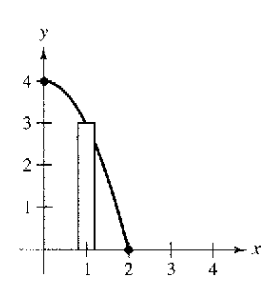
Ejercicios de la sección 7.2

En los ejercicios 1 a 6, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje x.

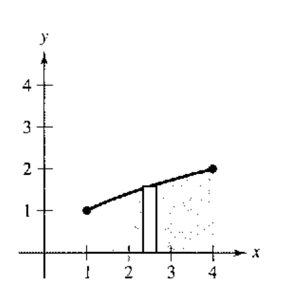
1. $y = -x + 1$



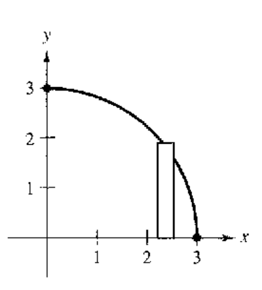
2. $y = 4 - x^2$



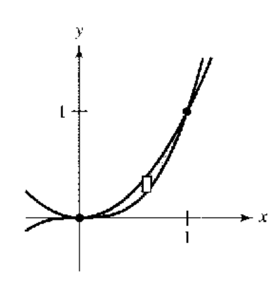
3. $y = \sqrt{x}$

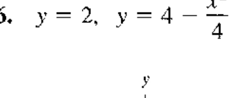


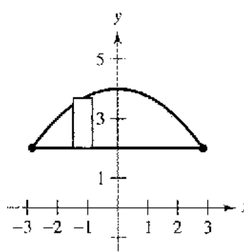
4. $y = \sqrt{9 - x^2}$



5. $y = x^2,\ y = x^3$

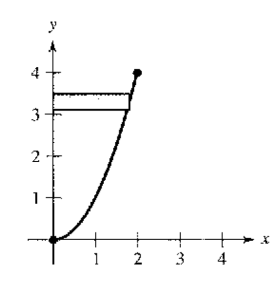


6.  $y = 2,\ \ y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$

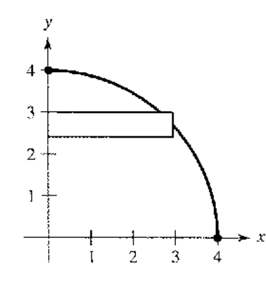


En los ejercicios 7 a 10, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y.

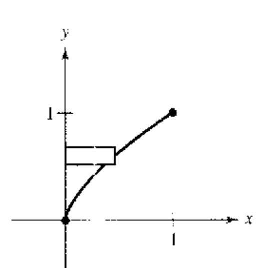
7. $y = x^2$



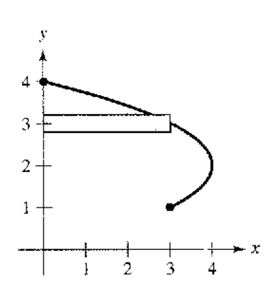
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



En los ejercicios 11 a 14, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de las rectas dadas.

11. $y = \sqrt{x},\ \ y = 0,\ \ x = 4$
    a) el eje x *b*) el eje y
    c) la recta $x = 4$ *d*) la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2,\ \ y = 0,\ \ x = 2$
    a) el eje y *b*) el eje x
    c) la recta $y = 8$ *d*) la recta $x = 2$

13. $y = x^2,\ \ y = 4x - x^2$
    a) el eje x *b*) la recta $y = 6$

14. $y = 6 - 2x - x^2,\ \ y = x + 6$
    a) el eje x *b*) la recta $y = 3$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $y = 4$.

15. $y = x,\ \ y = 3,\ \ x = 0$

16. $y = \frac{1}{2}x^3,\ \ y = 4,\ \ x = 0$

17. $y = \dfrac{1}{1 + x},\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = 3$

18. $y = \sec x,\ \ y = 0,\ \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 19 a 22, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $x = 6$.

19. $y = x,\ \ y = 0,\ \ y = 4,\ \ x = 6$

20. $y = 6 - x,\ \ y = 0,\ \ y = 4,\ \ x = 0$

21. $x = y^2,\ \ x = 4$

22. $xy = 6,\ \ y = 2,\ \ y = 6,\ \ x = 6$

En los ejercicios 23 a 30, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje x.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}},\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = 3$

24. $y = x\sqrt{4 - x^2},\ \ y = 0$

25. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

26. $y = \dfrac{3}{x+1}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 8$

27. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = e^{x/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

29. $y = x^2 + 1, \quad y = -x^2 + 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 3$

30. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\frac{1}{2}x + 4, \quad x = 0, \quad x = 8$

En los ejercicios 31 y 32, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *y*.

31. $y = 3(2 - x), \quad y = 0, \quad x = 0$

32. $y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3$

En los ejercicios 33 a 36, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *x*. Verificar los resultados usando la calculadora.

33. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

34. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

35. $y = e^{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

36. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

En los ejercicios 37 a 40, usar la calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de *x*.

37. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

38. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$

39. $y = 2\arctan(0.2x), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 5$

40. $y = \sqrt{2x}, \quad y = x^2$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 41 y 42, la integral representa el volumen de un sólido. Describir el sólido.

41. $\pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

42. $\pi \displaystyle\int_2^4 y^4\, dy$

Para pensar **En los ejercicios 43 y 44, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *x*. (Hacer la selección con base en un diagrama del sólido sin realizar ningún cálculo.)**

43. $y = e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

a) 3 *b)* −5 *c)* 10 *d)* 7 *e)* 20

44. $y = \arctan x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

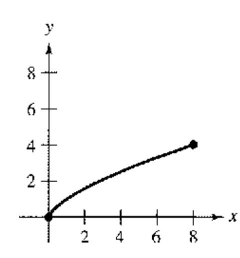
a) 10 *b)* $\frac{3}{4}$ *c)* 5 *d)* −6 *e)* 15

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

45. Una región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x gira alrededor del eje x. Una segunda región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y eje x se gira alrededor del eje x. Sin integrar, ¿cómo se comparan los volúmenes de los sólidos? Explicar.

46. La región en la figura se gira alrededor del eje y recta indicada. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a mayor. Explicar el razonamiento.

a) eje x *b)* eje y *c)* $x = 8$



47. Si la porción de la recta $y = \frac{1}{2}x$ que queda en el primer cuadrante se gira alrededor del eje x, se genera un cono. Encontrar el volumen del cono que se extiende de $x = 0$ a $x = 6$.

48. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, dónde r es el radio de la base y h es la altura.

49. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de una esfera $\frac{4}{3}\pi r^3$.

50. Una esfera de radio r es cortada por un plano situado h $(h < r)$ unidades sobre el ecuador. Encontrar el volumen del sólido (el segmento esférico) sobre el plano.

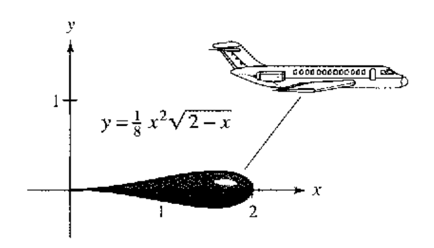
51. Un cono de altura H con una base de radio r es cortado en un plano paralelo a la base y situado h unidades sobre ella. Encontrar el volumen del sólido (el tronco de un cono) que queda debajo del plano.

52. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 4$ se gira alrededor del eje x.

a) Encontrar el valor de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide el sólido en dos partes de volumen igual.

b) Encontrar los valores de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide al sólido en tres partes de volumen igual.

53. ***El volumen de un tanque de combustible*** Un tanque en el ala de un avión de motor de reacción tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2 - x}$ y el eje x alrededor del eje x (véase la figura), donde x y y son medidos en metros. Encontrar el volumen del tanque.



54. ***El volumen de un recipiente de vidrio*** Un recipiente de vidrio se modela al girar la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2.2x^2 + 10.9x + 22.2}, & 0 \le x \le 11.5 \\ 2.95, & 11.5 < x \le 15 \end{cases}$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en centímetros. Representar la función en la computadora y encontrar el volumen del recipiente.

55. Encontrar el volumen del sólido generado si la mitad superior de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ se gira sobre *a*) el eje x para formar un esferoide prolato (en forma de un balón de rugby), y *b*) el eje y para formar un esferoide oblato (en forma de la mitad de un dulce).

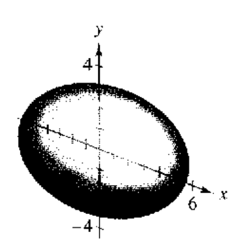


Figura para 55*a*

Figura para 55*b*

56. ***Volumen mínimo*** El arco de

$$y = 4 - \frac{x^2}{4}$$

en el intervalo $[0, 4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$ (véase la figura).

a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b.

b) Representar la función en una calculadora para el apartado *a*), y usar la gráfica para aproximar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido.

c) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado *b*).

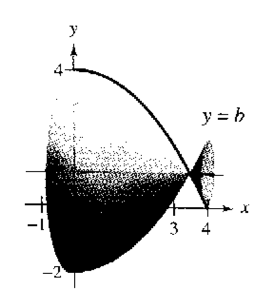


Figura para 56

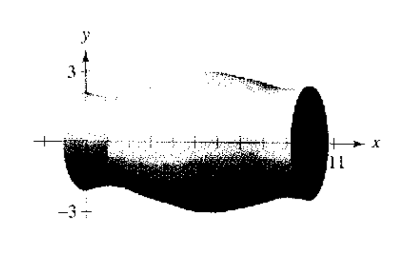


Figura para 58

57. ***Profundidad del agua en un tanque*** Un tanque de agua es una esfera de 50 pies de radio. Determinar las profundidades del agua cuando el tanque se llena a un cuarto y tres cuartos de su capacidad total. (*Nota:* Calcular la raíz en una computadora después de evaluar la integral definida.)

58. ***Modelo matemático*** A un dibujante se le pide determinar la cantidad de material requerida para producir una pieza de una máquina (véase la figura en la primera columna). Los diámetros d de la pieza en los puntos x uniformemente espaciados se listan en la tabla. Las medidas están dadas en centímetros.

x	0	1	2	3	4	5
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7

x	6	7	8	9	10
d	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

a) Usar estos datos con la regla de Simpson para aproximar el volumen de la pieza.

b) Usar regresión en una calculadora para encontrar un polinomio de cuarto grado a través de los puntos que representan el radio del sólido. Trazar los datos y el modelo.

c) Usar una calculadora para aproximar la integral definida que da el volumen de la pieza. Comparar el resultado con la respuesta del apartado *a*).

59. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cilindro circular recto *b*) Elipsoide

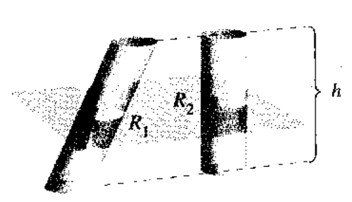
c) Esfera *d*) Cono circular recto *e*) Toro

i) $\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$ *ii*) $\pi \int_0^h r^2\,dx$

iii) $\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$ *iv*) $\pi \int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

v) $\pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

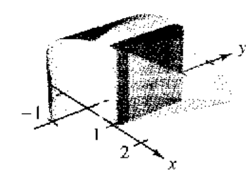
60. ***El teorema de Cavalieri*** Demostrar que si la altura de dos sólidos son iguales y todas las secciones del plano paralelas a sus bases y a distancias iguales de sus bases tienen áreas iguales, entonces los sólidos tienen el mismo volumen (véase la figura).

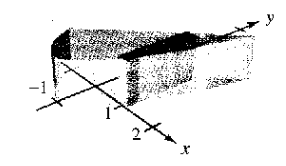


Área de R_1 = área de R_2

61. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$, con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados *b*) Rectángulos de altura 1



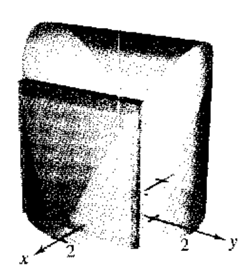


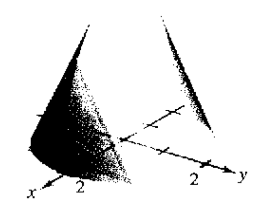
62. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por el círculo

$x^2 + y^2 = 4$

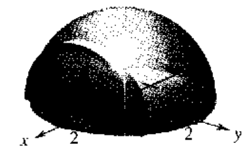
con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

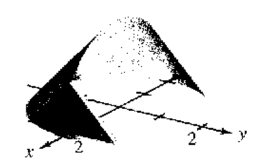
a) Cuadrados *b)* Triángulos equiláteros





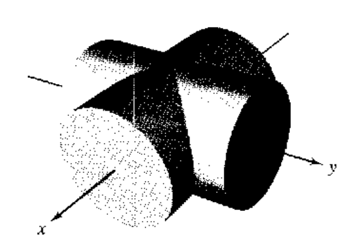
c) Semicírculos *d)* Triángulos isósceles rectos



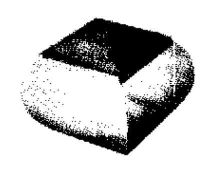


63. La base de un sólido es limitada por $y = x^3$, $y = 0$, y $x = 1$. Encontrar el volumen del sólido para cada una de las secciones transversales siguientes (perpendiculares al eje y): *a)* cuadrados, *b)* semicírculos, *c)* triángulos equiláteros, y *d)* semielipses cuyas alturas son dos veces las longitudes de sus bases.

64. Encontrar el volumen del sólido de intersección (el sólido común a ambos) de los cilindros circulares rectos de radio r cuyos ejes se encuentran en los ángulos rectos (véase la figura).



Intersección de dos cilindros



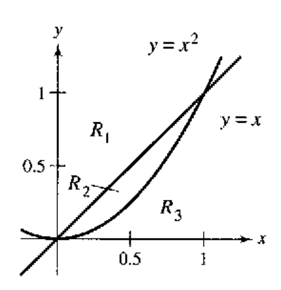
Sólido de intersección

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, véase el artículo "Estimating the Volumes of Solid Figures with Curves Surfaces", por Donald Cohen en *Mathematics Teacher*.

65. Un operario taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de radio R. El orificio tiene un radio r. Encontrar el volumen del anillo resultante.

66. Para la esfera de metal del ejercicio 65, sea $R = 5$. ¿Qué valor de r producirá un anillo cuyo volumen es exactamente la mitad del volumen de la esfera?

En los ejercicios 67 a 74, encontrar el volumen generado al girar la región dada alrededor de la recta especificada.

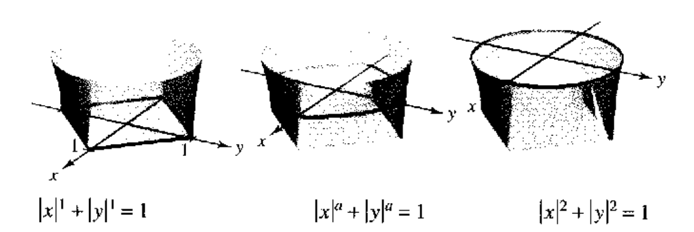


67. R_1 alrededor de $x = 0$	**68.** R_1 alrededor de $x = 1$
69. R_2 alrededor de $y = 0$	**70.** R_2 alrededor de $y = 1$
71. R_3 alrededor de $x = 0$	**72.** R_3 alrededor de $x = 1$
73. R_2 alrededor de $x = 0$	**74.** R_2 alrededor de $x = 1$

75. El sólido mostrado en la figura tiene las secciones transversales acotadas por la gráfica $|x|^a + |y|^a$, donde $1 \le a \le 2$.

a) Describir la sección tranversal cuando $a = 1$ y $a = 2$.

b) Describir un procedimiento para aproximar el volumen del sólido.



76. Dos planos cortan un cilindro circular recto para formar una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo forma un ángulo de θ grados con el primero (ver la figura).

a) Encontrar el volumen de la cuña si $\theta = 45°$.

b) Encontrar el volumen de la cuña para un ángulo θ arbitrario. Asumiendo que el cilindro tiene la longitud suficiente. ¿Cómo cambia el volumen de la cuña cuando θ aumenta de 0° a 90°?

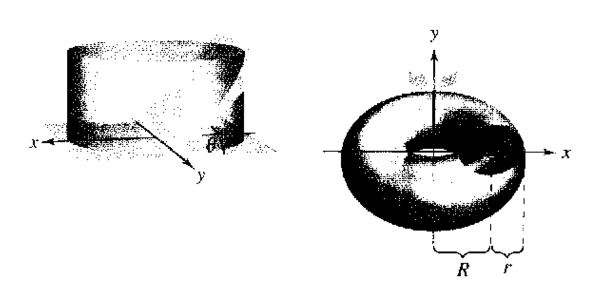


Figura para 76 **Figura para 77**

77. *a)* Demostrar que el volumen del toro está dado por la integral $8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$, donde $R > r > 0$.

b) Encontrar el volumen del toro.

Sección 7.3 Volumen: el método de las capas

- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución mediante el método de las capas.**
- **Comparar los usos del método de los discos y el método de las capas.**

El método de las capas

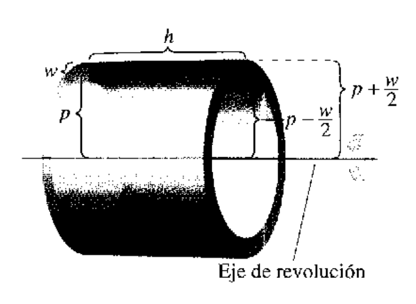


Figura 7.27

En esta sección, se estudiará un método alternativo para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Este método se llama el **método de las capas** porque usa capas cilíndricas. Una comparación de las ventajas de los métodos de los discos y de las capas se da más adelante en esta sección.

Para empezar, considerar un rectángulo representativo como se muestra en la figura 7.27, donde w es la anchura del rectángulo. h es la altura, y p es la distancia entre el eje de revolución y el *centro* del rectángulo. Cuando este rectángulo gira alrededor de su eje de revolución, forma una capa cilíndrica (o tubo) de espesor w. Para encontrar el volumen de esta capa, considerar dos cilindros. El radio del cilindro más grande corresponde al radio exterior de la capa y el radio del cilindro más pequeño corresponde al radio interno de la capa. Porque p es el radio medio de la capa, se sabe que el radio exterior es $p + (w/2)$ y el radio interno es $p - (w/2)$.

$$p + \frac{w}{2} \qquad \text{Radio externo}$$

$$p - \frac{w}{2} \qquad \text{Radio interno.}$$

Así que, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned}\text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco})\\ &= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h\\ &= 2\pi phw\\ &= 2\pi\,(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})\end{aligned}$$

Esta fórmula se puede usar para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Asumir que la región plana en la figura 7.28 gira alrededor de una recta para formar el sólido indicado. Si se considera un rectángulo horizontal de anchura Δy, entonces, cuando la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x, el rectángulo genera una capa representativa cuyo volumen es

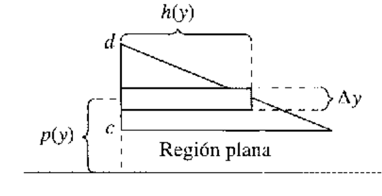
$$\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\,\Delta y.$$

Se puede aproximar el volumen del sólido por n capas de espesor Δy, de altura $h(y_i)$ y radio medio $p(y_i)$.

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y = 2\pi\sum_{i=1}^{n}[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y$$

Esta aproximación parece mejorar al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n}[p(y_i)h(y_i)]\\ &= 2\pi\int_c^d [p(y)h(y)]\,dy.\end{aligned}$$



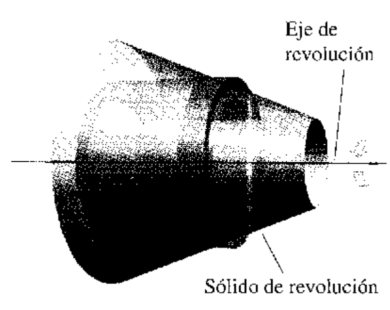
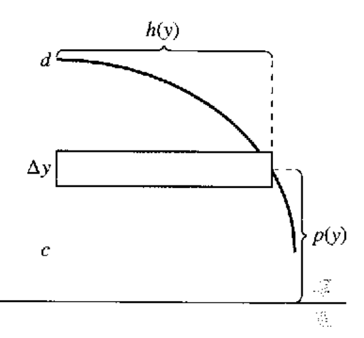


Figura 7.28

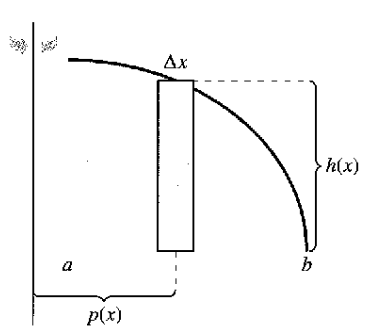
El método de las capas

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de las capas**, usar alguna de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.29.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy$	$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical

Figura 7.29

EJEMPLO 1 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por

$$y = x - x^3$$

y el eje x $(0 \leq x \leq 1)$ alrededor del eje y.

Solución Porque el eje de revolución es vertical, usar un rectángulo representativo vertical, como se muestra en la figura 7.30. La anchura Δx indica que x es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es

$$h(x) = x - x^3.$$

Porque x varía de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx &= 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas.} \\
&= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2)\,dx && \text{Simplificar.} \\
&= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 && \text{Integrar.} \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Figura 7.30

EJEMPLO 2 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$x = e^{-y^2}$$

y el eje y $(0 \le y \le 1)$ alrededor del eje x.

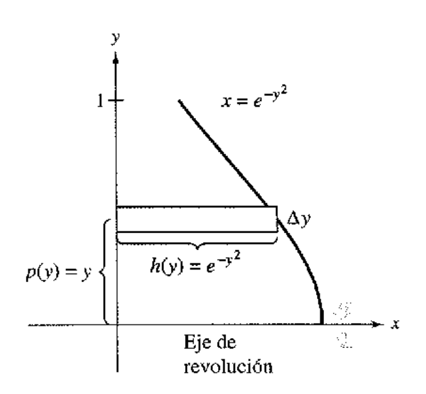


Figura 7.31

Solución Porque el eje de revolución es horizontal, usar un rectángulo representativo horizontal, como se muestra en la figura 7.31. La anchura Δy indica que y es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Porque y va de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy = 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2}\,dy && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= -\pi\Big[e^{-y^2}\Big]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &\approx 1.986. \end{aligned}$$

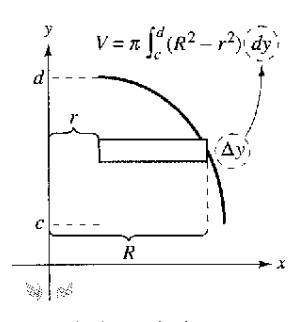
NOTA Para apreciar la ventaja de usar el método de las capas en el ejemplo 2, resolver la ecuación $x = e^{-y^2}$ para y.

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/e \\ \sqrt{-\ln x}, & 1/e < x \le 1 \end{cases}$$

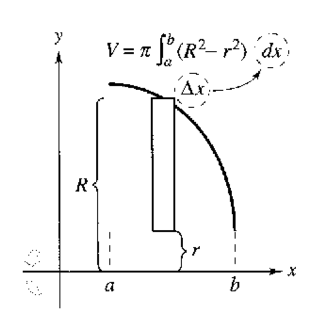
Entonces usar esta ecuación para encontrar el volumen del sólido utilizando el método de los discos.

Comparación de los métodos de los discos y de las capas

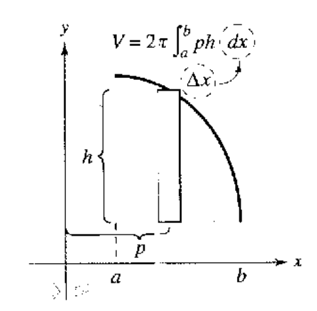
Los métodos de los discos y de las capas pueden distinguirse porque para usar el método de los discos, el rectángulo representativo siempre es *perpendicular* al eje de revolución, y para el método de las capas, el rectángulo representativo siempre es *paralelo* al eje de revolución, como se muestra en la figura 7.32.



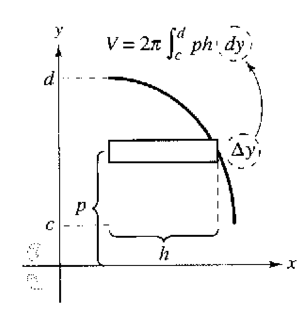
Eje de revolución vertical



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical



Eje de revolución horizontal

Método del disco: El rectángulo representativo es perpendicular al eje de revolución

Método de las capas: El rectángulo representativo es paralelo al eje de revolución

Figura 7.32

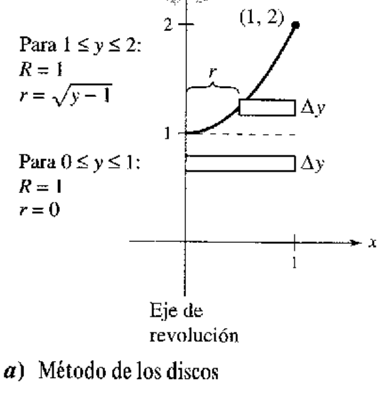
A menudo, es más conveniente usar un método que el otro. El ejemplo siguiente ilustra un caso en que el método de las capas es preferible.

EJEMPLO 3 Caso en que es preferible el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad \text{y} \quad x = 1$$

alrededor del eje y.



a) Método de los discos

b) Método de las capas

Figura 7.33

Solución En el ejemplo 4 en la sección precedente, se observó que el método de las arandelas requiere dos integrales para determinar el volumen de este sólido. Ver la figura 7.33*a*.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi \int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy && \text{Aplicar el método de las arandelas o del anillo.}\\
&= \pi \int_0^1 1\,dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\,dy && \text{Simplificar.}\\
&= \pi \Big[y\Big]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 && \text{Integrar.}\\
&= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

En la figura 7.33*b*, se puede observar que el método de las capas requiere sólo una integral para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas o del anillo.}\\
&= 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1)\,dx\\
&= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\
&= 2\pi\left(\frac{3}{4}\right)\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Si la región del ejemplo 3 se hiciese girar alrededor de la recta vertical $x = 1$, ¿el sólido de revolución resultante habría tenido un volumen mayor o un volumen menor que el sólido en el ejemplo 3? Sin integrar, se puede razonar que el sólido resultante tendría un volumen menor porque "más" de la región que gira quedaría más cercana al eje de revolución. Para confirmar esto, se debe calcular la integral siguiente, la cual da el volumen del sólido.

$$V = 2\pi \int_0^1 (1 - x)(x^2 + 1)\,dx \qquad p(x) = 1 - x.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre los métodos de los discos y de las capas, véase el artículo "The Disk and Shell Method" por Charles A. Cable en *The American Mathematical Monthly*.

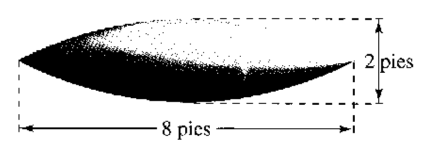


Figura 7.34

EJEMPLO 4 Volumen de un pontón

Un pontón se ha hecho en la forma mostrada en la figura 7.34. El pontón se diseña girando la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \qquad -4 \le x \le 4$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en pies. Encontrar el volumen del pontón.

Solución Ver la figura 7.35*a* y usar

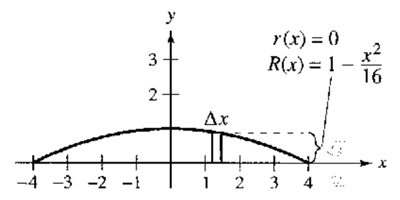
$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx \qquad \text{Aplicar el método de los discos.}$$

$$= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx \qquad \text{Simplificar.}$$

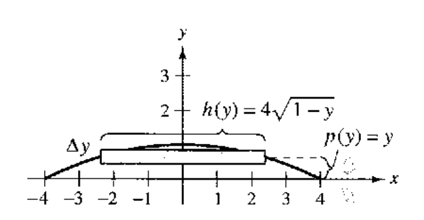
$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1\,280}\right]_{-4}^{4} \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{64\pi}{15} \approx 13.4 \text{ pies cúbicos}$$

Probar usando la figura 7.35*b* para formular la integral para el volumen mediante el método de las capas. ¿La integral parece más complicada?



***a*)** Método de los discos



***b*)** Método de las capas
Figura 7.35

Para el método de las capas en el ejemplo 4, se tendría que resolver para x en términos de y en la ecuación

$$y = 1 - (x^2/16).$$

A veces, despejar x es muy difícil (o incluso imposible). En tales casos se debe usar un rectángulo vertical (de anchura Δx), haciendo así la variable de integración a x. La posición (horizontal o vertical) del eje de revolución determina el método a utilizar. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Caso en que es necesario el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$, como se muestra en la figura 7.36.

Solución En la ecuación $y = x^3 + x + 1$, no se puede resolver fácilmente para x en términos de y. (Ver la sección 3.8 en el método de Newton.) Por consiguiente, la variable de integración debe ser x, y elegir un rectángulo representativo vertical. Porque el rectángulo es paralelo al eje de revolución, usar el método de las capas y obtener

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 (2 - x)(x^3 + x + 1 - 1)\,dx \qquad \text{Aplicar el método de las capas.}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)\,dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 \qquad \text{Integrar.}$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{29\pi}{15}.$$

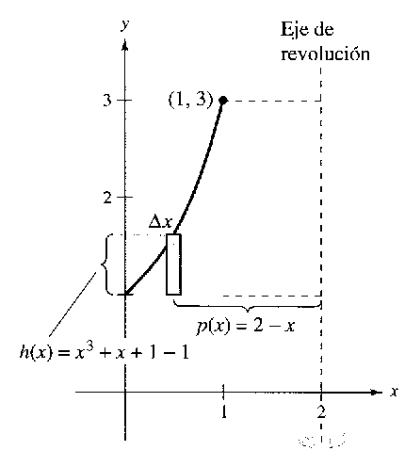
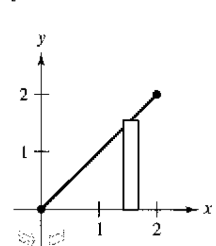


Figura 7.36

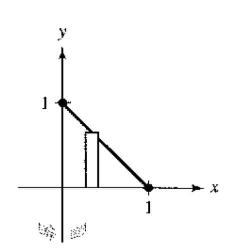
Ejercicios de la sección 7.3

En los ejercicios 1 a 12, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje y.

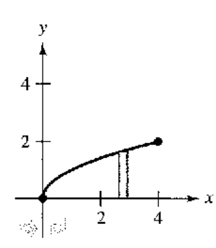
1. $y = x$



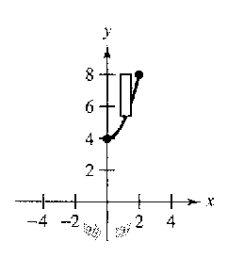
2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



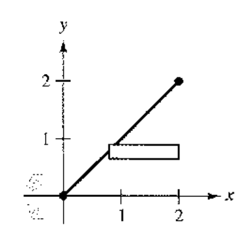
4. $y = x^2 + 4$



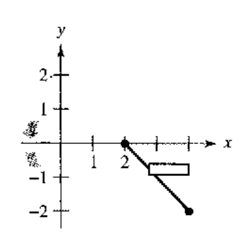
5. $y = x^2,\quad y = 0,\quad x = 2$
6. $y = \frac{1}{2}x^2,\quad y = 0,\quad x = 6$
7. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$
8. $y = 4 - x^2,\quad y = 0$
9. $y = 4x - x^2,\quad x = 0,\quad y = 4$
10. $y = 2x,\quad y = 4,\quad x = 0$
11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$
12. $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = \pi$

En los ejercicios 13 a 20, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje x.

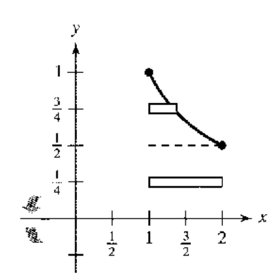
13. $y = x$



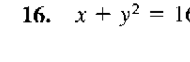
14. $y = 2 - x$

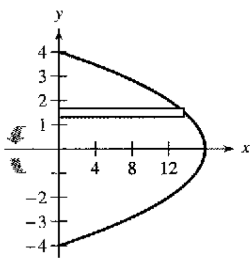


15. $y = \dfrac{1}{x}$



16. $x + y^2 = 16$





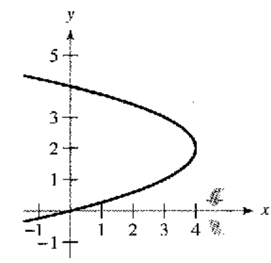
17. $y = x^3,\quad x = 0,\quad y = 8$
18. $y = x^2,\quad x = 0,\quad y = 9$
19. $x + y = 4,\quad y = x,\quad y = 0$
20. $y = \sqrt{x + 2},\quad y = x,\quad y = 0$

En los ejercicios 21 a 24, usar el método de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor de la recta dada.

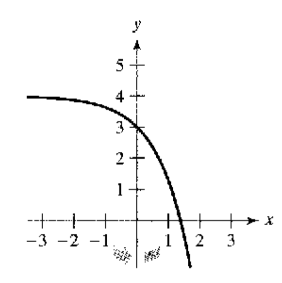
21. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 4$
22. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 2$
23. $y = 4x - x^2,\quad y = 0$, alrededor de la recta $x = 5$
24. $y = \sqrt{x},\quad y = 0,\quad x = 4$, alrededor de la recta $x = 6$

En los ejercicios 25 y 26, decidir si es más conveniente usar el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del sólido de revolución. Explicar el razonamiento. (No encontrar el volumen.)

25. $(y - 2)^2 = 4 - x$



26. $y = 4 - e^x$



En los ejercicios 27 a 30, usar el método de los discos *o* el de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de cada recta dada.

27. $y = x^3,\quad y = 0,\quad x = 2$
 a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = 4$
28. $y = \dfrac{10}{x^2},\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 5$
 a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $y = 10$
29. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2},\quad x = 0,\quad y = 0$
 a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = a$

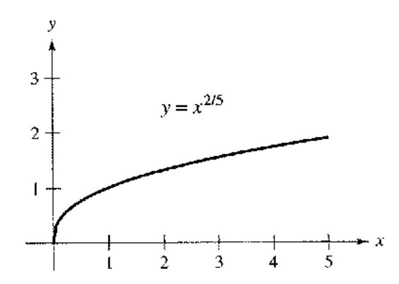
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ (hipocicloide)
a) el eje x *b*) el eje y

Desarrollo de conceptos

31. Considerar un sólido que se genera al girar una región plana alrededor del eje y. Describir la posición de un rectángulo representativo al usar *a*) el método de las capas y *b*) el método de los discos para encontrar el volumen del sólido.

32. La región en la figura gira alrededor del eje y recta indicados. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a más grande. Explicar el razonamiento.

a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = 5$



En los ejercicios 33 y 34, dar un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen valores iguales.

33. $\pi \int_1^5 (x - 1)\, dx = 2\pi \int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)]\, dy$

34. $\pi \int_0^2 [16 - (2y)^2]\, dy = 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x}{2}\right) dx$

En los ejercicios 35 a 38, *a*) usar una calculadora para hacer la gráfica de la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones, y *b*) usar calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje *y*.

35. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1,\ x = 0,\ y = 0$, primer cuadrante

36. $y = \sqrt{1 - x^3},\ y = 0,\ x = 0$

37. $y = \sqrt[3]{(x - 2)^2(x - 6)^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$

38. $y = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

Para pensar **En los ejercicios 39 y 40, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *y*. (Hacer la selección con base en un esquema del sólido y *sin* realizar ningún cálculo.)**

39. $y = 2e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$

a) $\frac{3}{2}$ *b*) -2 *c*) 4 *d*) 7.5 *e*) 15

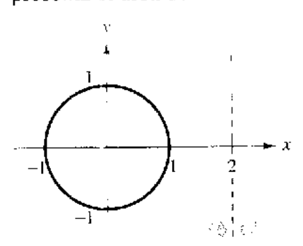
40. $y = \tan x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4}$

a) 3.5 *b*) $-\frac{9}{4}$ *c*) 8 *d*) 10 *e*) 1

41. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 2$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un cuarto del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

42. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = 0$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un tercio del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

43. ***Volumen de un toro*** Un toro se forma al girar la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$ (ver la figura). Encontrar el volumen de este sólido en "forma de rosquilla". (*Sugerencia:* La integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ representa el área de un semicírculo.)



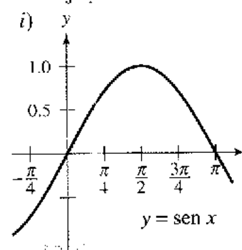
44. ***Volumen de un toro*** Repetir el ejercicio 43 para un toro formado al girar la región limitada por $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $x = R$, donde $r < R$.

45. *a*) Usar la diferenciación para verificar que

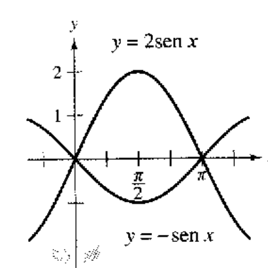
$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$$

b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y.

i)



ii)

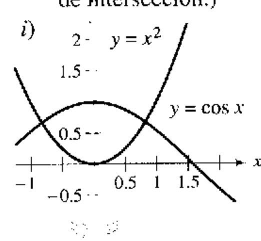


46. *a*) Usar la derivación para verificar que

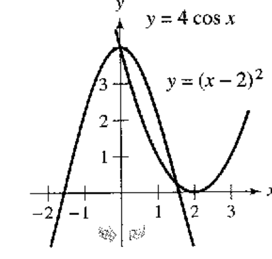
$$\int x \cos x\, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C.$$

b) Usar el resultado del inciso *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y. (*Sugerencia:* Empezar aproximando los puntos de intersección.)

i)



ii)



En los ejercicios 47 a 50, la integral representa el volumen de un sólido de revolución. Identificar *a*) la región plana que es girada y *b*) el eje de revolución.

47. $2\pi\int_0^2 x^3\,dx$

48. $2\pi\int_0^1 y - y^{3/2}\,dy$

49. $2\pi\int_0^6 (y+2)\sqrt{6-y}\,dy$

50. $2\pi\int_0^1 (4-x)e^x\,dx$

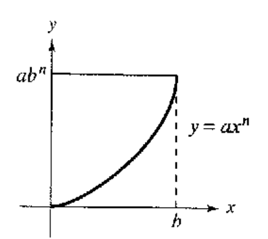
51. ***Volumen de un casquete de una esfera*** Sea una esfera de radio r que se corta por un plano, formando un casquete esférico de altura h. Mostrar que el volumen de este segmento es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$.

52. ***Volumen de un elipsoide*** Considerar el plano acotado por la región

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el volumen del elipsoide formado cuando esta región se gira alrededor del eje y es $\frac{4\pi a^2 b}{3}$.

53. ***Exploración*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = ab^n$ $y = b^n$ y $x = 0$ (ver la figura).



a) Encontrar la razón $R_1(n)$ entre el área de la región y el área del rectángulo circunscrito.

b) Encontrar $\lim_{n\to\infty} R_1(n)$ y comparar el resultado con el área del rectángulo circunscrito.

c) Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje y. Encontrar la razón $R_2(n)$ entre este volumen y el volumen del cilindro circular recto circunscrito.

d) Encontrar $\lim_{n\to\infty} R_2(n)$ y comparar el resultado con el volumen del cilindro circunscrito.

e) Usar los resultados de los apartados *b*) y *d*) para hacer una conjetura sobre la forma de la gráfica de $y = ax^n$ $(0 < x < b)$ como $n \to \infty$.

54. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cono circular recto *b*) Toro *c*) Esfera
d) Cilindro circular recto *e*) Elipsoide

i) $2\pi\int_0^r hx\,dx$

ii) $2\pi\int_0^r hx\left(1-\frac{x}{r}\right)dx$

iii) $2\pi\int_0^r 2x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

iv) $2\pi\int_0^b 2ax\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\,dx$

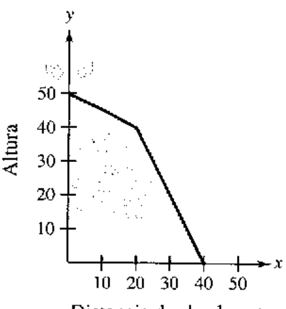
v) $2\pi\int_{-r}^r (R-x)\left(2\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$

55. ***El volumen de un cobertizo de almacenamiento*** Un cobertizo de almacenamiento tiene una base circular con diámetro de 80 pies (ver la figura). A partir del centro, su profundidad es medida cada 10 pies y registrada en la tabla.

x	0	10	20	30	40
Altura	50	45	40	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen del cobertizo.

b) Observar que la recta del tejado consiste en dos segmentos de la recta. Encontrar las ecuaciones de los segmentos de la recta y usar la integración para encontrar el volumen del cobertizo.



56. ***Modelo matemático*** Un estanque es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies (ver la figura). Empezando en el centro, la profundidad del agua es medida cada 25 pies y registrada en la tabla.

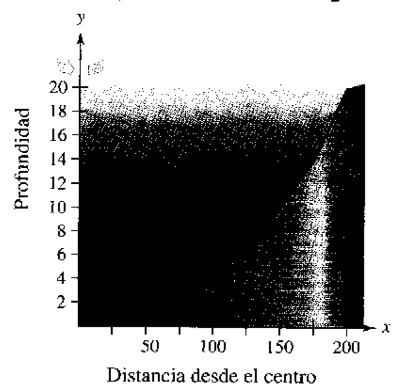
x	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Profundidad	20	19	19	17	15	14	10	6	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen de agua en el estanque.

b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar un modelo cuadrático para las profundidades registradas en la tabla. Usar la computadora para trazar las profundidades y la gráfica del modelo.

c) Usar las capacidades de la integración en una calculadora y el modelo en el apartado *b*) para aproximar el volumen de agua en el estanque.

d) Usar el resultado del apartado *c*) para aproximar el número de galones de agua en el estanque si un pie cúbico de agua es aproximadamente 7.48 galones.



57. Considerar la gráfica $y^2 = x(4 - x)^2$ (ver la figura). Encontrar los volúmenes de los sólidos que se generan cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje *x*, *b*) del eje *y*, y *c*) la recta $x = 4$.

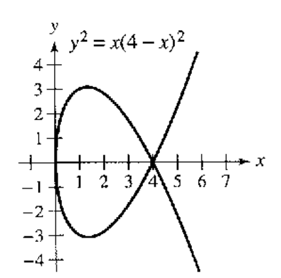


Figura para 57

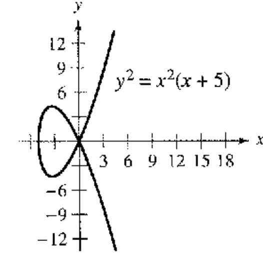


Figura para 58

58. Considerar la gráfica de $y^2 = x^2(x + 5)$ (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido que se genera cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje *x*, *b*) del eje *y* y *c*) la recta $x = -5$.

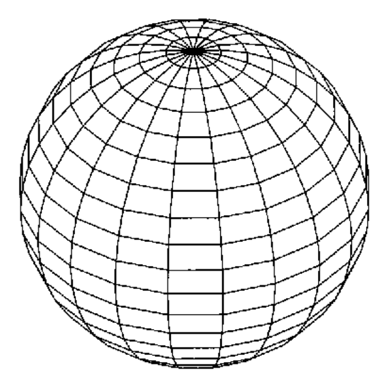
59. Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos que resultan cuando la región plana limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, y $x = c$ ($c > \frac{1}{4}$) se gira alrededor del eje *x* y el eje *y*, respectivamente. Encontrar el valor de *c* para el cual $V_1 = V_2$.

Proyecto de trabajo: Saturno

La no esfericidad de Saturno Saturno es el menos esférico de los nueve planetas en nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial es 60 268 kilómetros y su radio polar es 54 364 kilómetros. El color acentuado en la fotografía de Saturno se tomó por el Voyager 1. En la fotografía, la no esfericidad de Saturno es claramente visible.

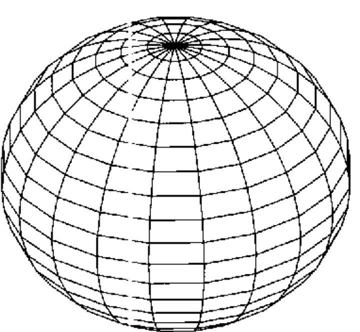
a) Encontrar la razón entre los volúmenes de la esfera y el elipsoide achatado mostrado abajo.

b) Si un planeta esférico tuviera el mismo volumen que Saturno, ¿qué radio tendría?



Modelo de computadora de un "Saturno esférico" cuyo radio ecuatorial es igual que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$x^2 + y^2 = 60\,268^2.$$



Modelo de computadora de un "Saturno achatado" cuyo radio ecuatorial es mayor que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$\frac{x^2}{60\,268^2} + \frac{y^2}{54\,364^2} = 1.$$

Sección 7.4 Longitud de arco y superficies de revolución

- **Encontrar la longitud del arco de una curva suave.**
- **Encontrar el área de una superficie de revolución.**

CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695)
El matemático holandés Christian Huygens, inventor del reloj de péndulo, y el matemático escocés James Gregory (1638-1675), contribuyeron decisivamente a resolver el problema de hallar la longitud de arco de una curva rectificable.

Longitud de arco

En esta sección se usan las integrales definidas para encontrar las longitudes de arco de las curvas y las áreas de superficies de revolución. En ambos casos, un arco (un segmento de una curva) se aproxima por segmentos de recta cuyas longitudes son dadas por la fórmula de la distancia conocida

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Una curva **rectificable** es aquella que tiene una longitud de arco finita. Se verá que una condición suficiente para que la gráfica de una función f sea rectificable entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es que f' sea continua sobre $[a, b]$. Dicha función es **continuamente derivable** sobre $[a, b]$, y su gráfica en el intervalo $[a, b]$ es una **curva suave**.

Considerar una función $y = f(x)$ tal que es continuamente derivable en el intervalo [a, b]. Se puede aproximar la gráfica de f por n segmentos de recta cuyos puntos terminales son determinados por la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

como se muestra en la figura 7.37. Sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = yi - y_{i-1}$, se puede aproximar la longitud de la gráfica por

$$\begin{aligned} s &\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i). \end{aligned}$$

Esta aproximación parece ser mejor al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, la longitud de la gráfica es

$$s = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i).$$

Porque $f'(x)$ existe para todo x en (x_{i-1}, x_i), el teorema de valor medio garantiza la existencia de c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} &= f'(c_i). \end{aligned}$$

Porque f' es continua en $[a, b]$, se tiene que $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ también es continua (y por consiguiente integrable) en $[a, b]$ lo que implica que

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (\Delta x_i) \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \end{aligned}$$

donde s es llamada la **longitud del arco** de f entre a y b.

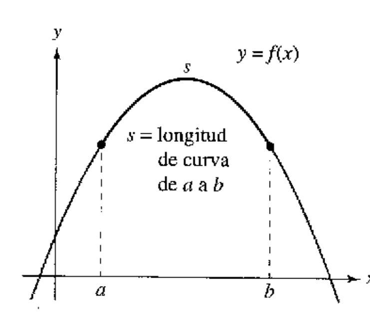


Figura 7.37

Definición de longitud de arco

Sea la función dada por $y = f(x)$ que represente una curva suave en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de f entre a y b es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

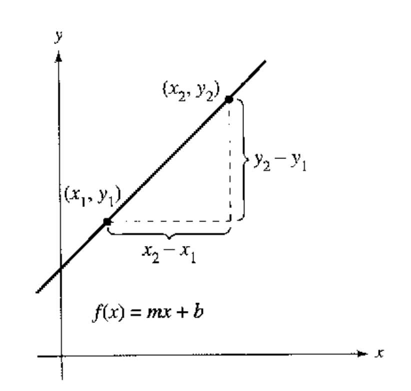
Similarmente, para una curva suave dada por $x = g(y)$, la **longitud de arco** de g entre c y d es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$

Porque la definición de longitud de arco puede aplicarse a una función lineal, es posible comprobar que esta nueva definición se corresponde con la fórmula estándar de la distancia para la longitud de un segmento de la recta. Esto se muestra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Longitud de un segmento de recta

Encontrar la longitud de arco de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) en la gráfica de $f(x) = mx + b$, como se muestra en la figura 7.38.



La longitud de arco de la gráfica f de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es igual que la fórmula estandar de la distancia
Figura 7.38

Solución Porque

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se tiene que

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{Fórmula para longitud de arco.}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}\, dx$$

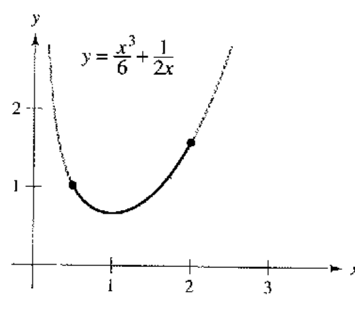
$$= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\,(x)\Bigg]_{x_1}^{x_2} \qquad \text{Integrar y simplificar.}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\,(x_2 - x_1)$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que es la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano.

TECNOLOGÍA Las integrales definidas que representen la longitud de arco a menudo son muy difíciles de evaluar. En esta sección se presentan ejemplos. En el próximo capítulo, con las técnicas de integración más avanzadas, se podrán enfrentar los problemas de longitud de arco más difíciles. Entretanto, recordar que siempre se puede usar un programa de integración numérico para aproximar una longitud de arco. Por ejemplo, usar el recurso de *integración numérica* de una calculadora para aproximar las longitudes de arco en los ejemplos 2 y 3.



La longitud de arco de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$
Figura 7.39

EJEMPLO 2 Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco del

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$, como se muestra en la figura 7.39.

Solución Usando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

se tiene una longitud de arco de

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\, dx \quad \text{Fórmula de longitud de arco.}$$

$$= \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)}\, dx$$

$$= \int_{1/2}^2 \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^2 \quad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24}\right)$$

$$= \frac{33}{16}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cómo la longitud de arco puede ser usada para definir las funciones trigonométricas, ver el artículo "Trigonometry Requires Calculus. Not Vice Versa" por Yves Nievergelt en los *UMAP Modules*.

EJEMPLO 3 Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco del $(y - 1)^3 = x^2$ en el intervalo $[0, 8]$, como se muestra en la figura 7.40.

Solución Empezar resolviendo para x en términos y: $x = \pm (y - 1)^{3/2}$. Eligiendo el valor positivo de x produce

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}(y - 1)^{1/2}.$$

El intervalo x [0,8] corresponde al intervalo y [1, 5] y la longitud de arco es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^5 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(y - 1)^{1/2}\right]^2}\, dy \quad \text{Fórmula para longitud de arco.}$$

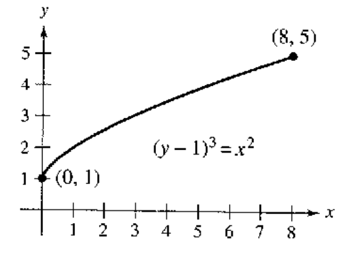
$$= \int_1^5 \sqrt{\frac{9}{4}y - \frac{5}{4}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{9y - 5}\, dy \quad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{(9y - 5)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 \quad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{27}(40^{3/2} - 4^{3/2})$$

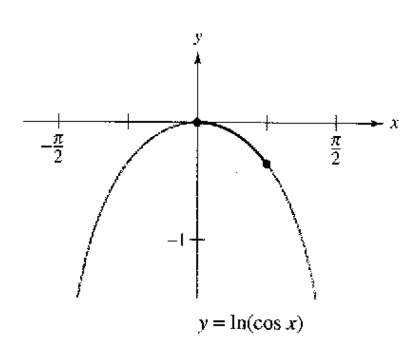
$$\approx 9.073.$$



Longitud de arco de la gráfica de y en $[0, 8]$
Figura 7.40

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco de $y = \ln(\cos x)$ de $x = 0$ para $x = \pi/4$ como se muestra en la figura 7.41.



Longitud de arco de la gráfica de y en $[0, \frac{\pi}{4}]$
Figura 7.41

Solución Usando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\tan x$$

se tiene una longitud de arco de

$$\begin{aligned} s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx && \text{Fórmula para longitud de arco.} \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx && \text{Identidad trigonométrica.} \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx && \text{Simplificar.} \\ &= \Big[\ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\pi/4} && \text{Integrar.} \\ &= \ln(\sqrt{2} + \;) - \ln 1 \\ &\approx 0.881. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Longitud de un cable

Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están a 200 pies de distancia, como se muestra en la figura 7.42. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es

$$y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) = 150 \cosh \frac{x}{150}.$$

Encontrar la longitud de arco del cable entre las dos torres.

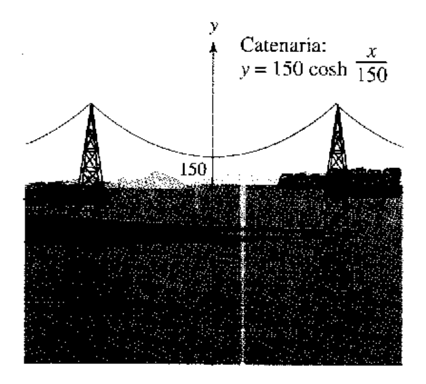


Figura 7.42

Solución Porque $y' = \frac{1}{2}(e^{x/150} - e^{-x/150})$, puede escribir

$$(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} - 2 + e^{-x/75})$$

y

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} + 2 + e^{-x/75}) = \left[\frac{1}{2}(e^{x/150} + e^{-x/150})\right]^2.$$

Por consiguiente, la longitud de arco del cable es

$$\begin{aligned} s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-100}^{100} (e^{x/150} + e^{-x/150})\, dx && \text{Fórmula para longitud de arco.} \\ &= 75\Big[e^{x/150} - e^{-x/150}\Big]_{-100}^{100} && \text{Integrar.} \\ &= 150(e^{2/3} - e^{-2/3}) \\ &\approx 215 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

En las secciones 7.2 y 7.3, la integración fue usada para calcular el volumen de un sólido de revolución. Se estudiará un procedimiento para encontrar el área de una superficie de revolución.

Definición de superficie de revolución

Si la gráfica de una función continua gira alrededor de una recta, la superficie resultante es una **superficie de revolución**.

El área de una superficie de revolución se deriva de la fórmula para el área de la superficie lateral de un tronco de un cono redondo recto. Considerar el segmento de la recta en la figura 7.43, donde L es la longitud del segmento de la recta, r_1 es el radio en el extremo izquierdo del segmento de la recta, y r_2 es el radio en el extremo derecho del segmento de la recta. Cuando el segmento de la recta gira alrededor de su eje de revolución, forma un tronco de un cono redondo recto, con

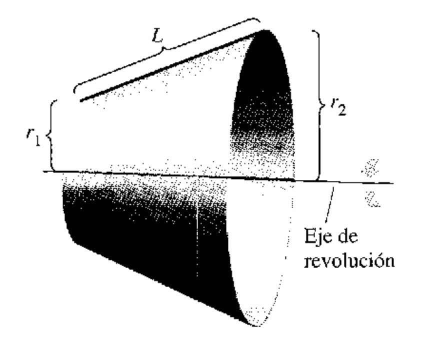


Figura 7.43

$$S = 2\pi r L \qquad \text{Área lateral del tronco.}$$

donde

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2). \qquad \text{Radio medio del tronco.}$$

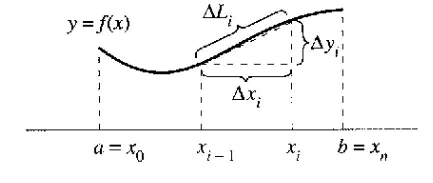
(En el ejercicio 60, se pide verificar la fórmula para S.)

Suponer que la gráfica de una función f, tiene una derivada continua en el intervalo $[a, b]$, que se gira alrededor del eje x para formar una superficie de revolución, como se muestra en la figura 7.44. Sea Δ una partición de $[a, b]$, con subintervalos de anchura Δx_i. Entonces el segmento de la recta de longitud

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

genera un tronco de un cono. Sea r_i el radio medio de este tronco. Por el teorema del valor intermedio, un punto d_i existe (en el i-ésimo subintervalo) tal que $r_i = f(d_i)$. El área de la superficie lateral ΔS_i del tronco es

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= 2\pi r_i \Delta L_i \\ &= 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.\end{aligned}$$



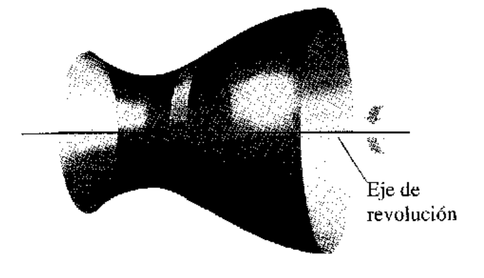
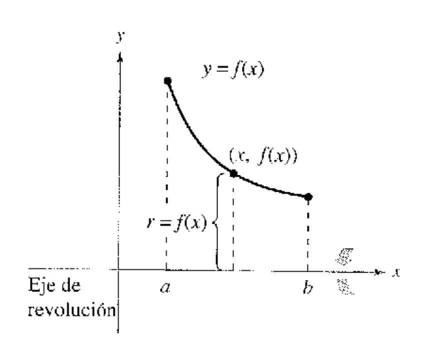


Figura 7.44



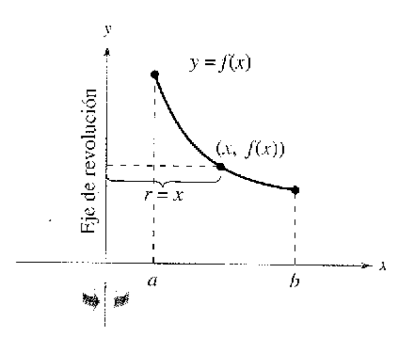


Figura 7.45

Por el teorema del valor medio, un punto c_i existe en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}.$$

Así, $\Delta S_i = 2\pi f(d_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$, y el área de la superficie total puede aproximarse por

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Puede mostrarse que el límite del miembro de la derecha como $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$ es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

De una manera similar, si la gráfica de f se gira alrededor del eje y, entonces S es

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

En ambas fórmulas para S, se pueden considerar los productos $2\pi f(x)$ y $2\pi x$ como la circunferencia del círculo trazada por un punto (x, y) en la gráfica de f al girar alrededor del eje x o y (figura 7.45). En un caso el radio es $r = f(x)$, y en el otro caso el radio es $r = x$. Es más, ajustando r apropiadamente, se puede generalizar la fórmula para el área de la superficie para cubrir *cualquier* eje horizontal o vertical de revolución, como se indica en la definición siguiente.

Definición del área de una superficie de revolución

Sea $y = f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. El área S de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de f alrededor de un eje horizontal o vertical es

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \qquad y \text{ es una función de } x.$$

donde $r(x)$ es la distancia entre la gráfica de f y el eje de revolución. Si $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$, entonces el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy \qquad x \text{ es una función de } y.$$

donde $r(y)$ es la distancia entre la gráfica de g y el eje de revolución.

Las fórmulas en esta definición a veces son escritas como

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\,ds \qquad y \text{ es una función de } x.$$

y

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\,ds \qquad x \text{ es una función de } y.$$

donde $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ y $ds = \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy$, respectivamente.

EJEMPLO 6 Área de una superficie de revolución

Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de

$$f(x) = x^3$$

en el intervalo [0, 1] al girar alrededor del eje x, como se muestra en la figura 7.46.

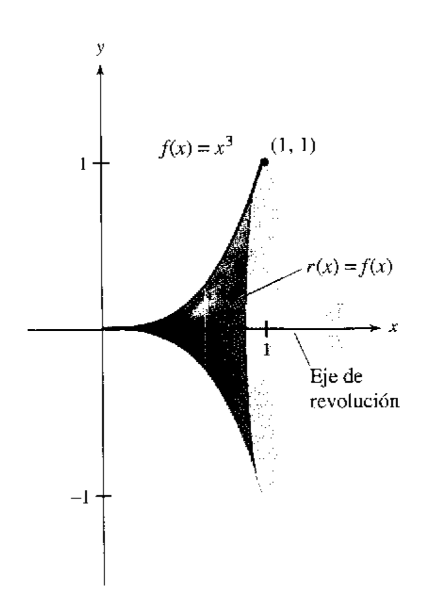


Figura 7.46

Solución La distancia entre el eje x y la gráfica de f es $r(x) = f(x)$, y porque $f'(x) = 3x^2$, el área de la superficie es

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx && \text{Fórmula del área de una superficie.}\\
&= 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx\\
&= \frac{2\pi}{36}\int_0^1 (36x^3)(1 + 9x^4)^{1/2}\, dx && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{\pi}{18}\left[\frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 && \text{Integrar.}\\
&= \frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1)\\
&\approx 3.563.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Área de una superficie de revolución

Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de

$$f(x) = x^2$$

en el intervalo $\left[0, \sqrt{2}\right]$ alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.47.

Solución En este caso, la distancia entre la gráfica de f y el eje y es $r(x) = x$. Usando $f'(x) = 2x$, se puede determinar que el área de la superficie es

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx && \text{Fórmula del área de una superficie.}\\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1 + (2x)^2}\, dx\\
&= \frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4x^2)^{1/2}(8x)\, dx && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} && \text{Integrar.}\\
&= \frac{\pi}{6}[(1 + 8)^{3/2} - 1]\\
&= \frac{13\pi}{3}\\
&\approx 13.614.
\end{aligned}$$

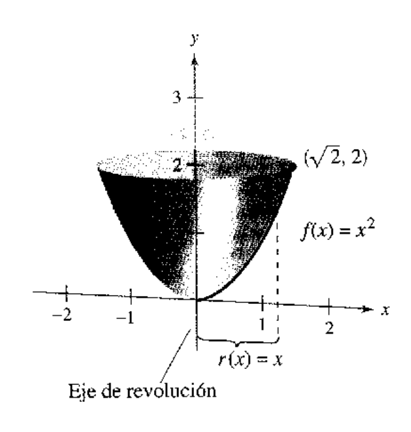


Figura 7.47

Ejercicios de la sección 7.4

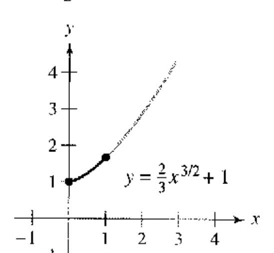
En los ejercicios 1 y 2, encontrar la distancia entre los puntos usando *a*) la fórmula de la distancia y *b*) la integración.

1. $(0, 0)$, $(5, 12)$

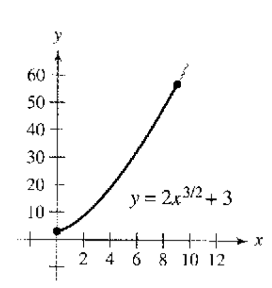
2. $(1, 2)$, $(7, 10)$

En los ejercicios 3 a 14, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

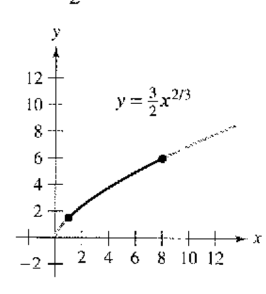
3. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$



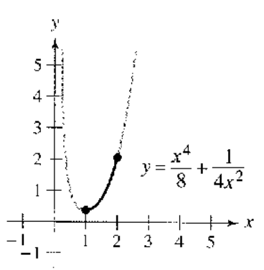
4. $y = 2x^{3/2} + 3$



5. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$



6. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$



7. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, $[1, 2]$

8. $y = \frac{3}{2}x^{2/3} + 4$, $[1, 27]$

9. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

10. $y = \ln(\cos x)$, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

11. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $[0, 2]$

12. $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $[\ln 2, \ln 3]$

13. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $0 \le y \le 4$

14. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3)$, $1 \le y \le 4$

En los ejercicios 15 a 24, *a*) representar la función, resaltando la parte indicada por el intervalo dado, *b*) encontrar una integral definida que represente la longitud de arco de la curva sobre el intervalo indicado y observar que la integral no puede evaluarse con las técnicas estudiadas hasta ahora y *c*) usar las capacidades de la integración en una calculadora para aproximar la longitud de arco.

15. $y = 4 - x^2$, $0 \le x \le 2$

16. $y = x^2 + x - 2$, $-2 \le x \le 1$

17. $y = \frac{1}{x}$, $1 \le x \le 3$

18. $y = \frac{1}{x + 1}$, $0 \le x \le 1$

19. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$

20. $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

21. $x = e^{-y}$, $0 \le y \le 2$

22. $y = \ln x$, $1 \le x \le 5$

23. $y = 2 \arctan x$, $0 \le x \le 1$

24. $x = \sqrt{36 - y^2}$, $0 \le y \le 3$

Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima mejor a la longitud de arco representada por la integral. (Hacer la selección con base en un esquema del arco y no realizando cualquier cálculo.)**

25. $\int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)\right]^2}\, dx$

a) 25 *b*) 5 *c*) 2 *d*) -4 *e*) 3

26. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}(\tan x)\right]^2}\, dx$

a) 3 *b*) -2 *c*) 4 *d*) $\frac{4\pi}{3}$ *e*) 1

Aproximación **En los ejercicios 27 y 28, aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4] de cuatro maneras. *a*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre los puntos terminales del arco. *b*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los cuatro segmentos de recta que conectan los puntos en el arco cuando $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. Encontrar la suma de las cuatro longitudes. *c*) Usar la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicada. *d*) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicada.**

27. $f(x) = x^3$

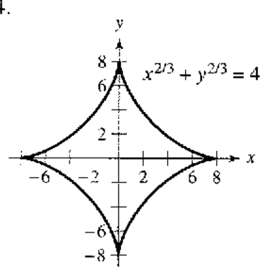
28. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

29. *a*) Usar una calculadora para representar la función $f(x) = x^{2/3}$.

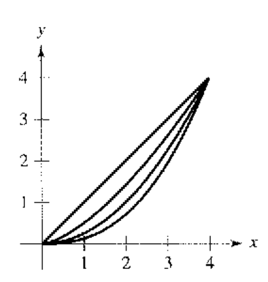
b) ¿Se puede integrar con respecto a x para encontrar la longitud de arco de la gráfica de f en el intervalo $[-1, 8]$? Explicar.

c) Encontrar la longitud de arco de la gráfica de f en el intervalo $[-1, 8]$.

30. ***Astroide*** Encontrar la longitud total de la gráfica del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.



31. ***Para pensar*** La figura muestra las gráficas de las funciones $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2}$, $y_3 = \frac{1}{4}x^2$ y $y_4 = \frac{1}{8}x^{5/2}$ en el intervalo $[0, 4]$.



a) Identificar las funciones.
b) Listar las funciones en el orden de longitud de arco creciente.
c) Verificar la respuesta en el inciso *b*) aproximando cada longitud de arco exacto a tres lugares decimales.

32. ***Para pensar*** Explicar por qué las dos integrales son iguales.

$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Usar las capacidades de la integración en una computadora para verificar que las integrales son iguales.

33. ***Longitud de persecución*** Un objeto parte del origen y se mueve al eje y (véase la figura). Al mismo tiempo, un perseguidor parte del punto $(1, 0)$ y siempre los movimientos son hacia el objeto. La velocidad del perseguidor es dos veces la del objeto. La ecuación de la trayectoria es

$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2).$$

¿Qué distancia ha recorrido el objeto cuando es alcanzado? Mostrar que el perseguidor ha viajado dos veces más lejos.

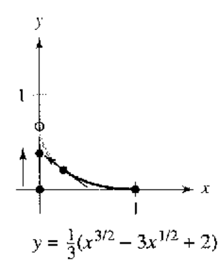


Figura para 33

Figura para 34

34. ***Área de un techo*** Un granero tiene 100 pies de largo y 40 de ancho (véase la figura). Una sección transversal del tejado es una catenaria invertida $y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$. Encontrar el número de pies cuadrados de techo en el granero.

35. ***Longitud de una catenaria*** Los alambres eléctricos suspendidos entre dos torres forman una catenaria (véase la figura) modelada por la ecuación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \le x \le 20$$

donde x y y son medidos en metros. La aparición de las torres es de 40 metros. Encontrar la longitud del cable suspendido.

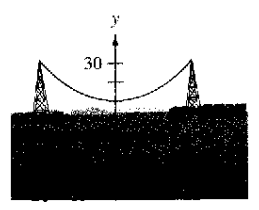


Figura para 35

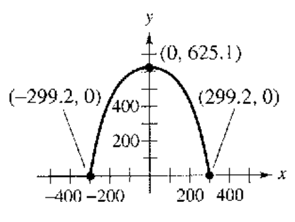


Figura para 36

36. ***Longitud del arco de Gateway*** El Arco de Gateway en St. Louis, Missouri, se modela por

$$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x,$$
$$-299.2239 \le x \le 299.2239.$$

(Ver la sección 5.8, Proyecto de trabajo: Arco St. Louis). Encontrar la longitud de esta curva (ver la figura).

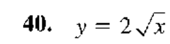
37. Encontrar la longitud de arco de $(0, 3)$ en el sentido de las manecillas del reloj a $(2, 5)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

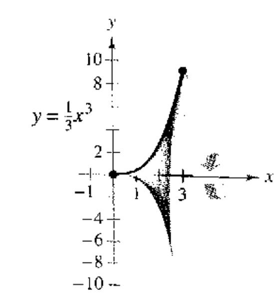
38. Encontrar la longitud de arco de $(-3, 4)$ en el sentido de las manecillas del reloj en $(4, 3)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Mostrar que el resultado es una cuarta parte de la circunferencia.

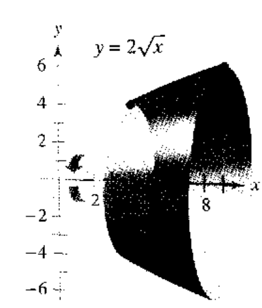
En los ejercicios 39 a 42, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje x.

39. $y = \frac{1}{3}x^3$

40. $y = 2\sqrt{x}$







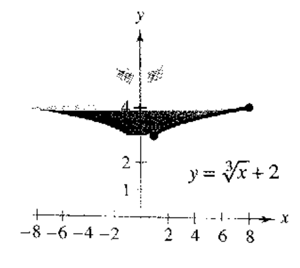
41. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 1 \le x \le 2$

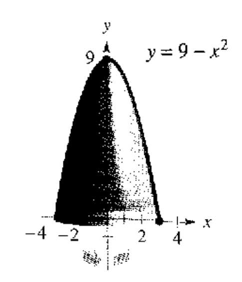
42. $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$

En los ejercicios 43 y 44, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje y.

43. $y = \sqrt[3]{x} + 2$

44. $y = 9 - x^2$





En los ejercicios 45 y 46, usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar el área de la superficie del sólido de revolución.

	Función	*Intervalo*
45.	$y = \operatorname{sen} x$ gira alrededor del eje x	$[0, \pi]$
46.	$y = \ln x$ gira alrededor del eje y	$[1, e]$

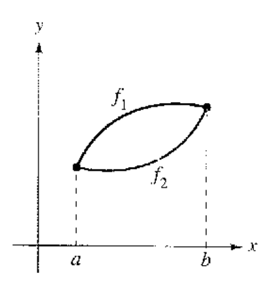
Desarrollo de conceptos

47. Definir una curva rectificable.

48. ¿Qué fórmula de precálculo y elemento representativo se utilizan para desarrollar la fórmula de integración para la longitud de arco?

49. ¿Qué fórmula de precálculo y elemento representativo se utilizan para desarrollar la fórmula de integración para el área de una superficie de revolución?

50. La figura muestra las gráficas de las funciones f_1 y f_2 en el intervalo $[a, b]$. La gráfica de cada una se gira alrededor del eje x. ¿Qué superficie de revolución tiene el área de la superficie mayor? Explicar.



51. Un cono circular directo se genera al girar la región acotada por, $y = hx/r$, $y = h$ y $x = 0$ alrededor del eje y. Verificar que el área de la superficie lateral del cono es

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

52. Una esfera de radio r se genera al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x. Verificar que el área de la superficie de la esfera es $4\pi r^2$.

53. Encontrar el área de la porción de una esfera formada al girar la gráfica alrededor de $y = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$, alrededor del eje y.

54. Encontrar el área de la zona de una esfera formada al girar la gráfica alrededor de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq a$, alrededor del eje y. Asumir que $a < r$.

55. ***Diseño de bombillas*** Una bombilla ornamental se diseña al girar la gráfica alrededor de

$$y = \tfrac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{3}$$

sobre el eje x donde x y y son medidos en pies (ver la figura). Encontrar el área de la superficie de la bombilla y usar el resultado para aproximar la cantidad de vidrio necesario para hacer la bombilla. (Asumir que el vidrio es de 0.015 pulgadas de espesor.)

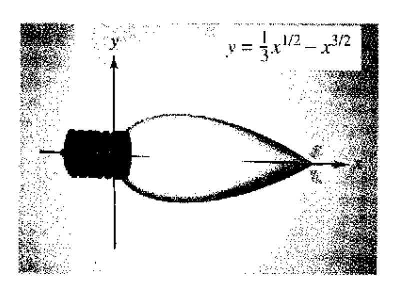


Figura para 55

56. ***Para pensar*** Considerar la ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Usar una calculadora para representar la ecuación.

b) Formular la integral definida para encontrar la longitud de arco de esa gráfica en el apartado *a*).

c) Comparar el intervalo de integración en el apartado *b*) y el dominio del integrando. ¿Es posible evaluar la integral definida? ¿Es posible usar la regla de Simpson para calcular la integral definida? Explicar. (Se aprenderá a evaluar este tipo de integral en la sección 8.8.)

57. ***Modelo matemático*** La circunferencia C (en pulgadas) de un jarrón es medida a intervalos de tres pulgadas empezando en su base. Las medidas se muestran en la tabla donde y es la distancia vertical en pulgadas a la base.

y	0	3	6	9	12	15	18
C	50	65.5	70	66	58	51	48

a) Usar los datos para aproximar el volumen del jarrón sumando los volúmenes de los discos aproximantes.

b) Usar los datos para aproximar el área de la superficie externa (excluyendo la base) del jarrón sumando las áreas de la superficie externa para aproximar el tronco de conos aproximantes.

c) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo cúbico para los puntos (y, r) donde $r = C/(2\pi)$. Usar una calculadora para trazar los puntos y representar el modelo.

d) Usar el modelo en el apartado *c*) y las capacidades de la integración de una computadora para aproximar el volumen y el área fuera de la superficie del jarrón. Comparar los resultados con las respuestas en los apartados *a*) y *b*).

58. ***Diseño matemático*** La figura muestra un terreno acotado por dos caminos perpendiculares y un arroyo. Todas las distancias son medidas en pies.

a) Usar las capacidades de la regresión de una calculadora para ajustar un polinomio de cuarto grado al camino del arroyo.

b) Usar el modelo en el apartado *a*) para aproximar el área de la propiedad en acres.

c) Usar las capacidades de integración de una calculadora para encontrar la longitud del arroyo que limita la propiedad.

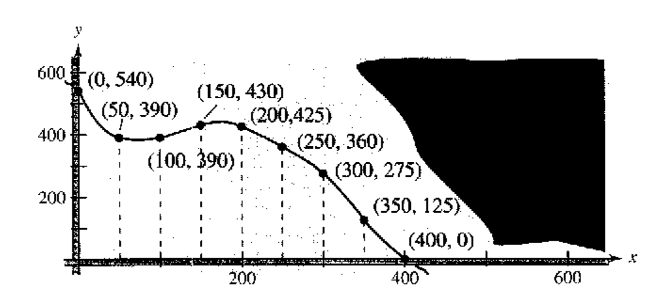


Figura para 58

59. Sea R la región acotada por $y = 1/x$, el eje x, $x = 1$, y $x = b$, donde $b > 1$. Sea D el sólido formado cuando R se gira alrededor del eje x.

a) Encontrar el volumen V de D.

b) Escribir el área de la superficie S como una integral.

c) Mostrar que V se acerca a un límite finito como $b \to \infty$.

d) Demostrar que $S \to \infty$ como $b \to \infty$.

60. *a*) Dado un sector circular con radio L y ángulo central θ (véase la figura), mostrar por qué el área del sector está dada por

$$S = \frac{1}{2}L^2\theta.$$

b) Uniendo los bordes de la recta del sector en el apartado *a*), un cono circular recto es formado (véase la figura) y el área de la superficie lateral del cono es igual que el área del sector. Mostrar que el área es $S = \pi rL$, donde r es el radio de la base del cono. (*Sugerencia:* La longitud de arco del sector es igual a la circunferencia de la base del cono.)

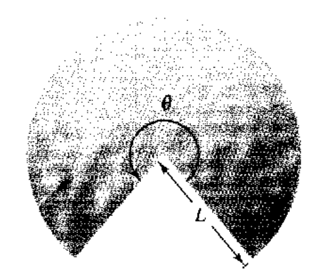
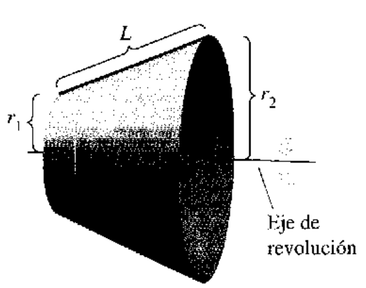


Figura para 60*a* **Figura para 60*b***

c) Usar el resultado del apartado *b*) para verificar que la fórmula para el área de la superficie lateral del tronco de un cono con la altura inclinada L y radios r_1 y r_2 (véase la figura) es $S = \pi(r_1 + r_2)L$. (*Nota:* Esta fórmula fue usada para desarrollar la integral para encontrar el área de la superficie de una superficie de revolución.)



61. ***Proyecto individual*** Seleccionar un sólido de revolución de la vida cotidiana. Medir el radio del sólido en al menos siete puntos a lo largo de su eje. Usar los datos para aproximar el volumen del sólido y el área de la superficie de los lados laterales del sólido.

62. ***Redacción*** Leer el artículo "Arc Length, Area and the Arcsine Function" por Andrew M. Rockett en la *Mathematics Magazine*. Entonces escribir un párrafo que explique cómo la función del arcoseno puede definirse en términos de una longitud de arco.

63. ***Astroide*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la porción en el primer cuadrante de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $0 \le y \le 8$ alrededor del eje y.

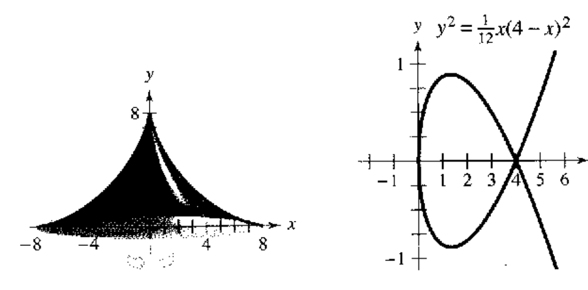
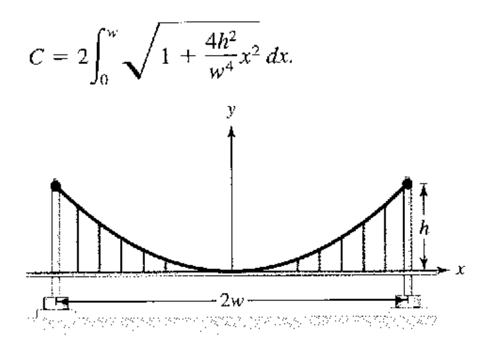


Figura para 63 **Figura para 64**

64. Considerar la gráfica de $y^2 = \frac{1}{12}x(4 - x)^2$ (ver la figura). Encontrar el área de la superficie formada cuando la arcada de esta gráfica se gira alrededor del eje x.

65. ***El puente suspendido*** Un cable para un puente suspendido tiene la forma de una parábola con la ecuación $y = kx^2$. Sea h para representar la altura del cable de su punto más bajo a su punto más alto y sea $2w$ para representar la anchura total del puente (ver la figura). Mostrar por qué la longitud del cable C está dada por

$$C = 2\int_0^w \sqrt{1 + \frac{4h^2}{w^4}x^2}\, dx.$$



66. ***El puente suspendido*** El Humber Bridge, localizado en el Reino Unido e inaugurado en 1981, tiene un anchura principal de aproximadamente 1 400 metros. Cada una de sus torres tiene una altura de aproximadamente 155 metros. Usar estas dimensiones, la integral en el ejercicio 65, y las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la longitud de un cable parabólico a lo largo de la anchura principal.

Preparación del examen Putnam

67. Encontrar la longitud de la curva $y^2 = x^3$ del origen al punto donde las tangentes forman un ángulo de 45° con el eje x.

Sección 7.5 Trabajo

- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante.**
- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable.**

Trabajo realizado por una fuerza constante

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros ya que determina la energía necesaria para realizar varias tareas. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo realizado cuando una grúa alza una viga de acero, cuando un resorte o muelle es comprimido, cuando un cohete se propulsa en el aire, o cuando un camión transporta una carga.

En general, el **trabajo** es realizado por una fuerza cuando desplaza un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es constante, entonces la definición de trabajo es:

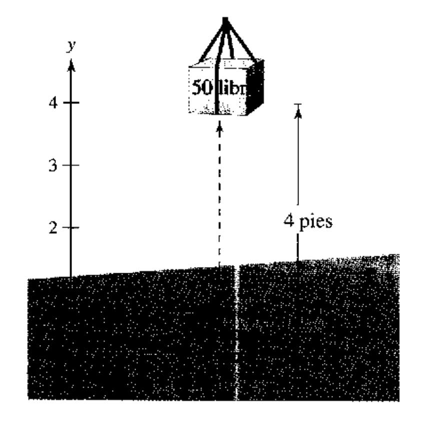
Definición de trabajo realizado por una fuerza constante

Si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

Hay muchos tipos de fuerzas: centrífuga, electromotriz y gravitatoria, por nombrar sólo algunas. Una **fuerza** puede pensarse como algo que *empuja* o *atrae*; una fuerza cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitatorias en la Tierra, es común usar unidades de medida que corresponden al peso de un objeto.

EJEMPLO 1 Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.



El trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies es 200 libras-pies
Figura 7.48

Solución La magnitud de la fuerza requerida F es el peso del objeto, como se muestra en la figura 7.48. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

$$
\begin{aligned}
W &= FD && \text{Trabajo = (fuerza)(distancia).} \\
&= 50(4) && \text{Fuerza = 50 libras, distancia = 4 pies.} \\
&= 200 \text{ libras-pies.}
\end{aligned}
$$

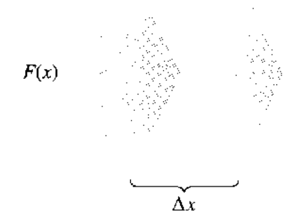
En el sistema de medida americano, el trabajo se expresa en libra-pie (lb-pie), pulgada-libra, o pie-toneladas. En el sistema cegesimal centímetro-gramo-segundo (C-G-S), la unidad básica de fuerza es la **dina**: la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 centímetro por segundo al cuadrado en una masa de 1 gramo. En este sistema, el trabajo se expresa en dina-centímetros (ergs) o newton-metros (joules), donde 1 joule = 10^7 ergs.

¿Cuánto trabajo? En el ejemplo 1, son necesarias 200 libras-pies de trabajo para elevar 4 pies el objeto de 50 libras verticalmente del suelo. Suponer que una vez izado el objeto, sosteniéndolo, se camina una distancia horizontal de 4 pies. ¿Esto requerirá 200 libras-pies adicionales de trabajo? Explicar la respuesta.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En el ejemplo 1, la fuerza aplicada era *constante*. Si se aplica una fuerza *variable* a un objeto, es necesario recurrir al cálculo para determinar el trabajo realizado, porque la cantidad de fuerza cambia como cambia la posición del objeto. Por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir un resorte o muelle aumenta conforme el resorte es comprimido.

Suponer que un objeto se mueve a lo largo de una recta de $x = a$ a $x = b$ por una fuerza continuamente variante $F(x)$. Sea Δ una partición que divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos determinados por



La magnitud de fuerza varía conforme cambia la posición de un objeto (Δx)
Figura 7.49

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b$$

y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i, elegir c_i tal que $x_{i-1} < c_i < x_i$. Entonces en c_i la fuerza está dada por $F(c_i)$. Porque F es continua, se puede aproximar el trabajo realizado moviendo el objeto a través del i-ésimo subintervalo por el incremento

$$\Delta W_i = F(c_i)\,\Delta x_i$$

como se muestra en la figura 7.49. Así, el trabajo total realizado como los movimientos del objeto de a a b se aproximan por

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta aproximación parece ser mejor y más aún cuando $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$). Así, el trabajo realizado es

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

EMILIE DE BRETEUIL (1706-1749)
Otra labor relevante de Emilie de Breteuil fue la traducción de los *Principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza* de Newton al francés. Su traducción y sus comentarios contribuyeron en gran medida a la aceptación de las ideas científicas de Newton en Europa.

Definición del trabajo realizado por una fuerza variable

Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado de $x = a$ hasta $x = b$ es

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

En los ejemplos restantes en esta sección se usan algunas leyes físicas muy conocidas. Los descubrimientos de muchas de estas leyes ocurrieron durante el mismo periodo en que se estaba desarrollando el cálculo. Durante los siglos XVII y XVIII, había poca diferencia, de hecho, entre físicos y matemáticos. Emilie de Breteuil, física-matemática, realizó una importante síntesis del trabajo de muchos otros científicos, incluso el de Newton, Leibniz, Huygens, Kepler y Descartes. Su texto *Institutions* fue utilizado durante muchos años.

Las tres leyes de física siguientes fueron desarrolladas por Robert Hooke (1635-1703), Isaac Newton (1642-1727) y Charles Coulomb (1736-1806).

1. **Ley de Hooke:** La fuerza F requerida para comprimir o estirar un resorte o muelle (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la distancia d que el resorte es comprimido o estirado de su longitud original. Es decir,

$$F = kd$$

donde la constante de proporcionalidad k (constante del resorte) depende de la naturaleza específica del resorte.

2. **Ley de Newton de gravitación universal:** La fuerza F de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos partículas. Es decir,

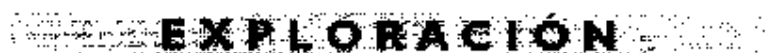
$$F = k\frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

Si m_1 y m_2 están dadas en gramos y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 6.670 \times 10^{-8}$ centímetros cúbicos por gramo-segundo cuadrado.

3. **Ley de Coulomb:** La fuerza entre dos cargas q_1 y q_2 en un vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos cargas. Es decir,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

Si q_1 y q_2 están dadas en unidades electrostáticas y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 1$.



El trabajo realizado al comprimir el resorte en el ejemplo 2 de $x = 3$ pulgadas a $x = 6$ pulgadas es 3 375 libras-pulgadas. ¿Muestra que el trabajo realizado al comprimir el resorte de $x = 0$ pulgadas a $x = 3$ pulgadas es mayor que, igual o menor que éste? Explicar.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte o muelle

Una fuerza de 750 libras comprime un resorte 3 pulgadas de su longitud natural de 15 pulgadas. Encontrar el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas adicionales.

Solución Por la ley de Hooke, la fuerza $F(x)$ requerida para comprimir el resorte las unidades de x (de su longitud natural) es $F(x) = kx$. Usando los datos dados, se sigue que $F(3) = 750 = (k)(3)$ y así $k = 250$ y $F(x) = 250x$, como se muestra en la figura 7.50. Para encontrar el incremento de trabajo, asumir que la fuerza requerida para comprimir el resorte sobre un pequeño incremento Δx es casi constante. Así que, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (250x)\,\Delta x.$$

Porque el resorte es comprimido de $x = 3$ a $x = 6$ pulgadas menos de su longitud natural, el trabajo requerido es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_3^6 250x\,dx \qquad \text{Fórmula para el trabajo.}$$

$$= 125x^2\Big]_3^6 = 4\,500 - 1\,125 = 3\,375 \text{ libras-pulgadas.}$$

Observar que *no* se integra de $x = 0$ a $x = 6$ porque se determinó el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas *adicionales* (no incluyendo las primeras 3 pulgadas).

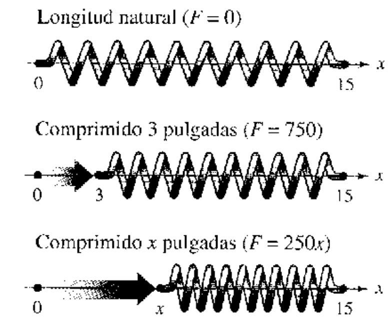


Figura 7.50

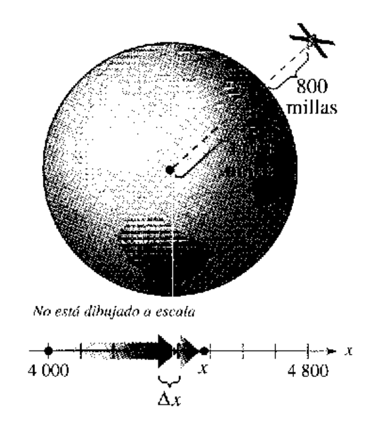


Figura 7.51

EJEMPLO 3 Puesta en órbita de un módulo espacial

Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo es necesario para propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura 7.51? (Usar 4 000 millas como el radio de la Tierra. No considerar el efecto de resistencia al aire o el peso del propulsor.)

Solución Porque el peso de un cuerpo varía inversamente al cuadrado de su distancia del centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2}. \qquad C \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

Porque el módulo pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra y el radio de la Tierra es aproximadamente 4 000 millas, se tiene

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{C}{(4\,000)^2} \\ 240\,000\,000 &= C. \end{aligned}$$

Así que, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) \\ &= \frac{240\,000\,000}{x^2}\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, porque el módulo se propulsa de $x = 4\,000$ a $x = 4\,800$ millas, el trabajo total realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,dx = \int_{4\,000}^{4\,800} \frac{240\,000\,000}{x^2}\,dx && \text{Fórmula para el trabajo.} \\ &= \frac{-240\,000\,000}{x}\Bigg]_{4\,000}^{4\,800} && \text{Integrar.} \\ &= -50\,000 + 60\,000 \\ &= 10\,000 \text{ miles-toneladas} \\ &\approx 1.164 \times 10^{11} \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

En el sistema cegesimal C-G-S, usando un factor de conversión de 1 libra-pie ≈ 1.35582 joules, el trabajo realizado es

$$W \approx 1.578 \times 10^{11} \text{ joules.}$$

Las soluciones a los ejemplos 2 y 3 conforman el desarrollo de trabajo como la suma de incrementos en la forma

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (F)(\Delta x).$$

Otra manera de formular el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (F)(\Delta x).$$

Esta segunda interpretación de ΔW es útil en problemas que involucran el movimiento de sustancias no rígidas como los fluidos y cadenas.

EJEMPLO 4 Extracción de gasolina de un tanque de aceite

Un tanque esférico de radio de 8 pies está medio lleno de aceite que pesa 50 libras/pie^3. Encontrar el trabajo requerido para extraer el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

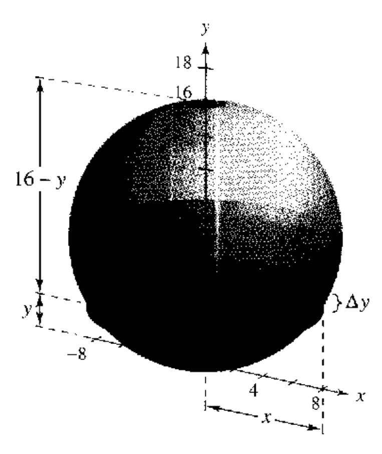


Figura 7.52

Solución Considerar el aceite dividido en discos de espesor Δy y radio x, como se muestra en la figura 7.52. Ya que el incremento de fuerza para cada disco está dado por su peso, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta F &= \text{peso}\\ &= \left(\frac{50 \text{ libras}}{\text{pie}^3}\right)(\text{volumen})\\ &= 50(\pi x^2 \Delta y) \text{ libras.}\end{aligned}$$

Para un círculo de radio 8 y centro en (0, 8), se tiene

$$\begin{aligned}x^2 + (y-8)^2 &= 8^2\\ x^2 &= 16y - y^2\end{aligned}$$

y se puede escribir el incremento de fuerza como

$$\begin{aligned}\Delta F &= 50(\pi x^2 \Delta y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y.\end{aligned}$$

En la figura 7.52, observar que un disco debe moverse y pies del fondo del tanque a una distancia de $(16 - y)$ pies. Así, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta F(16 - y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y(16 - y)\\ &= 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,\Delta y\end{aligned}$$

Porque el tanque está medio lleno, y va de 0 a 8, el trabajo requerido para vaciar el tanque es

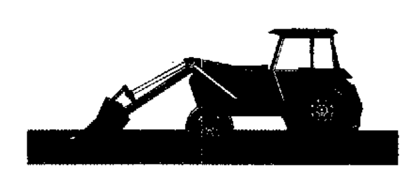
$$\begin{aligned}W &= \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,dy\\ &= 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8\\ &= 50\pi\left(\frac{11{,}264}{3}\right)\\ &\approx 589\,782 \text{ libras-pies.}\end{aligned}$$

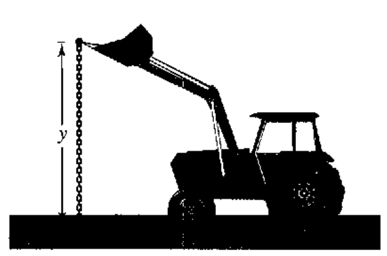
Para estimar lo razonable del resultado en el ejemplo 4, considerar que el peso del aceite en el tanque es

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)(\text{volumen})(\text{densidad}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 8^3\right)(50)\\ &\approx 53\,616.5 \text{ libras.}\end{aligned}$$

Elevando el medio tanque de aceite 8 pies involucraría trabajo de $8(53\,616.5) \approx 428\,932$ libras-pie. Porque el aceite realmente se eleva entre 8 y 16 pies, parece razonable que el trabajo realizado sea 589 782 libras-pie.

EJEMPLO 5 Izamiento de una cadena





Trabajo requerido para izar un extremo de la cadena
Figura 7.53

Una cadena de 20 pies pesa 5 libras por pie está extendida en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 20 pies para que esté totalmente extendida, como se muestra en la figura 7.53?

Solución Imaginar que la cadena es dividida en secciones pequeñas, cada una de longitud Δy. Entonces el peso de cada sección es el incremento de fuerza

$$\Delta F = (\text{peso}) = \left(\frac{5 \text{ libras}}{\text{pies}}\right)(\text{longitud}) = 5\Delta y.$$

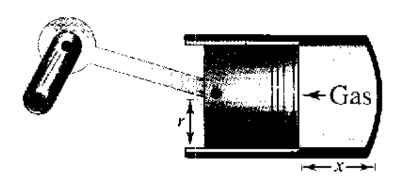
Porque una sección común (inicialmente en el suelo) se levanta a una altura de y, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (5\ \Delta y)y = 5y\ \Delta y.$$

Porque y va de 0 a 20, el trabajo total es

$$W = \int_0^{20} 5y\, dy = \frac{5y^2}{2}\Big]_0^{20} = \frac{5(400)}{2} = 1\ 000 \text{ puntos-pies}$$

En el próximo ejemplo se considerará un pistón de radio r en un cilindro, como se muestra en la figura 7.54. Como el gas en el cilindro se expande, el pistón se mueve y se realiza el trabajo. Si p representa la presión del gas (en libras/pie^3) contra la cabeza del pistón y V representa el volumen del gas (en pie^3), el incremento de trabajo involucrado moviendo el pistón Δx pies es



Trabajo realizado por la expansión del gas
Figura 7.54

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = F(\Delta x) = p(\pi r^2)\,\Delta x = p\ \Delta V.$$

Así, como el volumen del gas se expande de V_0 a V_1 el trabajo realizado moviendo el pistón es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV.$$

Asumiendo la presión del gas inversamente proporcional a su volumen, se tiene $p = k/V$ y la integral para el trabajo se vuelve

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\, dV.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por un gas que se expande

Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 500 libras por pie^2 se expande a un volumen de 2 pies^3. Encontrar el trabajo realizado por el gas. (Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen.)

Solución Porque $p = k/V$ y $p = 500$ cuando $V = 1$, se tiene $k = 500$. Así que, el trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\, dV \\ &= \int_1^2 \frac{500}{V}\, dV \\ &= 500 \ln|V|\Big]_1^2 \approx 346.6 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 7.5

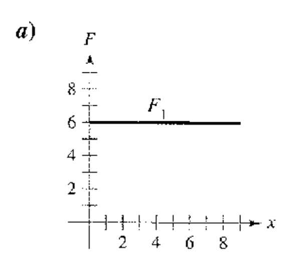
Fuerza constante **En los ejercicios 1 a 4, determinar el trabajo realizado por la fuerza constante.**

1. Se levanta un saco de azúcar de 100 libras 10 pies.
2. Una grúa levanta un automóvil eléctrico de 2 800 libras a 4 pies.
3. Se requiere una fuerza de 112 newtons para deslizar un bloque de cemento 4 metros en un proyecto de construcción.
4. La locomotora de un tren de carga arrastra sus vagones con una fuerza constante de 9 toneladas a una distancia de media milla.

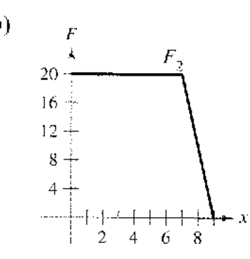
Desarrollo de conceptos

5. Enunciar la definición de trabajo realizado por una fuerza constante.
6. Enunciar la definición de trabajo realizado por una fuerza variable.
7. Las gráficas muestran la fuerza F_i (en libras) requerida para mover un objeto 9 pies a lo largo del eje x. Ordenar la función de fuerza de menor a mayor, sin hacer algún cálculo. Explicar el razonamiento.

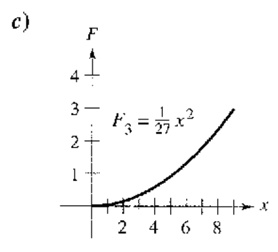
a)



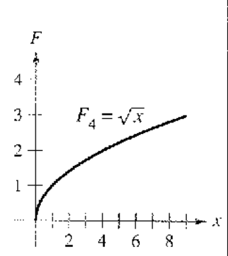
b)



c)



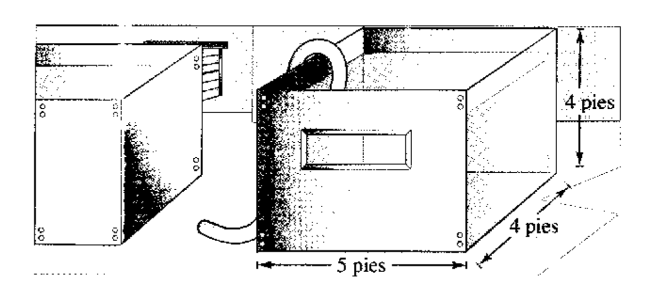
d)



8. Verificar la respuesta para el ejercicio 7 calculando el trabajo para cada función de fuerza.

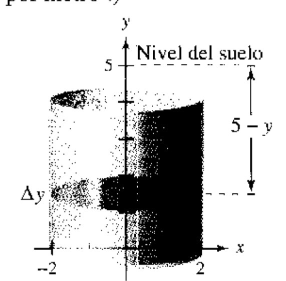
Ley de Hooke **En los ejercicios 9 a 16, usar la ley de Hooke para determinar la fuerza variable en el problema del resorte o muelle.**

9. Una fuerza de 5 libras comprime un resorte de 15 pulgadas un total de 4 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte 7 pulgadas?
10. ¿Cuánto trabajo se realiza comprimiendo el resorte en el ejercicio 9 de una longitud de 10 pulgadas a una longitud de 6 pulgadas?
11. Una fuerza de 250 newtons estira un resorte 30 centímetros. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte de 20 centímetros a 50 centímetros?
12. Una fuerza de 800 newtons estira un resorte 70 centímetros en un dispositivo mecánico para tensar postes. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte los 70 centímetros requeridos.
13. Una fuerza de 20 libras estira un resorte 9 pulgadas en una máquina de ejercicio. Encontrar el trabajo realizado estirando el resorte 1 pie de su posición natural.
14. Una puerta de garaje abre hacia arriba con dos resortes, o muelles, uno en cada lado de la puerta. Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Debido al sistema de la polea, los resortes se estiran sólo la mitad de lo que recorre la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies y los resortes están en su longitud natural cuando la puerta está abierta. Encontrar el trabajo realizado por el par de resortes.
15. Se requieren dieciocho libras-pies de trabajo para estirar un resorte 4 pulgadas de su posición natural. Encontrar el trabajo requerido para estirar el resorte 3 pulgadas adicionales.
16. Se requieren 7 y media libras-pies de trabajo para comprimir un resorte 2 pulgadas de su longitud natural. Encontrar el trabajo requerido para comprimir el resorte media pulgada adicional.
17. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de cinco toneladas a una altura de
    a) 100 millas sobre la Tierra.
    b) 300 millas sobre la Tierra.
18. ***Propulsión*** Usar la información en el ejercicio 17 para expresar el trabajo W del sistema de propulsión como una función de la altura h del satélite sobre la Tierra. Encontrar el límite (si existe) de W cuando h se acerca al infinito.
19. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de 10 toneladas a una altura de
    a) 11 000 millas sobre la Tierra.
    b) 22 000 millas sobre la Tierra.
20. ***Propulsión*** Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo en la superficie de la Luna a una altura de 50 millas? Considerar que el radio de la Luna es 1 100 millas y su fuerza de gravedad es un sexto que el de la Tierra.
21. ***Bombeo de agua*** Un tanque rectangular con base de 4 pies por 5 pies y una altura de 4 pies está lleno de agua (véase la figura). El agua pesa 62.4 libras por pie^3. ¿Cuánto trabajo se realiza bombeando el agua encima del borde de la parte superior para vaciar, *a)* la mitad del tanque, *b)* todo el tanque?



22. ***Para pensar*** Explicar por qué la respuesta en el apartado b) del ejercicio 21 no es igual al doble de la respuesta del apartado a).

23. ***Bombeo de agua*** Un tanque cilíndrico para agua de 4 metros de alto con un radio de 2 metros está colocado de manera que su techo está 1 metro debajo del nivel del suelo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno de agua hasta el nivel del suelo? (El agua pesa 9 800 newtons por metro^3.)



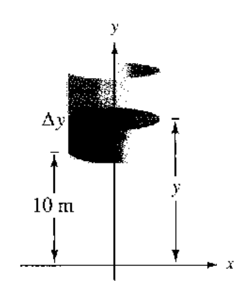


Figura para 23 **Figura para 24**

24. ***Bombeo de agua*** Suponer que el tanque en el ejercicio 23 se localiza en una torre, tal que el fondo del tanque esté 10 metros sobre el nivel de un arroyo (véase la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza llenando el tanque a la mitad a través de un orificio en el fondo, usando el agua del arroyo?

25. ***Bombeo de agua*** Un tanque abierto tiene la forma de un cono circular recto (véase la figura). El tanque es de 8 pies de diámetro en su parte superior y 6 pies de altura. ¿Cuánto trabajo se realiza vaciando el tanque bombeando el agua por arriba?

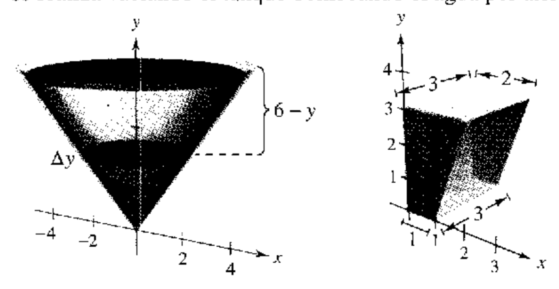


Figura para 25 **Figura para 28**

26. ***Bombeo de agua*** Si el agua se bombea desde el fondo del tanque en el ejercicio 25. ¿Cuánto trabajo se realiza para llenar el tanque

a) a una profundidad de 2 pies?

b) de una profundidad de 4 pies a una profundidad de 6 pies?

27. ***Bombeo de agua*** Un tanque tiene la forma de la mitad superior de una esfera de 6 pies de radio. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar el tanque de agua a través de un orificio en la base si la fuente de agua está en la base?

28. ***Bombeo de combustible diesel*** Un tanque de combustible de un camión tiene las dimensiones (en pies) mostradas en la figura. Asumir que un motor está aproximadamente 3 pies por encima del tanque de combustible y ese combustible de diesel pesa aproximadamente 53.1 libras por pie^3. Encontrar el trabajo realizado por la bomba de combustible levantando un tanque lleno de combustible al nivel del motor.

Bombeo de gasolina **En los ejercicios 29 y 30, encontrar el trabajo realizado al bombear gasolina que pesa 42 libras por pie^3. (*Sugerencia:* Evaluar una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)**

29. Un tanque de gasolina cilíndrico de 3 pies de diámetro y 4 pies de largo se lleva en la parte de atrás de un camión y se usa para alimentar los tractores. El eje del tanque es horizontal. ¿Cuánto trabajo es necesario para bombear todo su contenido en un tractor si la abertura del depósito de éste se encuentra 5 pies por encima del punto más alto del depósito?

30. La parte superior de un tanque de almacenamiento cilíndrico para gasolina en una estación de servicio está 4 pies por debajo del nivel del suelo. El eje del tanque es horizontal y su diámetro y longitud son 5 y 12 pies, respectivamente. Encontrar el trabajo realizado al bombear su contenido a una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo.

Izado de una cadena **En los ejercicios 31 a 34, considerar una cadena de 15 pies que pesa 3 libras por pie y que cuelga de un torno 15 pies sobre el nivel del suelo. Encontrar el trabajo realizado por el torno al enrollar la cantidad especificada de cadena.**

31. Enrollar la cadena entera.

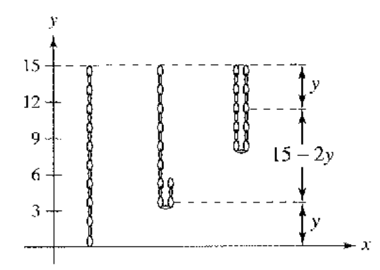
32. Enrollar un tercio de la cadena.

33. Ejecutar el torno hasta que el punto más bajo de la cadena esté a 10 pies del nivel del suelo.

34. Enrollar la cadena entera con una carga de 500 libras atada a ella.

Izando una cadena **En los ejercicios 35 y 36, considerar una cadena colgante de 15 pies que pesa 3 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado izando la cadena verticalmente a la posición indicada.**

35. Tomar el punto más bajo de la cadena y levantarlo a 15 pies del nivel, dejando la cadena doblada y colgando verticalmente todavía (véase la figura).



36. Repetir el ejercicio 35 que levanta el punto más bajo de la cadena a 12 pies del nivel.

Grúa de demolición **En los ejercicios 37 y 38, considerar una grúa de demolición con una bola de 500 libras suspendida 40 pies de un cable que pesa 1 libra por pie.**

37. Encontrar el trabajo requerido para enrollar 15 pies del aparato.

38. Encontrar el trabajo requerido para enrollar los 40 pies del aparato.

Ley de Boyle **En los ejercicios 39 y 40, encontrar el trabajo realizado por el gas para el volumen y presión dados. Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen. (Ver ejemplo 6.)**

39. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 2 pies^3 y una presión de 1 000 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

40. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 2 500 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

41. ***Fuerza eléctrica*** Dos electrones se repelen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Un electrón está en reposo en el punto $(2, 4)$. Encontrar el trabajo realizado para mover el segundo electrón de $(-2, 4)$ a $(1, 4)$.

42. ***Modelo matemático*** El cilindro hidráulico de una aserradora tiene 4 pulgadas de diámetro y un golpe de 2 pies. La bomba hidráulica crea una presión máxima de 2 000 libras por pulgada^2. Por consiguiente, la fuerza máxima creada por el cilindro es $2\,000(\pi 2^2) = 8\,000\pi$ libras.

a) Encontrar el trabajo realizado en una extensión del cilindro dado que requiere la máxima fuerza.

b) La fuerza ejercida para serrar una pieza de madera es variable. Las medidas de la fuerza obtenidas cuando una pieza de madera es serrada se muestra en la tabla. La variable x mide la extensión del cilindro en pies, y F es la fuerza en libras. Usar la regla de Simpson para aproximar el trabajo realizado para serrar la pieza de madera.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$F(x)$	0	20 000	22 000	15 000	10 000	5 000	0

Tabla para 42*b*

c) Usar las capacidades de la regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos. Trazar los datos y representar el modelo.

d) Usar el modelo en el apartado *c)* para aproximar la extensión del cilindro cuando la fuerza es máxima.

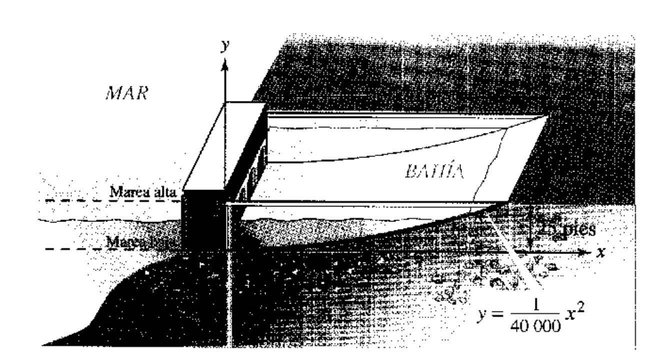
e) Usar el modelo en el apartado *c)* para aproximar el trabajo realizado serrando la pieza de madera.

Prensa hidráulica **En los ejercicios 43 a 46, usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar el trabajo realizado por una prensa en un proceso industrial. Un modelo para la fuerza variable F (en libras) y la distancia x (en pies) del desplazamiento de la prensa.**

	Fuerza	*Intervalo*
43.	$F(x) = 1\,000[1.8 - \ln(x+1)]$	$0 \le x \le 5$
44.	$F(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{100}$	$0 \le x \le 4$
45.	$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$	$0 \le x \le 5$
46.	$F(x) = 1\,000 \operatorname{senh} x$	$0 \le x \le 2$

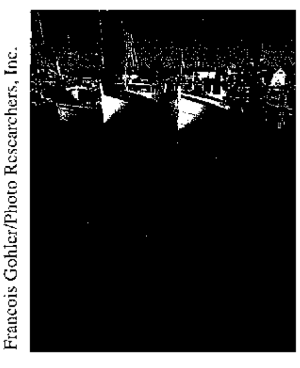
Proyecto de trabajo: Energía de la marea

Las plantas de producción de energía eléctrica a partir de la "energía de marea", tienen una presa que separa una bahía del mar. La energía eléctrica se produce por el flujo y reflujo del agua entre la bahía y el mar. La cantidad de "energía natural" producida depende del volumen de la bahía y del rango de la marea, que es la distancia vertical entre las mareas alta y baja. (Algunas bahías naturales tienen rangos de marea de más de 15 pies; la Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea de 53 pies.)



a) Considerar una bahía con una base rectangular, como se muestra en la figura. La bahía tiene un rango de marea de 25 pies, con marea baja que corresponde a $y = 0$. ¿Cuánta agua contiene la bahía cuando hay marea alta?

b) La cantidad de energía producida durante el llenado (o el vaciado) de la bahía es proporcional a la cantidad de trabajo requerido para llenar (o vaciar) la bahía. ¿Cuánto trabajo es necesario para llenar la bahía con agua del mar? (Usar una densidad de agua de mar de 64 libras/pie^3.)



La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea extremo, como se manifiesta en las fotografías muy contrastantes.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información en torno al poder de la marea, véase el artículo "LaRance: Six Years of Operating a Tidal Power Plant in France", por J. Cotillon en el *Water Power Magazine*.

Sección 7.6 Momentos, centros de masa y centroides

- **Entender la definición de masa.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema unidimensional.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema bidimensional.**
- **Localizar el centro de masa de una lámina plana.**
- **Usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen de un sólido de revolución.**

Masa

En esta sección se estudiarán varias aplicaciones importantes de la integración que se relacionan con la **masa**. La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo al cambiar su estado de movimiento, y es independiente del sistema gravitatorio particular en que el cuerpo se encuentre. Sin embargo, porque tantas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, la masa de un objeto a veces es identificada con su *peso*. Esto no es técnicamente correcto. El peso es un tipo de fuerza y como tal es dependiente de la gravedad. La fuerza y la masa están relacionadas por la ecuación

Fuerza = (masa)(aceleración).

La tabla lista algunas medidas de masa y fuerza, junto con sus factores de conversión.

Sistema de medida	Medida de masa	Medida de fuerza
E.U.	Slug	Libra = (slug)(pies/s^2)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s^2)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s^2)

Conversión:

1 libra = 4.448 newtons	1 slug = 14.59 kilogramos
1 newton = 0.2248 libras	1 kilogramo = 0.06852 slug
1 dina = 0.000002248 libras	1 gramo = 0.00006852 slug
1 dina = 0.00001 newton	1 pie = 0.3048 metros

EJEMPLO 1 Masa en la superficie de la Tierra

Encontrar la masa (en slugs) de un objeto cuyo peso al nivel del mar es 1 libra.

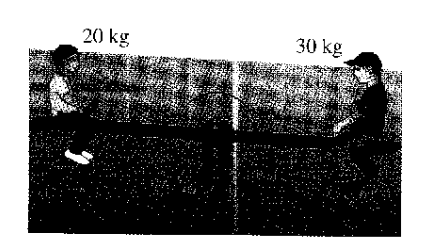
Solución Usando 32 pies/s^2 como la aceleración debida a la gravedad produce

$$\begin{aligned}\text{Masa} &= \frac{\text{fuerza}}{\text{aceleración}} \qquad \text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración}).\\ &= \frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ pies/s}^2}\\ &= 0.03125 \frac{\text{libras}}{\text{pies/s}^2}\\ &= 0.03125 \text{ slug.}\end{aligned}$$

Porque muchas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, esta cantidad de masa se llama **libra masa**.

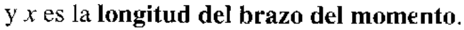
Centro de masa de un sistema unidimensional

Ahora se considerarán dos tipos de momentos de una masa, el **momento respecto a un punto** y el **momento respecto a una recta**. Para definir estos dos momentos, considerar una situación ideal en la cual una masa m se concentra en un punto. Si x es la distancia entre este punto masa y otro punto P, el **momento de m sobre el punto P es**



El columpio se equilibra cuando los momentos a la derecha y a la izquierda son iguales
Figura 7.55

$$\text{Momento} = mx$$



y x es la **longitud del brazo del momento**.

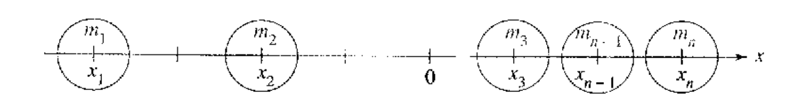
El concepto de momento puede demostrarse por un columpio, como se muestra en la figura 7.55. Un niño de masa de 20 kilogramos se sienta 2 metros a la izquierda del punto de apoyo P, y un niño más grande de masa 30 kilogramos se sienta 2 metros a la derecha de P. Por experiencia, se sabe que el columpio empezará a girar en el sentido de las manecillas del reloj, bajando al niño más grande. Esta rotación ocurre porque el momento producido por el niño a la izquierda es menor al momento producido por el niño a la derecha.

Momento del niño de la izquierda $= (20)(2) = 40$ kilogramos-metro
Momento del niño de la derecha $= (30)(2) = 60$ kilogramos-metro

Para equilibrar el columpio, los dos momentos deben ser iguales. Por ejemplo, si el niño más grande se moviera a una posición de $\frac{4}{3}$ metros del apoyo, el columpio se equilibraría, porque cada niño produciría un momento de 40 kilogramos-metros.

Para generalizar esto, se puede introducir una recta de coordenadas con el origen en el punto de apoyo, como se muestra en la figura 7.56. Suponer algunas masas localizadas en el eje x. La medida de la tendencia de este sistema a girar sobre el origen es el **momento respecto al origen**, y se define como la suma n de productos m_ix_i.

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_nx_n$$



Si $m_1x_1 + m_2x_2 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$, el sistema está en equilibrio
Figura 7.56

Si M_0 es 0, se dice que el sistema está en **equilibrio**.

Para un sistema que no está en equilibrio, el **centro de masa** se define como el punto $\bar{x}$ en el que hay que colocar el punto de apoyo para lograr el equilibrio. Si el sistema fuera trasladado $\bar{x}$ unidades, cada coordenada x_i se volvería $(x_i - \bar{x})$, y porque el momento del sistema trasladado sería 0, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x} = 0.$$

Despejando para $\bar{x}$ produce

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total del sistema}}.$$

Si $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$ el sistema está en equilibrio.

Momentos y centros de masa: Sistema unidimensional

Sea una masa puntual $m_1 x_2, \ldots, m_n$ localizada en $m_1 x_2, \ldots, x_n$.

1. El **momento respecto del origen** es $M_0 = m_1x_1 + m_2 x_2 \ldots + m_nx_n$.
2. El **centro de masa** es $x = \frac{M_0}{m}$ donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

EJEMPLO 2 Centro de masa de un sistema lineal

Encontrar el centro de masa del sistema lineal mostrado en la figura 7.57.

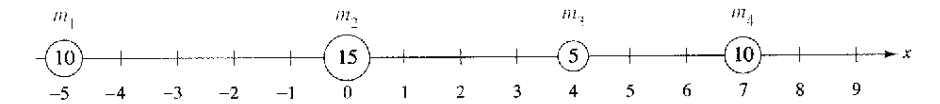


Figura 7.57

Solución El momento sobre el origen es

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \\ &= 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) \\ &= -50 + 0 + 20 + 70 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Porque la masa total del sistema es $m = 10 + 15 + 5 + 10 = 40$, el centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1.$$

NOTA En el ejemplo 2, ¿dónde se debe localizar el apoyo para que las masas puntuales queden en equilibrio?

En lugar de definir el momento de una masa, se podría definir el momento de una *fuerza*. En este contexto, el centro de masa se llama el **centro de gravedad**. Suponer que un sistema de masas puntuales $m_1 m_2, \ldots, m_n$, se localizan en $x_1 x_2, \ldots, x_n$. Entonces, porque la fuerza = (masa)(aceleración), la fuerza total del sistema es

$$\begin{aligned} F &= m_1a + m_2a + \cdots + m_na \\ &= ma. \end{aligned}$$

El **momento de torsión** respecto al origen es

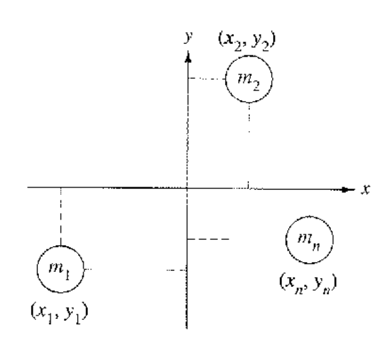
$$\begin{aligned} T_0 &= (m_1a)x_1 + (m_2a)x_2 + \cdots + (m_na)x_n \\ &= M_0a \end{aligned}$$

y el **centro de gravedad** es

$$\frac{T_0}{F} = \frac{M_0a}{ma} = \frac{M_0}{m} = \bar{x}.$$

Así que el centro de gravedad y el centro de masa tienen la misma localización.

Centro de masa de un sistema bidimensional



En un sistema bidimensional, hay un momento sobre el eje y, M_y y un momento sobre el eje x, M_x
Figura 7.58

Se puede extender el concepto de momento a dos dimensiones considerando un sistema de masas localizado en el plano xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ como se muestra en la figura 7.58. En lugar de definir un solo momento (con respecto al origen), dos momentos son definidos uno con respecto al eje x y otro con respecto al eje y.

Momentos y centro de masa: Sistema bidimensional

Sean las masas puntuales $m_1\ m_2, \ldots\ m_n$, localizadas en $(x_1, y_1), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

1. El **momento respecto al eje y** es $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **momento respecto al eje x** es $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$
3. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ (o **centro de gravedad**) es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

El momento de un sistema de masas en el plano puede tomarse respecto de cualquier recta horizontal o vertical. En general, el momento sobre una recta es la suma del producto de las masas y las *distancias dirigidas* de los puntos a la recta.

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \cdots + m_n(y_n - b) \qquad \text{Recta horizontal } y = b.$$
$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \cdots + m_n(x_n - a) \qquad \text{Recta vertical } x = a.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa de un sistema bidimensional

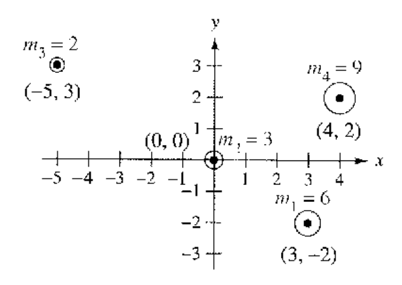


Figura 7.59

Encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6, m_2 = 3, m_3 = 2$ y $m_4 = 9$, localizados en

$(3, -2), (0, 0), (-5, 3)$ y $(4, 2)$

como se muestra en la figura 7.59.

Solución

$$m = 6 + 3 + 2 + 9 = 20 \qquad \text{Masa.}$$
$$M_y = 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 \qquad \text{Momento sobre el eje } y.$$
$$M_x = 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 \qquad \text{Momento sobre el eje } x.$$

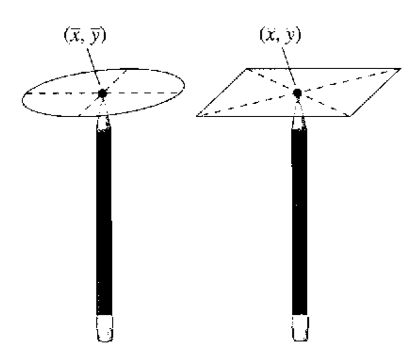
Así,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

y

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

y así el centro de masa es $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$.



Se puede pensar en el centro de masa (x, y) de una lámina como su punto de equilibrio. Para una lámina circular, el centro de masa es el centro del círculo. Para una lámina rectangular, el centro de masa es el centro del rectángulo
Figura 7.60

Centro de masa de una lámina plana

Hasta ahora en esta sección se ha asumido que la masa total de un sistema está distribuida en puntos discretos en un plano o en una recta. Ahora se considera una lámina plana delgada, de material con densidad constante llamada una **lámina plana** (véase la figura 7.60). La **densidad** es una medida de masa por unidad de volumen, como g/cm^3. Sin embargo, se considera que la densidad es una medida de masa por unidad de área para las láminas planas. La densidad es denotada por ρ, escrita en letra minúscula griega (rho).

Considerar una lámina plana irregularmente formada de densidad uniforme ρ, limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, y $a \leq x \leq b$, como se muestra en la figura 7.61. La masa de esta región está dada por

$$\begin{aligned} m &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \rho A \end{aligned}$$

donde A es el área de la región. Para encontrar el centro de masa de esta lámina, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de anchura igual Δx. Sea x_i el centro del i-ésimo subintervalo. Se puede aproximar la porción de la lámina que queda en el i-ésimo subintervalo por un rectángulo cuya altura es $h = f(x_i) - g(x_i)$. Porque la densidad del rectángulo es ρ, su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \underset{\text{Densidad}}{\rho}\, \underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{Altura}}\, \underbrace{\Delta x}_{\text{Ancho}}. \end{aligned}$$

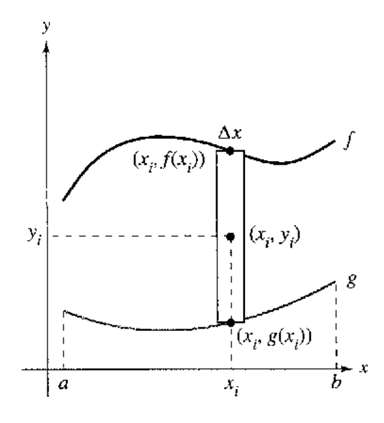


Lámina plana de densidad uniforme ρ
Figura 7.61

Ahora, considerando esta masa localizada en el centro (x_i, y_i) del rectángulo, la distancia dirigida del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$. Así, el momento de m_i respecto del eje x es

$$\begin{aligned} \text{Momento} &= (\text{masa})(\text{distancia}) \\ &= m_i y_i \\ &= \rho[f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x \left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Sumando los momentos y tomando el límite cuando $n \to \infty$ hace pensar en las definiciones siguientes.

> **Momentos y centro de masa de una lámina plana**
>
> Sea f y g funciones continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, y considerar la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas
>
> $y = f(x)$, $y = g(x)$, y $a \leq x \leq b$.
>
> 1. Los **momentos respecto al eje x y y** son
>
> $$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\, dx$$
> $$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx.$$
>
> 2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ es la masa de la lámina.

EJEMPLO 4 Centro de masa de una lámina plana

Encontrar el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ acotada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

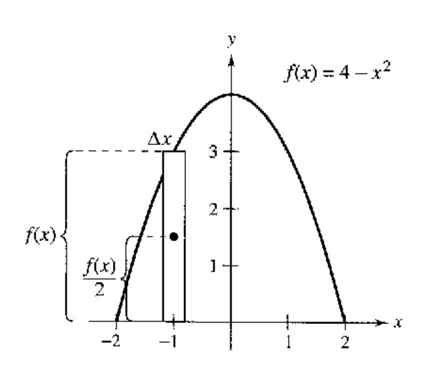


Figura 7.62

Solución Porque el centro de masa está situado en el eje de simetría, se sabe que $\bar{x} = 0$. Es más, la masa de la lámina es

$$m = \rho \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$$
$$= \rho \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{32\rho}{3}.$$

Para encontrar el momento respecto del eje x, poner un rectángulo representativo en la región, como se muestra en la figura 7.62. La distancia del eje x al centro de este rectángulo es

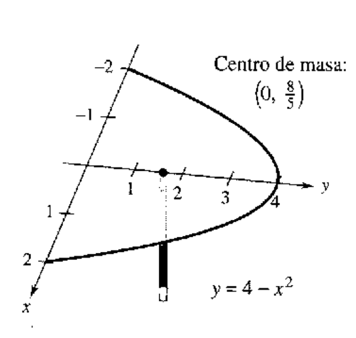
$$y_i = \frac{f(x)}{2} = \frac{4 - x^2}{2}.$$

Porque la masa del rectángulo representativo es

$$\rho f(x)\, \Delta x = \rho(4 - x^2)\, \Delta x$$

se tiene

$$M_x = \rho \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2)\, dx$$
$$= \frac{\rho}{2} \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$
$$= \frac{\rho}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{2}^{2}$$
$$= \frac{256\rho}{15}$$



El centro de masa es el punto de equilibrio
Figura 7.63

y $\bar{y}$ está dada por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256\rho/15}{32\rho/3} = \frac{8}{5}.$$

Así, el centro de masa (o punto de equilibrio) de la lámina es $(0, \frac{8}{5})$, como se muestra en la figura 7.63.

La densidad ρ en el ejemplo 4 es un factor común a los momentos y a la masa, por lo que se cancela y no aparecen las coordenadas del centro de masa. Así que, el centro de masa de una lámina de densidad *uniforme* sólo depende de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{Centro de masa o centroide.}$$

a veces se llama el centro de masa de una *región* en el plano, o **centroide** de la región. En otros términos, para encontrar el centroide de una región en el plano, se asume simplemente que la región tiene una densidad constante de $\rho = 1$ y se calcula el centro correspondiente de masa.

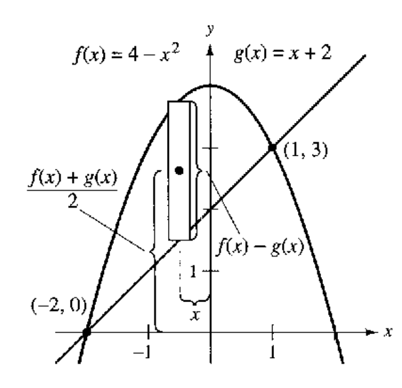


Figura 7.64

Cortar una forma irregular de una pieza de cartón.

a) Sostener un lápiz verticalmente y mover el objeto sobre el punto del lápiz hasta localizar el centroide.

b) Dividir el objeto en elementos representativos. Hacer las medidas necesarias y aproximar numéricamente el centroide. Comparar sus resultados con el resultado del apartado *a*).

EJEMPLO 5 Centroide de una región plana

Encontrar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución Las dos gráficas se cortan en los puntos (−2, 0) y (1, 3), como se muestra en la figura 7.64. Así, el área de la región es

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2}.$$

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región tiene las coordenadas siguientes.

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x[(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)\, dx$$
$$= \frac{2}{9}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2}$$
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2}\right][(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx$$
$$= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-2}^{1} (-x^2 + x + 6)(-x^2 - x + 2)\, dx$$
$$= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)\, dx$$
$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{12}{5}.$$

Así, el centroide de la región es $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$.

Para las regiones planas simples, se pueden encontrar los centroides sin recurrir a la integración.

EJEMPLO 6 El centroide de una región plana simple

Encontrar el centroide de la región mostrada en la figura 7.65*a*).

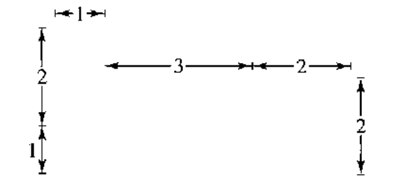
Solución Sobreponiendo un sistema de coordenadas en la región, como se muestra en la figura 7.65*b*), se pueden localizar los centroides de los tres rectángulos en

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{y} \quad (5, 1).$$

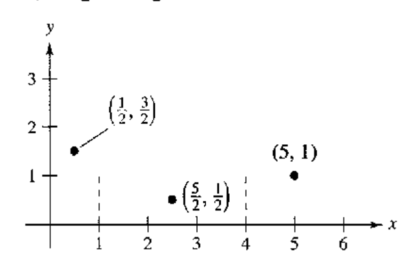
Usando estos tres puntos, se puede encontrar el centroide de la región.

$$A = \text{región del área} = 3 + 3 + 4 = 10$$
$$\bar{x} = \frac{(1/2)(3) + (5/2)(3) + (5)(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2.9$$
$$\bar{y} = \frac{(3/2)(3) + (1/2)(3) + (1)(4)}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Así, el centroide de la región es (2.9, 1).

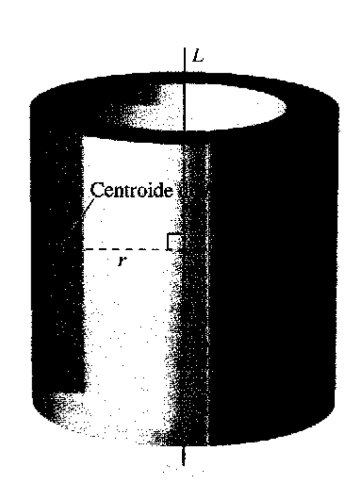


a) Región original



b) El centroide de tres rectángulos
Figura 7.65

NOTA En el ejemplo 6, notar que (2.9, 1) no es promedio de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y (5, 1).



El volumen V es $2\pi\, rA$, donde A es el área de la región R
Figura 7.66

Teorema de Pappus

El último tema en esta sección es un teorema útil acreditado a Pappus de Alejandría (ca. 300 d.C.), matemático griego, cuya *Mathematical Collection* en ocho volúmenes es un registro de la matemática griega clásica. La prueba de este teorema se da en la sección 14.4.

TEOREMA 7.1 El teorema de Pappus

Sea R una región en un plano y sea L una recta en el mismo plano tal que L no interseca el interior de R, como se muestra en la figura 7.66. Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución formado al girar R sobre la recta es

$$V = 2\pi\, r/A$$

donde A es el área de R. (Observar que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide cuando la región gira en torno a la recta.)

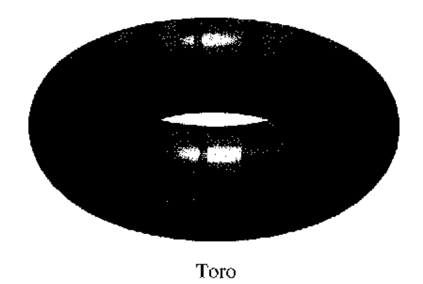
El teorema de Pappus puede usarse para encontrar el volumen de un toro, como se muestra en el ejemplo siguiente. Recordar que un toro es un sólido en forma de rosquilla formado al girar una región circular alrededor una recta que queda en el mismo plano como el círculo (pero no corta el círculo).

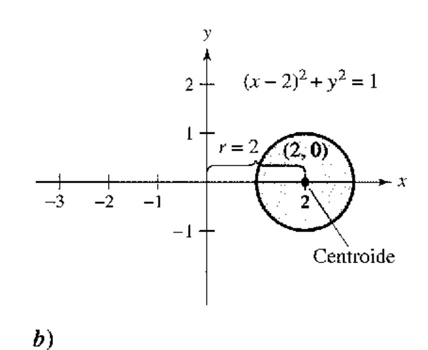
EJEMPLO 7 Encontrar el volumen por el teorema de Pappus

Encontrar el volumen del toro que se muestra en la figura 7.67*a* que es formado al girar la región circular limitada por

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.67*b*.





a) *b*)
Figura 7.67

Usar el método de las capas para mostrar que el volumen del toro está dado por

$$V = \int_1^3 4\pi x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx.$$

Evaluar esta integral usando calculadora. ¿Coincide la respuesta con la del ejemplo 7?

Solución En la figura 7.67*b*, se puede ver que el centroide de la región circular es $(2, 0)$. Así, la distancia entre el centroide y el eje de revolución es $r = 2$. Porque el área de la región circular es $A = \pi$, el volumen de toro es

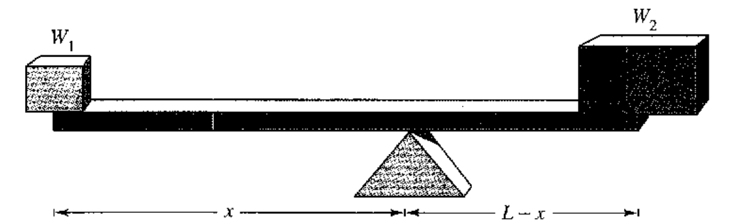
$$\begin{aligned} V &= 2\pi\, rA \\ &= 2\pi(2)(\pi) \\ &= 4\pi^2 \\ &\approx 39.5. \end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 7.6

En los ejercicios 1 a 4, encontrar el centro de masa de la masa puntual situado en el eje x.

1. $m_1 = 6, m_2 = 3, m_3 = 5$
 $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$
2. $m_1 = 7, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 8$
 $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 6$
3. $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, m_5 = 1$
 $x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = 12, x_4 = 15, x_5 = 18$
4. $m_1 = 12, m_2 = 1, m_3 = 6, m_4 = 3, m_5 = 11$
 $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 0, x_5 = 8$
5. ***Razonamiento gráfico***
 a) Trasladar cada masa del punto en el ejercicio 3 a las cinco unidades a la derecha y determinar el centro resultante de masa.
 b) Trasladar a la izquierda tres unidades cada masa del punto en el ejercicio 4 y determinar el centro de masa resultante.
6. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 5 para hacer una conjetura sobre el cambio en el centro de masa que resulta cuando cada masa del punto se traslada k unidades horizontalmente.

Problemas de estática **En los ejercicios 7 y 8, considerar una viga de longitud L con un apoyo a x pies de un extremo (ver la figura). Se colocan los objetos con pesos W_1 y W_2 en los extremos opuestos de la viga. Encontrar x tal que el sistema esté en equilibrio.**



7. Dos niños que pesan 50 libras y 75 libras van a jugar en un columpio que tiene 10 pies de largo.
8. Para mover una roca de 550 libras, una persona que pesa 200 libras quiere balancearla con una viga que tiene 5 pies de longitud.

En los ejercicios 9 a 12, encontrar el centro de masa del sistema de las masas puntuales dado.

9.

m_i	5	1	3
(x_1, y_1)	(2, 2)	(−3, 1)	(1, −4)

10.

m_i	10	2	5
(x_1, y_1)	(1, −1)	(5, 5)	(−4, 0)

11.

m_i	3	4
(x_1, y_1)	(−2, −3)	(5, 5)

m_i	2	1	6
(x_1, y_1)	(7, 1)	(0, 0)	(−3, 0)

12.

m_i	12	6	$\frac{15}{2}$	15
(x_1, y_1)	(2, 3)	(−1, 5)	(6, 8)	(2, −2)

En los ejercicios 13 a 24, encontrar M_x, M_y y $(\bar{x}, \bar{y})$ para las láminas de densidad uniforme ρ acotadas por las gráficas de las ecuaciones.

13. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$
14. $y = \frac{1}{2}x^2, y = 0, x = 2$
15. $y = x^2, y = x^3$
16. $y = \sqrt{x}, y = x$
17. $y = -x^2 + 4x + 2, y = x + 2$
18. $y = \sqrt{x} + 1, y = \frac{1}{3}x + 1$
19. $y = x^{2/3}, y = 0, x = 8$
20. $y = x^{2/3}, y = 4$
21. $x = 4 - y^2, x = 0$
22. $x = 2y - y^2, x = 0$
23. $x = -y, x = 2y - y^2$
24. $x = y + 2, x = y^2$

En los ejercicios 25 a 28, formular y evaluar las integrales para encontrar el área y los momentos sobre los ejes x y y para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. (Asumir $\rho = 1$.)

25. $y = x^2, y = x$
26. $y = \dfrac{1}{x}, y = 0, 1 \leq x \leq 4$
27. $y = 2x + 4, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
28. $y = x^2 - 4, y = 0$

En los ejercicios 29 a 32, usar una computadora para hacer la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar las capacidades de integración de una calculadora para aproximar el centroide de la región.

29. $y = 10x\sqrt{125 - x^3}, y = 0$
30. $y = xe^{-x/2}, y = 0, x = 0, x = 4$
31. ***Sección prefabricada de un edificio.***
 $y = 5\sqrt[3]{400 - x^2}, y = 0$
32. ***Bruja de Agnesi.***
 $y = 8/(x^2 + 4), y = 0, x = -2, x = 2$

En los ejercicios 33 a 38, encontrar y/o verificar el centroide de la región común usada en ingeniería.

33. ***Triángulo*** Mostrar que el centroide del triángulo con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) es el punto de intersección de las medianas (ver la figura).

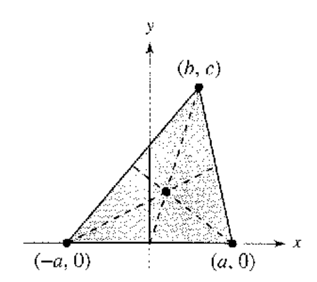


Figura para 33

Figura para 34

34. ***Paralelogramo*** Mostrar que el centroide del paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c), y $(a + b, c)$ es el punto de intersección de las diagonales (ver la figura).

35. ***Trapecio*** Encontrar el centroide del trapecio con vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (c, b), y $(c, 0)$. Mostrar que es la intersección de la recta que conecta los puntos medios de los lados paralelos y la recta que conecta los lados paralelos extendidos, como se muestra en la figura.

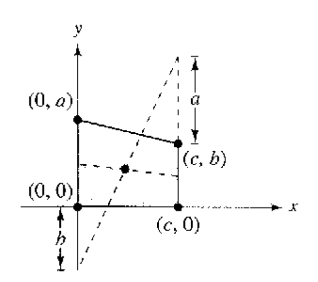


Figura para 35

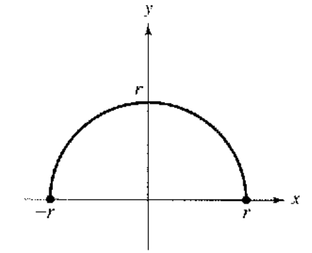


Figura para 36

36. ***Semicírculo*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

37. ***Semielipse*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

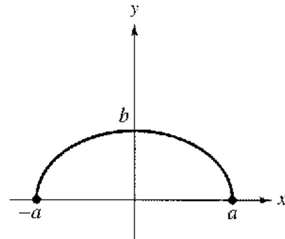


Figura para 37

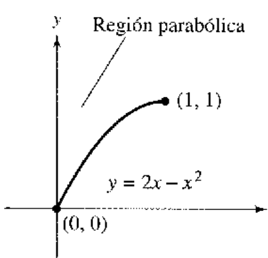


Figura para 38

38. ***Región parabólica*** Encontrar el centroide de la **región parabólica** mostrada en la figura.

39. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = b$, donde $b > 0$.

  a) Dibujar una gráfica de la región.

  b) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar $\bar{x}$. Explicar.

  c) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado del apartado *b*).

  d) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar si $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$. Explicar.

  e) Usar la integración para verificar la respuesta en el apartado *d*).

40. ***Razonamiento gráfico y numérico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^{2n}$ y $y = b$ donde $b > 0$ y n es un entero positivo.

  a) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado *b*).

  b) ¿Es $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$? Explicar.

  c) Usar integración para encontrar $\bar{y}$ como una función de n.

  d) Usar el resultado del apartado *c*) para completar la tabla.

n	1	2	3	4
$\bar{y}$				

  e) Encontrar $\lim_{n\to\infty} \bar{y}$.

  f) Dar una explicación geométrica del resultado en el apartado *e*).

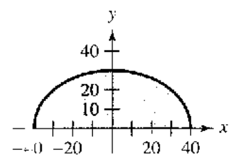
41. ***Modelo matemático*** Un fabricante de ventanas para camionetas modificadas necesita calcular el centro de masa. Para lo cual sobrepone un sistema de coordenadas en un prototipo del vidrio (ver la figura). Las medidas (en centímetros) para la mitad derecha del pedazo simétrico de vidrio se muestran en la tabla.

x	0	10	20	30	40
y	30	29	26	20	0

  a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa del vidrio.

  b) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos.

  c) Usar las capacidades de integración de una calculadora y el modelo para aproximar el centro de masa del vidrio. Comparar con el resultado del apartado *a*).



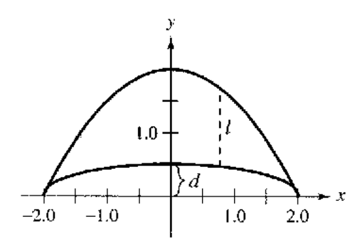
42. ***Modelo matemático*** El fabricante de un barco necesita aproximar el centro de masa de una sección del casco. Un sistema de coordenadas se sobrepone en un prototipo (ver la figura). Las medidas (en pies) para la mitad derecha del prototipo simétrico se listan en la tabla.

x	0	0.5	1.0	1.5	2
l	1.50	1.45	1.30	0.99	0
d	0.50	0.48	0.43	0.33	0

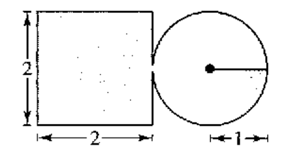
a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón.

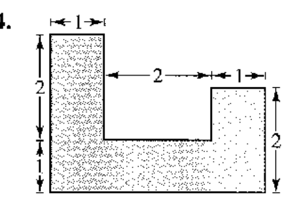
b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar los modelos polinómicos de cuarto grado para ambas curvas mostradas en la figura. Trazar los datos y trazar la gráfica de los modelos.

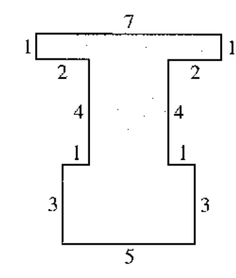
c) Usar las capacidades de la integración en una calculadora y el modelo para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón. Comparar el resultado con el inciso *a*).

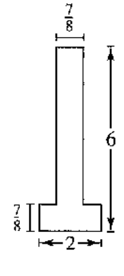


En los ejercicios 43 a 46, introducir un sistema de coordenadas apropiado y encontrar las coordenadas del centro de masa de la lámina plana. (La respuesta depende de la posición del sistema de coordenadas elegido.)

43. 

44. 

45. 

46. 

47. Encontrar el centro de masa de la lámina, del ejercicio 43 si la sección circular tuviera el doble de la densidad de la cuadrada.

48. Encontrar el centro de masa de la lámina del ejercicio 43 si la la sección cuadrada tuviera el doble de la densidad de la circular.

En los ejercicios 49 a 52, usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido de revolución.

49. El toro formado al girar el círculo $(x-5)^2+y^2=16$ alrededor del eje y.

50. El toro formado al girar el círculo $x^2+(y-3)^2=4$ alrededor del eje x.

51. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y=x$, $y=4$, y $x=0$ alrededor del eje x.

52. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y=2\sqrt{x-2}$, $y=0$, y $x=6$ alrededor del eje y.

Desarrollo de conceptos

53. Sea la masa puntual $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizada en (x_1, y_1) $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Definir el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$.

54. ¿Qué es una lámina plana? Describir lo que significa el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina plana.

55. El centroide de la región plana acotado por las gráficas de $y=f(x)$, $y=0$, $x=0$, y $x=1$ es $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{18}\right)$. ¿Es posible encontrar el centroide de cada una de las regiones acotadas por las gráficas de los siguientes conjuntos de ecuaciones? En ese caso, identificar el centroide y explicar la respuesta.

a) $y=f(x)+2$, $y=2$, $x=0$, y $x=1$

b) $y=f(x-2)$, $y=0$, $x=2$, y $x=3$

c) $y=-f(x)$, $y=0$, $x=0$, y $x=1$

d) $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, y $x=1$

56. Enumerar el teorema de Pappus.

En los ejercicios 57 y 58, usar el *segundo teorema de Pappus* el cual se enuncia a continuación. Si un segmento de una curva plana C se gira alrededor de un eje que no corta la curva (posiblemente excepto a sus puntos finales), el área S de la superficie de revolución resultante está dada por el producto de la longitud de C por la distancia d recorrida por el centroide de C.

57. Una esfera se forma al girar la gráfica de $y=\sqrt{r^2-x^2}$ alrededor del eje x. Usar la fórmula para el área de la superficie, $S=4\pi r^2$, para encontrar el centroide del semicírculo $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

58. Un toro se forma al girar la gráfica de $(x-1)^2+y^2=1$ alrededor del eje y. Encontrar el área de la superficie del toro.

59. Sea $n \geq 1$ constante, y considerar la región acotada por el $f(x)=x^n$, el eje x, y $x=1$. Encontrar el centroide de esta región. Cuando $n\to\infty$ ¿qué aspecto tiene la región y dónde está su centroide?

Presentación del examen Putnam

60. Sea V la región en el plano cartesiano que consiste en todos los puntos (x, y) satisfaciendo las condiciones simultáneas

$$|x| \leq y \leq |x| + 3 \quad \text{y} \quad y \leq 4.$$

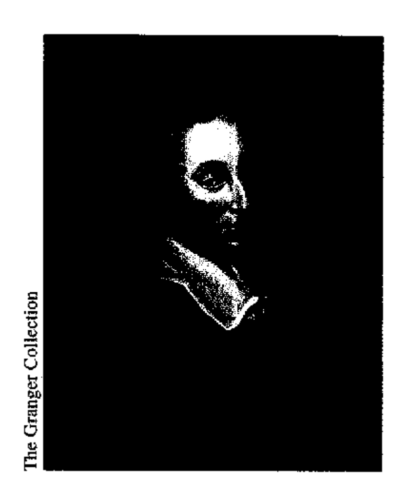
Encontrar el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de V.

Sección 7.7 Presión y fuerza de un fluido

- **Encontrar la presión y la fuerza de un fluido.**

Presión y fuerza de un fluido

Los buceadores saben que mientras más profundo se sumerge un objeto en un fluido, es mayor la presión sobre el objeto. La **presión** se define como la fuerza ejercida por unidad de área en la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, para una columna de agua que tiene 10.1 pies^2 de altura y 1 pulg^2 pesa 4.3 libras, la *presión del fluido* ejercida a una profundidad de 10 pies de agua es 4.3/pulg^2.* A 20 pies, ésta aumentaría a 8.6 libras/pulg^2 y en general la presión será proporcional a la profundidad a la que esté el objeto en el fluido.


The Granger Collection

BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es bien conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las matemáticas y de la física, así como por su influencia con Leibniz. Aunque buena parte de su obra en cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las matemáticas modernas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

Definición de presión de fluido

La presión en un objeto a la profundidad h en un líquido es

Presión $= P = wh$

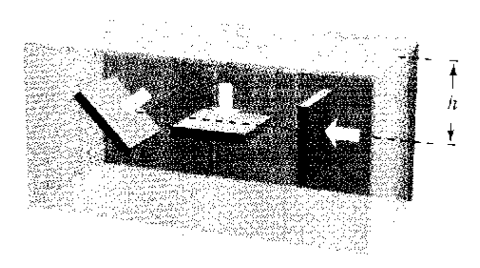
donde w es la densidad de peso del líquido por unidad de volumen.

A continuación se muestran varias densidades de peso de fluidos comunes en libras/pie^3 .

Alcohol etílico	49.4
Gasolina	41.0-43.0
Glicerina	78.6
Keroseno	51.2
Mercurio	849.0
Agua de mar	64.0
Agua	62.4

Cuando se calcula la presión del fluido, se puede usar una importante (y sorprendente) ley física llamada el **principio de Pascal** en honor del matemático francés Blaise Pascal. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a una profundidad h es exactamente igual *en todas direcciones*. Por ejemplo en la figura 7.68, la presión a la profundidad indicada es la misma para los tres objetos. Como se da la presión del fluido en términos de la fuerza por unidad de área ($P = F/A$), la fuerza del fluido en una superficie de área A sumergida horizontalmente es

Fuerza del fluido $= F = PA =$ (presión)(área).

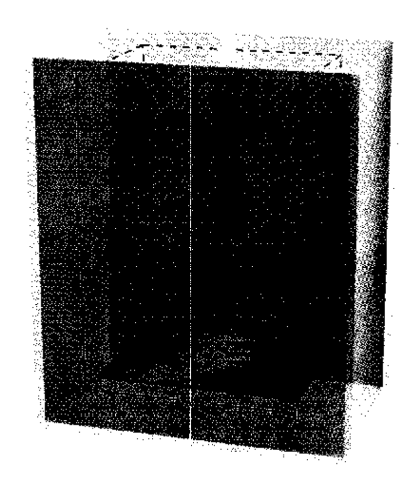


La presión en h es la misma para los tres objetos
Figura 7.68

** La presión total en un objeto sumergido a 10 pies de agua también incluiría la presión debida a la atmósfera de la Tierra. Al nivel del mar, la presión atmosférica es aproximadamente 14.7 libras/pulg^2.*

EJEMPLO 1 Fuerza de un fluido sobre una lámina sumergida

Encontrar la fuerza de un fluido sobre una lámina de metal rectangular que mide 3 pies por 4 pies que es sumergida a 6 pies en el agua, como se muestra en la figura 7.69.



La fuerza del fluido sobre una lámina de metal horizontal es igual a la presión del fluido por el área de la lámina
Figura 7.69

Solución Porque el peso por unidad de agua es 62.4 libras por pie^3 y la lámina se sumerge a 6 pies en el agua, la presión del fluido es

$$\begin{aligned} P &= (62.4)(6) \qquad P = wh \\ &= 374.4 \text{ libras por pie}^2 \end{aligned}$$

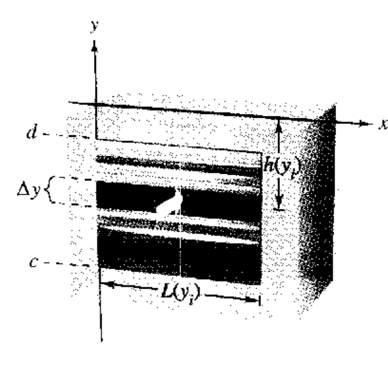
Porque el área total de la lámina es $A = (3)(4) = 12$ pies^2, la fuerza del fluido es

$$\begin{aligned} F = PA &= \left(374.4 \frac{\text{libras}}{\text{pie}^2}\right)(12 \text{ pies}^2) \\ &= 4\,492.8 \text{ libras} \end{aligned}$$

Este resultado es independiente del recipiente del agua. La fuerza del fluido sería la misma en una piscina que en un lago.

En el ejemplo 1, debido a que la lámina es rectangular y horizontal no son necesarios los métodos de cálculo para resolver el problema. Considerar una superficie que se sumerge verticalmente en un fluido. Este problema es más difícil porque la presión no es constante sobre la superficie.

Suponer una lámina vertical que se sumerge en un fluido de peso w (por unidad de volumen), como se muestra en la figura 7.70. Para determinar la fuerza total ejercida sobre una cara entre la profundidad c y la profundidad d, se puede subdividir el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos, cada uno de anchura Δy. Luego, considerar el rectángulo representativo de anchura Δy y longitud $L(y_i)$, donde y_i está en el i-ésimo subintervalo. La fuerza ejercida contra este rectángulo representativo es



Los métodos de cálculo serán usados para encontrar la fuerza del fluido sobre una placa de metal vertical
Figura 7.70

$$\begin{aligned} \Delta F_i &= w(\text{profundidad})(\text{área}) \\ &= wh(y_i)L(y_i)\,\Delta y. \end{aligned}$$

La fuerza sobre los n rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w\sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y.$$

Observar que se considera que w es constante y se factoriza fuera de la suma. Por consiguiente, si el límite es $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, sugiere la definición siguiente.

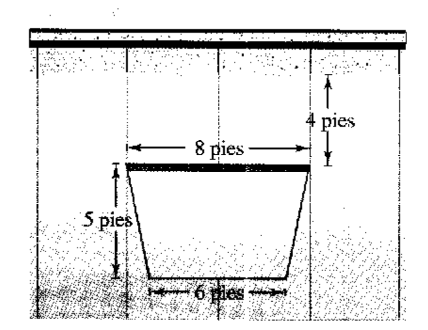
Definición de fuerza ejercida por un fluido

La **fuerza F ejercida por un fluido** de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

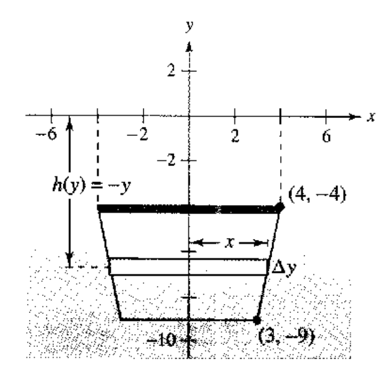
$$\begin{aligned} F &= w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y \\ &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy \end{aligned}$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido en una superficie vertical



a) Compuerta de una presa



b) La fuerza del fluido sobre la compuerta
Figura 7.71

Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo, con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura 7.71*a*. ¿Cuál es la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está 4 pies debajo de la superficie del agua?

Solución Formular un modelo matemático para este problema, tiene libertad para localizar los ejes x y y de maneras diferentes. Una sugerencia conveniente es tomar el eje y, bisecar la compuerta y poner el eje x en la superficie del agua, como se muestra en la figura 7.71*b*. Así, la profundidad del agua en y, en pies, es

$$\text{Profundidad} = h(y) = -y.$$

Para encontrar la longitud $L(y)$ de la región en y, localizar la ecuación de la recta que forma el lado derecho de la compuerta. Porque esta recta atraviesa los puntos (3, −9) y (4, −4), su ecuación es

$$\begin{aligned} y-(-9) &= \frac{-4-(-9)}{4-3}(x-3) \\ y+9 &= 5(x-3) \\ y &= 5x-24 \\ x &= \frac{y+24}{5}. \end{aligned}$$

En la figura 7.71*b* se puede observar que la longitud de la región en y es

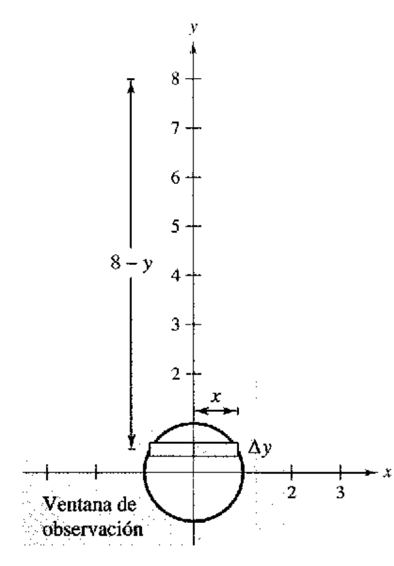
$$\begin{aligned} \text{Longitud} &= 2x \\ &= \frac{2}{5}(y+24) \\ &= L(y). \end{aligned}$$

Por último, integrando de $y = -9$ a $y = -4$ se puede calcular la fuerza del fluido para ser

$$\begin{aligned} F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy \\ &= 62.4\int_{-9}^{-4}(-y)\left(\frac{2}{5}\right)(y+24)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\int_{-9}^{-4}(y^2+24y)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left[\frac{y^3}{3}+12y^2\right]_{-9}^{-4} \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-1675}{3}\right) \\ &= 13\,936 \text{ libras.} \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2, el eje x coincidió con la superficie del agua. Esto es conveniente, pero arbitrario. Al elegir un sistema de coordenadas para representar una situación física, se deben considerar varias posibilidades. A menudo puede simplificar los cálculos en un problema si localiza el sistema de coordenadas aprovechando las características especiales del problema, como la simetría.

EJEMPLO 3 Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical



La fuerza del fluido en la ventana
Figura 7.72

Una ventana circular de observación en un buque para la investigación marina tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies de distancia del nivel del agua, como se muestra en la figura 7.72. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la ventana?

Solución Para aprovechar la simetría, localizar un sistema de coordenadas tal que el origen coincida con el centro de la ventana, como se muestra en la figura 7.72. La profundidad en y es, entonces

$$\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y.$$

La longitud horizontal de la ventana es $2x$, y se puede usar la ecuación para el círculo, $x^2 + y^2 = 1$, y resolver para x como sigue.

$$\begin{aligned}\text{Longitud} &= 2x\\ &= 2\sqrt{1-y^2} = L(y)\end{aligned}$$

Por último, dado que el rango de y va de -1 a 1, y la densidad del agua de mar es de 64 libras por pie^3, se tiene

$$\begin{aligned}F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy\\ &= 64\int_{-1}^{1}(8-y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy.\end{aligned}$$

Inicialmente parece como si esta integral fuera difícil de resolver. Sin embargo, si se divide la integral en dos partes y se aplica la simetría, la solución es simple.

$$F = 64(16)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy - 64(2)\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0 (porque el integrando es impar y los límites de integración son simétricos al origen). Es más, reconociendo que la primera integral representa el área de un semicírculo de radio 1, se obtiene

$$\begin{aligned}F &= 64(16)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 64(2)(0)\\ &= 512\pi\\ &\approx 1\,608.5 \text{ libras}\end{aligned}$$

Así, la fuerza del fluido en la ventana es 1 608.5 libras.

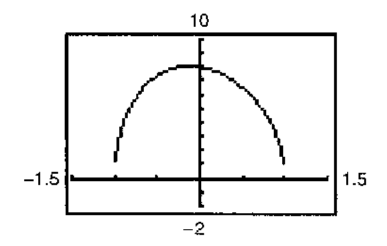
TECNOLOGÍA Para confirmar el resultado obtenido en el ejemplo 3, se podría considerar la regla de Simpson para aproximar el valor de

$$128\int_{-1}^{1}(8-x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

De la gráfica de

$$f(x) = (8-x)\sqrt{1-x^2}$$

sin embargo, se puede observar que f no es derivable cuando $x = \pm 1$ (véase la figura 7.73). Esto significa que no se puede aplicar el teorema 4.19 de la sección 4.6 para determinar el error potencial en la regla de Simpson. Sin conocer el error potencial, la aproximación es de poca utilidad. Usar una calculadora para aproximar la integral.



f no es derivable en $x = \pm 1$
Figura 7.73

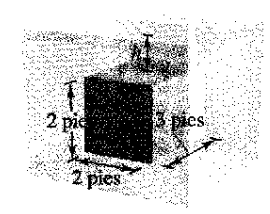
Ejercicios de la sección 7.7

Fuerza ejercida sobre una lámina sumergida **En los ejercicios 1 y 2, se da el área del lado superior de una lámina de metal. La lámina se sumerge horizontalmente a 5 pies del agua. Encontrar la fuerza del fluido en el lado de la parte superior.**

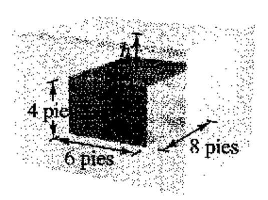
1. 3 pies^2 **2.** 16 pies^2

Fuerza de flotación **En los ejercicios 3 y 4, encontrar la fuerza de flotación de un sólido rectangular de las dimensiones dadas sumergido en el agua con su cara superior paralela a la superficie del agua. La fuerza de flotación es la diferencia entre las fuerzas del fluido en la parte superior y los lados del fondo del sólido.**

3.

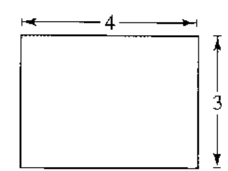


4.

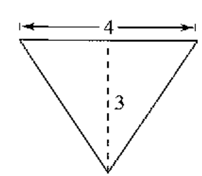


Fuerza de un fluido sobre la pared de un tanque **En los ejercicios 5 a 10, encontrar la fuerza del fluido en el lado vertical del tanque donde las dimensiones se dan en pies. Asumir que el tanque está lleno de agua.**

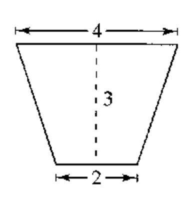
5. Rectángulo



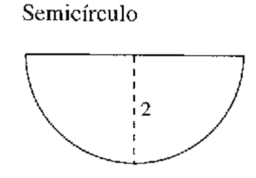
6. Triángulo



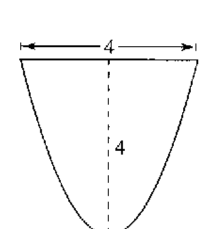
7. Trapezoide



8. Semicírculo



9. Parábola, $y = x^2$



10. Semielipse

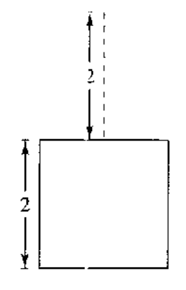
$y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$

4

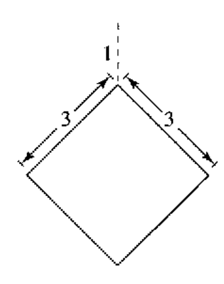
3

Fuerza de un fluido de agua **En los ejercicios 11 a 14, encontrar la fuerza de un fluido en la placa vertical sumergida en agua donde las dimensiones se dan en metros y la densidad de peso del agua es 9 800 newtons por metro^3.**

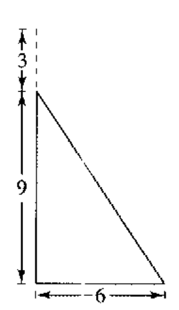
11. Cuadrado



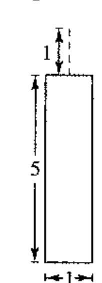
12. Cuadrado



13. Triángulo

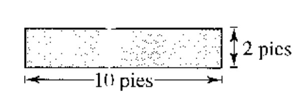


14. Rectángulo



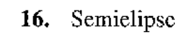
Fuerza ejercida en una estructura de concreto (hormigón) **En los ejercicios 15 a 18, la figura es el lado vertical de una estructura de concreto vertido que pesa 140.7 libras/pie^3. Determinar la fuerza en esta parte de la estructura de concreto.**

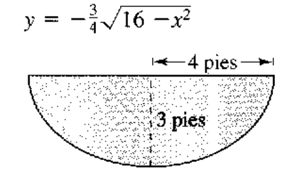
15. Rectángulo



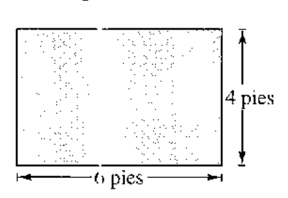
16. Semielipse

$y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

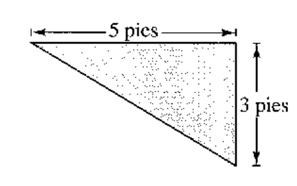




17. Rectángulo



18. Triángulo



19. ***Fuerza ejercida por la gasolina*** Un tanque de gasolina cilíndrico está colocado con su eje en posición horizontal. Encontrar la fuerza del fluido sobre una de las paredes del tanque si éste está medio lleno, asumiendo que su diámetro es de 3 pies y la gasolina pesa 42 libras/pie^3.

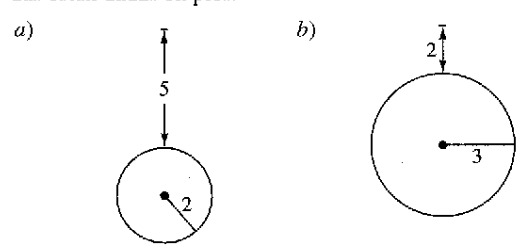
20. ***Fuerza de fluido de la gasolina*** Repetir el ejercicio 19 para un tanque que está lleno. (Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

21. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Una placa circular r pies es sumergida verticalmente en un tanque de un fluido que pesa w libras/pie^3. El centro del círculo es k ($k > r$) pies debajo de la superficie del fluido. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

$F = wk(\pi r^2)$.

(Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

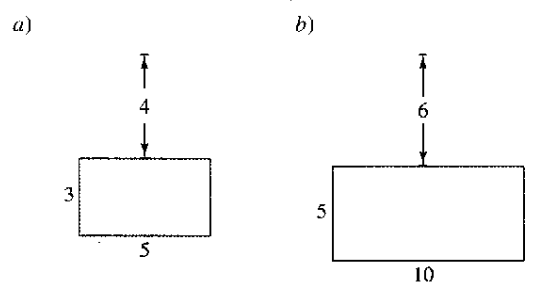
22. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Usar el resultado del ejercicio 21 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa circular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.



23. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Una placa rectangular de altura h pies y base b se sumerge verticalmente en un tanque de fluido que pesa w libras por pie cúbico. El centro está k debajo de la superficie del fluido donde $h \leq k/2$. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

$F = wkhb$.

24. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Usar el resultado del ejercicio 23 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa rectangular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

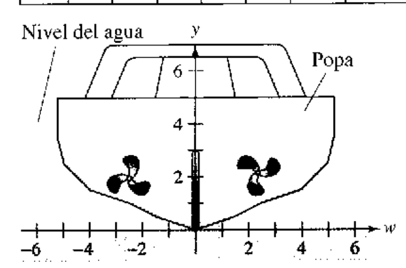


25. ***Portilla de un submarino*** Una portilla en un lado vertical de un submarino (sumergido en agua de mar) es un cuadrado de un pie de lado. Encontrar la fuerza del fluido en la portilla, asumiendo que el centro del cuadrado está 15 pies debajo de la superficie.

26. ***Portilla de un submarino*** Repetir el ejercicio 25 para una portilla circular que tiene un diámetro de un pie. El centro está 15 pies debajo de la superficie.

27. ***Modelo matemático*** La popa vertical de un barco con un sistema de coordenadas sobrepuesto se ilustra en la figura. La tabla muestra la anchura w de la popa en los valores indicados de y. Encontrar la fuerza del fluido contra la popa si las medidas se dan en pies.

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
w	0	3	5	8	9	10	10.25	10.5	10.5



28. ***Compuerta de un canal de irrigación*** La sección transversal vertical de una compuerta de un canal de irrigación es diseñado por

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 4}$$

donde x se mide en pies y $x = 0$ corresponden al centro del canal. Usar las capacidades de integración de una calculadora para aproximar la fuerza del fluido contra una compuerta vertical que detiene el flujo de agua si el agua está a 3 pies de profundidad.

En los ejercicios 29 y 30, usar las capacidades de integración en una calculadora para aproximar la fuerza de un fluido en la placa vertical acotada por el eje x y la mitad superior de la gráfica de la ecuación. Asumir que la base de la placa está 12 pies debajo de la superficie del agua.

29. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$

30. $\dfrac{x^2}{28} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

31. ***Para pensar***

a) Aproximar la profundidad del agua en el tanque en el ejercicio 5 si la fuerza del fluido es la mitad más grande cuando el tanque está lleno.

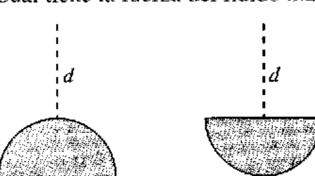
b) Explicar por qué la respuesta en el apartado *a)* no es $\frac{3}{2}$.

Desarrollo de conceptos

32. Definir la presión de un fluido.

33. Definir la fuerza de un fluido contra una región plana sumergida verticalmente.

34. Se colocan dos ventanas semicirculares idénticas a la misma profundidad en la pared vertical de un acuario (ver la figura). ¿Cuál tiene la fuerza del fluido mayor? Explicar.



Ejercicios de repaso del capítulo 7

En los ejercicios 1 a 10, esquematizar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y determinar el área de la región.

1. $y = \frac{1}{x^2}, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 5$
2. $y = \frac{1}{x^2}, \ y = 4, \ x = 5$
3. $y = \frac{1}{x^2 + 1}, \ y = 0, \ x = -1, \ x = 1$
4. $x = y^2 - 2y, \ x = -1, \ y = 0$
5. $y = x, \ y = x^3$
6. $x = y^2 + 1, \ x = y + 3$
7. $y = e^x, \ y = e^2, \ x = 0$
8. $y = \csc x, \ y = 2$ (una región)
9. $y = \operatorname{sen} x, \ y = \cos x, \ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$
10. $x = \cos y, \ x = \frac{1}{2}, \ \frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{7\pi}{3}$

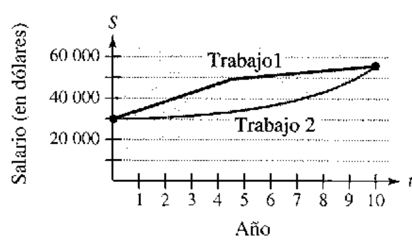
En los ejercicios 11 a 14, usar una calculadora para representar la región acotada por las gráficas de las funciones, y usar las capacidades de integración en una calculadora para encontrar el área de la región.

11. $y = x^2 - 8x + 3, \ y = 3 + 8x - x^2$
12. $y = x^2 - 4x + 3, \ y = x^3, \ x = 0$
13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \ y = 0, \ x = 0$
14. $y = x^4 - 2x^2, \ y = 2x^2$

En los ejercicios 15 a 18, usar los rectángulos representativos verticales y horizontales para formular las integrales para encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Encontrar el área de la región evaluando la más fácil de las dos integrales.

15. $x = y^2 - 2y, \ x = 0$
16. $y = \sqrt{x - 1}, \ y = \frac{x - 1}{2}$
17. $y = 1 - \frac{x}{2}, \ y = x - 2, \ y = 1$
18. $y = \sqrt{x - 1}, \ y = 2, \ y = 0, \ x = 0$

19. ***Para pensar*** Una persona tiene dos ofertas de trabajo. El sueldo al inicio para cada uno es de \$30 000, y después de 10 años de servicio cada una pagará \$56 000. El sueldo aumenta para cada oferta como se muestra en la figura. Dar un punto de vista estrictamente monetario, acerca de cuál oferta es mejor. Explicar.



20. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el ingreso R_1 de servicio anual en miles de millones de dólares para la industria del teléfono celular durante los años 1995 a 2001. (*Fuente: Asociación de Telecomunicaciones Celulares e Internet*)

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
R_1	19.1	23.6	27.5	33.1	40.0	52.5	65.0

a) Usar las capacidades de regresión en una calculadora para encontrar un modelo exponencial para los datos. Sea t que represente el año, con $t = 5$ que corresponden a 1995. Usar una calculadora para trazar los datos y el modelo en los mismos ejes.

b) Un asesor financiero cree que el modelo para el ingreso de servicio durante los años 2005 a 2010 es

$R_2 = 5 + 6.83e^{0.2t}$.

¿Cuál es la diferencia total en el ingreso de servicio entre los dos modelos durante los años 2005 a 2010?

En los ejercicios 21 a 28, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana acotada por las ecuaciones alrededor de la(s) recta(s) indicada(s).

21. $y = x, \ y = 0, \ x = 4$
    a) eje x *b*) eje y
    c) recta $x = 4$ *d*) recta $x = 6$
22. $y = \sqrt{x}, \ y = 2, \ x = 0$
    a) eje x *b*) recta $y = 2$
    c) eje y *d*) recta $x = -1$
23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ *a*) eje y (esferoide oblongo)
    b) eje x (esferoide prolato)
24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *a*) eje y (esferoide oblongo)
    b) eje x (esferoide prolato)
25. $y = \frac{1}{x^4 + 1}, \ y = 0, \ x = 0, \ x = 1$
    gira alrededor del eje y
26. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \ y = 0, \ x = -1, \ x = 1$
    gira alrededor del eje x
27. $y = 1/(1 + \sqrt{x - 2}), \ y = 0, \ x = 2, \ x = 6$
    gira alrededor del eje y
28. $y = e^{-x}, \ y = 0, \ x = 0, \ x = 1$
    gira alrededor del eje x

En los ejercicios 29 y 30, considerar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x\sqrt{x + 1}$ y $y = 0$.

29. ***Área*** Encontrar el área de la región.
30. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región *a*) alrededor del eje x y *b*) alrededor del eje y.

31. ***Gasolina en un tanque*** Un tanque de gasolina es un esferoide oblato generado al girar la región acotada por la gráfica de $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ alrededor del eje y donde x y y son medidos en pies. ¿A qué altura llega la gasolina en el tanque cuando se llena a un cuarto de su capacidad?

32. ***Tamaño de una base*** La base de un sólido es un círculo de radio a y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. El volumen del sólido es 10 metros cúbicos. Encontrar el radio del círculo.

En los ejercicios 33 y 34, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo dado.

33. $f(x) = \frac{4}{5}x^{5/4}, \quad [0, 4]$ **34.** $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, \quad [1, 3]$

35. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de suspensión de un puente forma una catenaria modelada por la ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2\,000}\right) - 280, \quad -2\,000 \le x \le 2\,000$$

donde x y y son medidos en pies. Usar una computadora para aproximar la longitud del cable.

36. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor la longitud de arco representada por la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\sec^2 x)^2}\, dx.$$

(Hacer la selección con base en un esquema de arco y sin hacer algún cálculo.)

a) -2 *b)* 1 *c)* π *d)* 4 *e)* 3

37. ***Área de una superficie*** Usar la integración para encontrar el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura 4 y radio 3.

38. ***Área de una superficie*** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, y $x = 3$ gira alrededor del eje x. Encontrar el área de la superficie del sólido generada.

39. ***Trabajo*** Se necesita una fuerza de 4 libras para estirar un resorte 1 pulgada de su posición natural. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas a una longitud de 15 pulgadas.

40. ***Trabajo*** La fuerza requerida para estirar un resorte es 50 libras. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 9 pulgadas al doble de esa longitud.

41. ***Trabajo*** Un pozo de agua tiene ocho pulgadas de diámetro y 175 pies de profundidad. El agua llega a 25 pies de la parte superior del pozo. Determinar la cantidad de trabajo realizado al vaciar el pozo, asumiendo que el agua no entra en él mientras está bombeándose.

42. ***Trabajo*** Repetir el ejercicio 41, asumiendo que el agua entra al pozo a una velocidad de 4 galones por minuto y la bomba trabaja a una velocidad de 12 galones por minuto. ¿Cuántos galones se bombean en este caso?

43. ***Trabajo*** Una cadena de 10 pies de largo pesa 5 libras por pie y está colgada de una plataforma situada 20 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar toda la cadena al nivel de 20 pies?

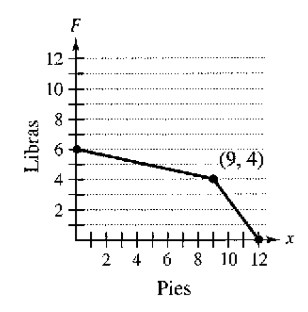
44. ***Trabajo*** Una grúa está a 200 pies sobre el nivel del suelo en la parte superior de un edificio, usa un cable que pesa 4 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado para enrollar el cable si

a) un extremo está al nivel del suelo.

b) hay una carga de 300 libras atada al extremo del cable.

45. ***Trabajo*** El trabajo realizado por una fuerza variable en una prensa es 80 libras-pie. La prensa mueve una distancia de 4 pies y la fuerza es una ecuación cuadrática de la forma $F = ax^2$. Encontrar a.

46. ***Trabajo*** Encontrar el trabajo realizado por la fuerza F mostrada en la figura.



En los ejercicios 47 a 50, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

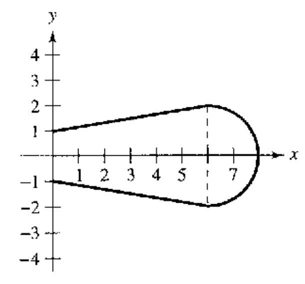
47. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \; x = 0, \; y = 0$

48. $y = x^2, \; y = 2x + 3$

49. $y = a^2 - x^2, \; y = 0$

50. $y = x^{2/3}, \; y = \frac{1}{2}x$

51. ***Centroide*** Un aspa de un ventilador industrial tiene la configuración de un semicírculo adosado a un trapecio (ver la figura). Encontar el centroide de la hoja.



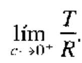
52. ***Fuerza de un fluido*** Una piscina tiene 5 pies de profundidad en un extremo y 10 pies de profundidad en el otro, y el fondo es un plano inclinado. La longitud y anchura de la piscina son 40 y 20 pies. Si la piscina está llena de agua, ¿cuál es la fuerza del fluido en cada una de las paredes verticales?

53. ***Fuerza de un fluido*** Mostrar que la fuerza de un fluido contra cualquier región vertical es el producto del peso por el volumen cúbico del líquido, el área de la región, y la profundidad del centroide de la región.

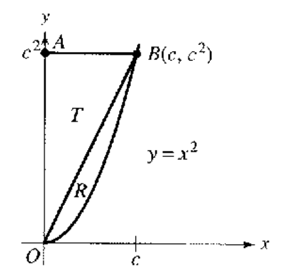
54. ***Fuerza de un fluido*** Usar el resultado del ejercicio 53 para encontrar la fuerza del fluido en un lado de una placa circular de radio 4 pies que se sumerge verticalmente en el agua para que su centro esté 5 pies debajo de la superficie.

SP Solución de problemas

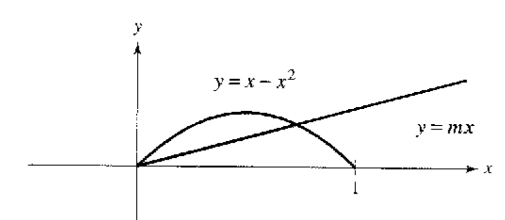
1. Sea R el área de la región en el primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = cx$, $c > 0$. Sea T el área del triángulo AOB. Calcular el límite



$$\lim_{c \to 0^+} \frac{T}{R}.$$



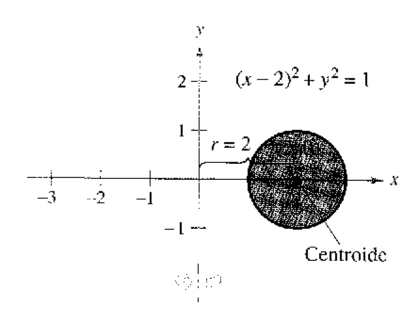
2. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x. Encontrar la ecuación de la recta $y = mx$ que divide esta región en dos regiones de área igual.



3. *a*) Un toro se forma al girar la región acotada por el círculo

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y (véase la figura). Usar el método de los discos para calcular el volumen del toro.



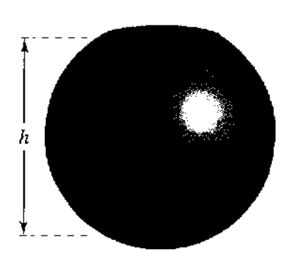
b) Usar el método de los discos para encontrar el volumen del toro si el círculo tiene radio r y su centro está R unidades del eje de rotación.

4. Trazar la curva

$$8y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Usar un sistema de álgebra de calculadora para encontrar el área de la superficie del sólido de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje x.

5. Un orificio perforado en el centro de una esfera de radio r (ver la figura). La altura del anillo esférico restante es h. Encontrar el volumen del anillo y mostrar que es independiente del radio de la esfera.



6. Un rectángulo R de longitud l y anchura w se gira alrededor de la recta L (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido resultante de revolución.

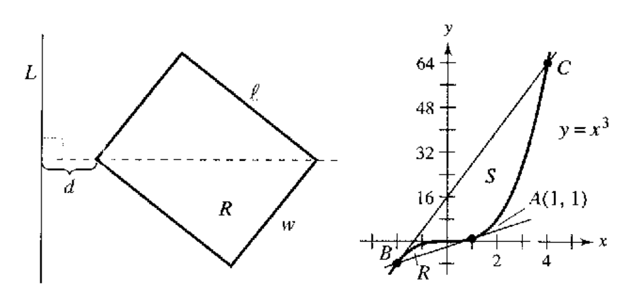


Figura para 6 **Figura para 7**

7. *a*) La recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $A(1, 1)$ corta la curva en otro punto B. Sea R el área de la región acotada por la curva y la recta tangente. La recta tangente a B corta la curva en otro punto C (véase la figura). Sea S el área de la región limitada por la curva y esta segunda recta tangente. ¿Cómo se relacionan las áreas R y S?

b) Repetir la construcción en el apartado *a*) seleccionando un punto arbitrario A en la curva $y = x^3$. Mostrar que las dos áreas, R y S, siempre están relacionadas de la misma manera.

8. La gráfica de $y = f(x)$ pasa a través del origen. La longitud de arco de la curva de $(0, 0)$ a $(x, f(x))$ se da por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^t}\, dt.$$

Identificar la función f.

9. Sea f rectificable en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

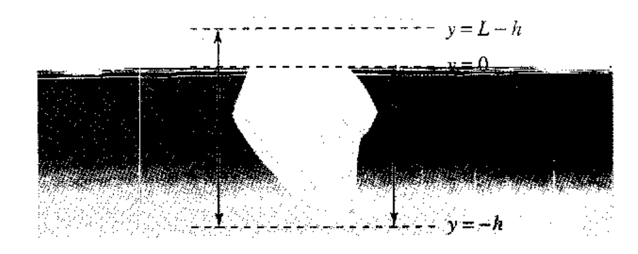
a) Encontrar $\dfrac{ds}{dx}$.

b) Encontrar ds y $(ds)^2$.

c) Si $f(x) = t^{3/2}$, encontrar $s(x)$ en $[1,3]$.

d) Calcular $s(2)$ y describir qué significa.

10. El **principio de Arquímedes** establece que la fuerza ascendente o de flotación de un objeto dentro de un fluido es igual al peso del fluido que el objeto desplaza. Para un objeto parcialmente sumergido, se puede obtener información sobre las densidades relativas del objeto flotante y el fluido observando cuánto del objeto está sobre y debajo de la superficie. También se puede determinar el tamaño de un objeto flotante si se sabe la cantidad que está sobre la superficie y las densidades relativas. Puede verse la parte superior de un iceberg flotante (ver la figura). La densidad del agua de océano es 1.03×10^3 kilogramos por metro cúbico, y la del hielo es 0.92×10^3 kilogramos por metro cúbico. ¿Qué porcentaje del iceberg está debajo de la superficie?



11. Esquematizar la región acotada a la izquierda por $x = 1$, acotada por arriba por $y = 1/x^3$, y acotada por debajo por $y = -1/x^3$.

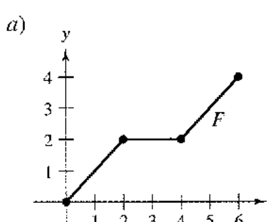
a) Encontrar el centroide de la región para $1 \leq x \leq 6$.
b) Encontrar el centroide de la región para $1 \leq x \leq b$.
c) ¿Dónde esta el centroide cuando $b \to \infty$?

12. Esquematizar la región a la derecha del eje y, acotada por arriba por $y = 1/x^4$ y acotada por debajo por $y = -1/x^4$.

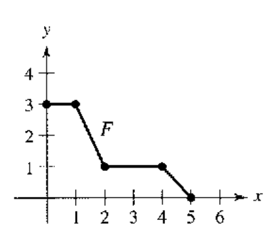
a) Encontrar el centroide de la región para $1 \leq x \leq 6$
b) Encontrar el centroide de la región para $1 \leq x \leq b$.
c) ¿Dónde está el centroide cuando $b \to \infty$?

13. Encontrar el trabajo realizado por cada fuerza F.

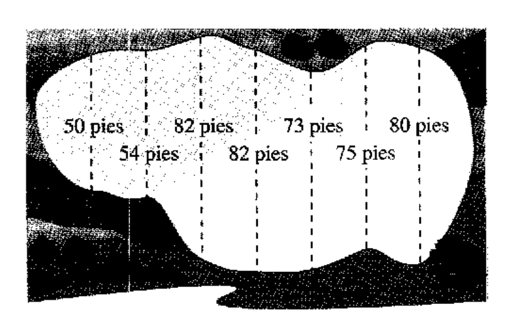
a)



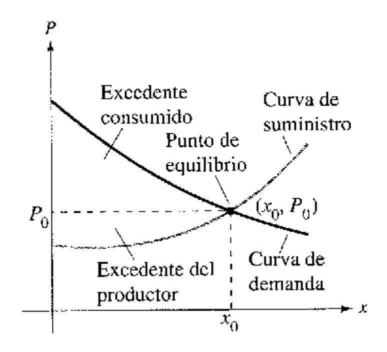
b)



14. Estimar el área de la superficie del estanque usando *a)* la regla de los trapecios y *b)* la regla de Simpson.



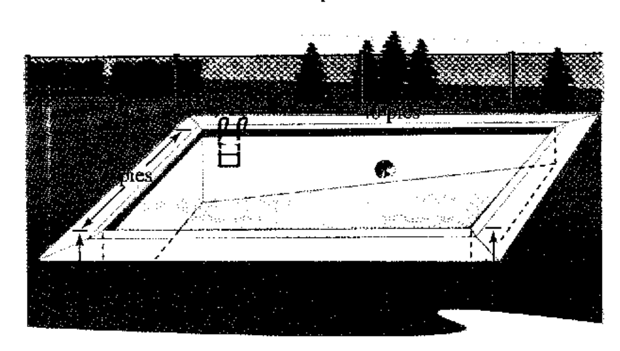
En los ejercicios 15 y 16, encontrar los excedentes de consumos para las curvas de oferta y demanda $[p_1(x)]$ dadas. El excedente del consumidor y excedente del productor son representados por las áreas mostradas en la figura.

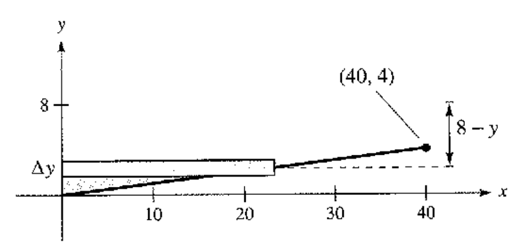


15. $p_1(x) = 50 - 0.5x, \quad p_2(x) = 0.125x$

16. $p_1(x) = 1000 - 0.4x^2, \quad p_2(x) = 42x$

17. Una piscina tiene 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 4 pies de profundidad en un extremo y 8 pies de profundidad en el otro (ver la figura). El fondo es un plano inclinado. Encontrar la fuerza del fluido en cada pared vertical.





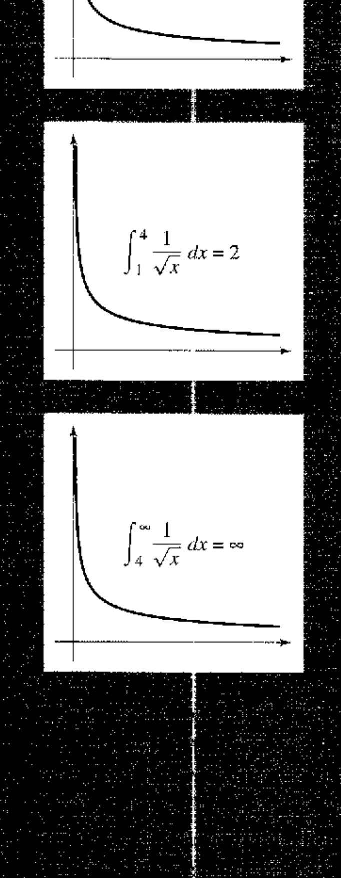
18. *a)* Encontrar por lo menos dos funciones continuas f que satisfagan cada condición.

i) $f(x) \geq 0$ en $[0, 1]$ *ii)* $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$
iii) El área acotada por la gráfica de f y el eje x para $0 \leq x \leq 1$ es igual a 1.

b) Para cada función encontrada en el apartado *a)*, aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo $[0, 1]$. (Usar una calculadora si es necesario.)

c) ¿Se puede encontrar una función f que satisfaga las condiciones dadas en el apartado *a)* donde la gráfica tiene una longitud de arco menor que 3 en el intervalo $[0, 1]$?

Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias



La imagen, obtenida con el telescopio espacial Hubble de la NASA, de una nebulosa planetaria llamada "Nebulosa del ojo del gato" es sólo una muestra de lo que se podría ver si se pudiera viajar a través del espacio. ¿Sería posible propulsar una nave espacial a una distancia ilimitada fuera de la superficie de la Tierra? ¿Por qué?

P. Harrington y K.J.Borkowski (University of Maryland) y NASA

Sección 8.1 Reglas básicas de integración

- **Revisión de procedimientos para adaptar un integrando a una de las reglas básicas de integración.**

Adaptación de integrandos a las reglas básicas

En este capítulo se estudiarán varias técnicas de integración que extienden el conjunto de integrales en que las reglas básicas de integración pueden aplicarse. Estas reglas se repasan más adelante. Un paso importante para resolver cualquier problema de la integración consiste en reconocer qué regla básica de integración usar. Como se muestra en el ejemplo 1, las diferencias ligeras en el integrando pueden llevar a técnicas de solución muy diferentes.

Comparación de tres integrales similares ¿Cuáles de las siguientes integrales pueden evaluarse usando las 20 reglas básicas de integración? Para las que sea posible, hacerlo así. Para las que no, explicar por qué.

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

EJEMPLO 1 Una comparación de tres integrales similares

Encontrar cada integral

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+9}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx$

Solución

a) Usar la regla del arcotangente y sea $u = x$ y $a = 3$.

$$\int \frac{4}{x^2+9}\,dx = 4\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$
$$= 4\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Regla del arcotangente.}$$
$$= \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

b) Aquí la regla del arcotangente no aplica porque el numerador contiene un factor de x. Considerar la regla log y sea $u = x^2 + 9$. Entonces $du = 2x\,dx$, y se tiene

$$\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx = 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$
$$= 2\int \frac{du}{u} \qquad \text{Sustitución: } u = x^2 + 9.$$
$$= 2\ln|u| + C = 2\ln(x^2+9) + C. \qquad \text{Regla log.}$$

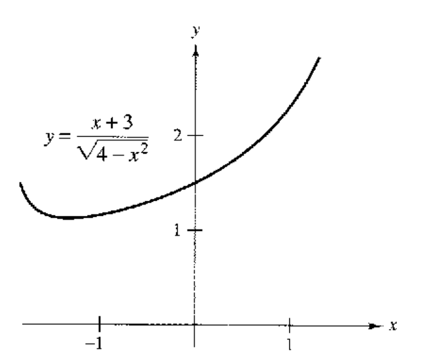
c) Porque el grado del numerador es igual al grado del denominador, se debe usar la división primero para volver a escribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia.

$$\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx = \int \left(4 - \frac{36}{x^2+9}\right)dx \qquad \text{Reescribir usando la división grande.}$$
$$= \int 4\,dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \qquad \text{Escribir como dos integrales.}$$
$$= 4x - 36\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Integrar.}$$
$$= 4x - 12\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA En el ejemplo 1 *c* se señala que se requieren algunas simplificaciones algebraicas preliminares antes de aplicar las reglas para la integración, y que, como consecuencia, más que una regla, se necesita evaluar la integral resultante.

EJEMPLO 2 Uso de dos reglas básicas para resolver una sola integral

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$



El área de la región es aproximadamente 1.839
Figura 8.1

Solución Escribir la integral como la suma de dos integrales. Entonces aplicar la regla de las potencias y la regla del arcoseno como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx \\
&= \left[-(4-x^2)^{1/2} + 3\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= \left(-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right) - (-2+0) \\
&\approx 1.839
\end{aligned}$$

Ver figura 8.1.

TECNOLOGÍA La regla de Simpson puede usarse para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para $n = 10$, la aproximación es 1.839). Al usar la integración numérica, sin embargo, se debe estar consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando algunos de los límites de integración están cercanos a una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \approx 6.213.$$

Aplicando la regla de Simpson (con $n = 10$) para esta integral se produce una aproximación de 6.889.

EJEMPLO 3 Una sustitución del tipo $a^2 - u^2$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx.$

Solución Porque el radical en el denominador puede escribirse en la forma

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{4^2-(x^3)^2}$$

se puede probar la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\,dx$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}} && \text{Reescribir la integral.} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}} && \text{Sustitución: } u = x^3. \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{u}{4} + C && \text{Regla del arcoseno.} \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{x^3}{4} + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Las reglas 18, 19 y 20 de la integración básica en la página siguiente tienen expresiones que implican la suma o diferencia de dos cuadrados:

$a^2 - u^2$

$a^2 + u^2$

$u^2 - a^2$

Con tal expresión, considerar la sustitución $u = f(x)$, como en el ejemplo 3.

Sorprendente, dos de las reglas de la integración normalmente pasadas por alto son la regla log y la regla de las potencias. Notar en los próximos dos ejemplos cómo estas dos reglas de la integración pueden ocultarse.

EJEMPLO 4 Una forma disfrazada de la regla log

Encontrar $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

Solución La integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, la forma del cociente hace pensar en la regla log. Si se expresa $u = 1 + e^x$, entonces $du = e^x\,dx$. Obtener el du requerido sumando y restando e^x en el numerador, como sigue.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx \qquad \text{Sumar y restar } e^x \text{ en el numerador.}$$

$$= \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx \qquad \text{Reescribir como dos fracciones.}$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} \qquad \text{Reescribir como dos integrales.}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C \qquad \text{Integrar.}$$

NOTA Hay más de una manera de resolver un problema de integración. Así, el ejemplo 4 demuestra que multiplicando el numerador y denominador por e^{-x} se obtiene una integral de la forma $-\int du/u$. Ver si se puede conseguir la misma respuesta por este procedimiento. (Tener cuidado: la respuesta aparecerá en una forma diferente.)

EJEMPLO 5 Una forma disfrazada de la regla de las potencias

Encontrar $\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx$.

Solución De nuevo, la integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, considerando las dos opciones primarias para $u[u = \cot x$ y $u = \ln(\operatorname{sen} x)]$, se puede ver que la segunda opción es la apropiada porque

$$u = \ln(\operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad du = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \cot x\,dx.$$

Así,

$$\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx = \int u\,du \qquad \text{Sustitución: } u = \ln(\operatorname{sen} x).$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

NOTA En el ejemplo 5, *verificar* que la derivada de

$$\frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C$$

es el integrando de la integral original.

Repaso de las reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\; n \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
13. $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

Pueden usarse a menudo las identidades trigonométricas para adaptar integrandos a una de las reglas básicas de la integración.

EJEMPLO 6 Uso de identidades trigonométricas

Encontrar $\int \tan^2 2x\, dx$.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema de cálculo algebraico, usarlo para evaluar las integrales en esta sección. Comparar la *forma* de la antiderivada dada por el software con la forma obtenida a mano. A veces las formas serán las mismas, pero a menudo diferirán. Por ejemplo, ¿por qué la antiderivada $\ln 2x + C$ es equivalente a la antiderivada $\ln x + C$?

Solución Notar que la $\tan^2 u$ no está en la lista de reglas básicas de integración. Sin embargo, $\sec^2 u$ está en la lista. Esto hace pensar en la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$. Si se hace $u = 2x$, entonces $du = 2\, dx$ y

$$\int \tan^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \tan^2 u\, du \qquad \text{Sustitución: } u = 2x.$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\, du \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du - \frac{1}{2}\int du \qquad \text{Reescribir como dos integrales.}$$

$$= \frac{1}{2}\tan u - \frac{u}{2} + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

Esta sección concluye con un resumen de los procedimientos comunes para adaptar los integrandos a las reglas básicas de integración.

Procedimientos para adaptar los integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador).	$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador.	$\dfrac{1+x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia.	$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
Sumar y restar términos en el numerador.	$\dfrac{2x}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.	$\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

NOTA Recordar que se pueden separar los numeradores pero no los denominadores. Se debe tener cuidado con este error común cuando se adapten los integrandos a las reglas básicas.

$$\frac{1}{x^2+1} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1} \qquad \text{No separar el denominador.}$$

Ejercicios de la sección 8.1

En los ejercicios 1 a 4, seleccionar la antiderivada correcta.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   a) $2\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\sqrt{x^2+1} + C$

   c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}$

   a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

   c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$

   a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

   c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x\cos(x^2+1)$

   a) $2x\,\text{sen}(x^2+1) + C$ *b)* $-\frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$

   c) $\frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$ *d)* $-2x\,\text{sen}(x^2+1) + C$

En los ejercicios 5 a 14, seleccionar la fórmula de integración básica que puede usarse para encontrar la integral, e identificar *u* y *a* cuando sea apropiado.

5. $\displaystyle\int (3x-2)^4\,dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{2t-1}{t^2-t+2}\,dt$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)}\,dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{2}{(2t-1)^2+4}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ 10. $\displaystyle\int \frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

11. $\displaystyle\int t\,\text{sen}\,t^2\,dt$ 12. $\displaystyle\int \sec 3x\tan 3x\,dx$

13. $\displaystyle\int (\cos x)e^{\text{sen}\,x}\,dx$ 14. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

En los ejercicios 15 a 50, encontrar la integral indefinida.

15. $\displaystyle\int 6(x-4)^5\,dx$ 16. $\displaystyle\int \frac{2}{(t-9)^2}\,dt$

17. $\displaystyle\int \frac{5}{(z-4)^5}\,dz$ 18. $\displaystyle\int t^2\sqrt[3]{t^3-1}\,dt$

19. $\displaystyle\int \left[v + \frac{1}{(3v-1)^3}\right]dv$ 20. $\displaystyle\int \left[x - \frac{3}{(2x+3)^2}\right]dx$

21. $\displaystyle\int \frac{t^2-3}{-t^3+9t+1}\,dt$ 22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$ 24. $\displaystyle\int \frac{2x}{x-4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ 26. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1}\right)dx$

27. $\displaystyle\int (1+2x^2)^2\,dx$ 28. $\displaystyle\int x\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

29. $\displaystyle\int x\cos 2\pi x^2\,dx$ 30. $\displaystyle\int \sec 4x\,dx$

31. $\displaystyle\int \csc \pi x\cot \pi x\,dx$ 32. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$ 34. $\displaystyle\int \csc^2 x\,e^{\cot x}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{2}{e^{-x}+1}\,dx$ 36. $\displaystyle\int \frac{5}{3e^x-2}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$ 38. $\displaystyle\int (\tan x)[\ln(\cos x)]\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx$ 40. $\displaystyle\int \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,d\alpha$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta - 1}\,d\theta$ 42. $\displaystyle\int \frac{2}{3(\sec x - 1)}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}\,dt$ 44. $\displaystyle\int \frac{1}{4+3x^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{\tan(2/t)}{t^2}\,dt$ 46. $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

47. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

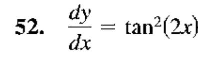
48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4x^2-8x+3}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{4}{4x^2+4x+65}\,dx$

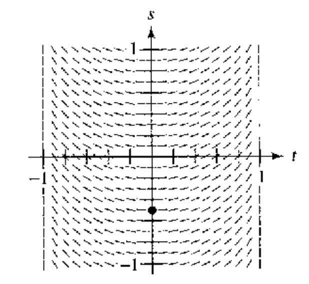
50. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$

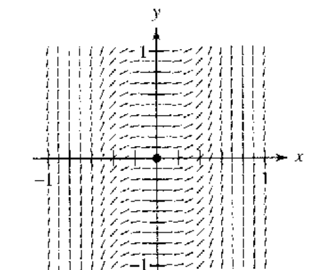
Campos de pendientes **En los ejercicios 51 a 54, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a)* Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b)* Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una calculadora para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos en el apartado *a*).**

51. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^4}}$ 52. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(2x)$



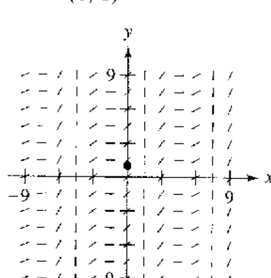
$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ $(0, 0)$





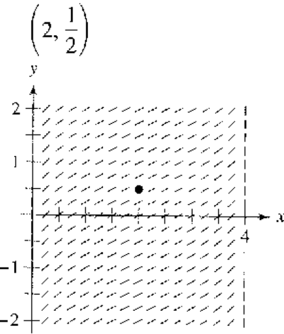
53. $\dfrac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^2$

$(0, 1)$



54. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

$\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 55 y 56, usar un sistema algebraico para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

55. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2y,\ y(0) = 3$

56. $\dfrac{dy}{dx} = 5 - y,\ y(0) = 1$

En los ejercicios 57 a 60, resolver la ecuación diferencial.

57. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + e^x)^2$

58. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{(1 + e^t)^2}{e^t}$

59. $(4 + \tan^2 x)y' = \sec^2 x$

60. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

En los ejercicios 61 a 68, evaluar la integral definida. Para verificar los resultados puede usarse integración en la calculadora.

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$

63. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

64. $\displaystyle\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x}\, dx$

65. $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$

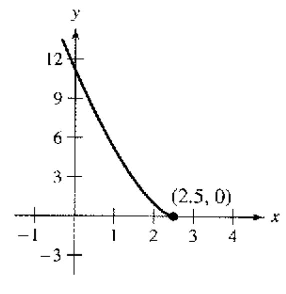
66. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x - 2}{x}\, dx$

67. $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx$

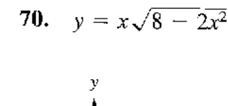
68. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx$

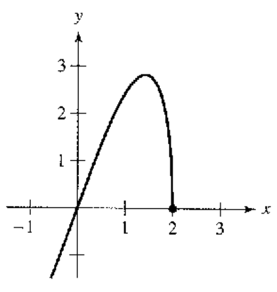
Área **En los ejercicios 69 a 74, encontrar el área de la región.**

69. $y = (-2x + 5)^{3/2}$

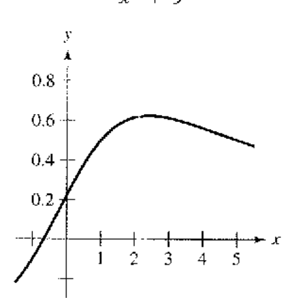


70. $y = x\sqrt{8 - 2x^2}$

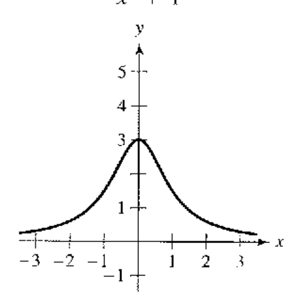




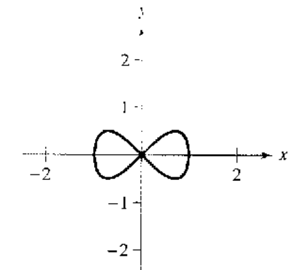
71. $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 9}$



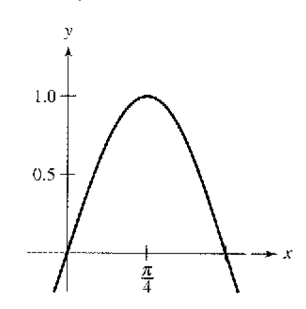
72. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$



73. $y^2 = x^2(1 - x^2)$



74. $y = \operatorname{sen} 2x$



En los ejercicios 75 a 78, usar un sistema algebraico para encontrar la integral. Usar el sistema algebraico para hacer la gráfica de dos antiderivadas. Describir la relación entre las dos gráficas.

75. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

76. $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

77. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

78. $\displaystyle\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 79 a 82, enunciar la fórmula de integración que se usaría para cada integral. Explicar por qué se eligió esa fórmula. No integrar.

79. $\displaystyle\int x(x^2 + 1)^3\, dx$

80. $\displaystyle\int x \sec(x^2 + 1)\tan(x^2 + 1)\, dx$

81. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

82. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$

83. Explicar por qué la antiderivada $y_1 = e^{x + C_1}$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = Ce^x$.

84. Explicar por qué la antiderivada $y_2 = \sec^2 x + C_1$, es equivalente a la antiderivada $y_2 = \tan^2 x + C$.

85. Determinar las constantes a y b tal que

$\operatorname{sen} x + \cos x = a \operatorname{sen}(x + b)$

Usar este resultado para integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

86. ***Área*** Las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = ax^2$ se intersecan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/a, 1/a)$. Encontrar a $(a > 0)$ tal que el área de la región acotada por las gráficas de estas dos funciones sea $\frac{2}{3}$.

87. ***Para pensar*** Usar una calculadora para representar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 10x)$. Usar la gráfica para determinar si el valor de

$\displaystyle\int_0^5 f(x)\, dx$ es positivo o negativo. Explicar.

88. ***Para pensar*** Al evaluar

$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx$$

¿es apropiado sustituir $u = x^2, x = \sqrt{u}$, y $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$

para obtener

$$\frac{1}{2}\int_1^1 \sqrt{u}\, du = 0?$$

Explicar.

Aproximación **En los ejercicios 89 y 90, determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función en el intervalo dado. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región y *no* integrando.)**

89. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b)* 1 *c)* -8 *d)* 8 *e)* 10

90. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b)* 1 *c)* -4 *d)* 4 *e)* 10

Interpretación de integrales **En los ejercicios 91 y 92, *a)* dibujar la región cuya área está dada por la integral, *b)* dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de los discos y *c)* dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de las capas. (Hay más de una respuesta correcta para cada apartado.)**

91. $\displaystyle\int_0^2 2\pi x^2\, dx$ **92.** $\displaystyle\int_0^4 \pi y\, dy$

93. ***Volumen*** La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$ $(b > 0)$ se revuelve alrededor del el eje y.

a) Encontrar el volumen del sólido generado si $b = 1$.

b) Encontrar b tal que el volumen del sólido generado es $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.

94. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \pi/4$ a $x = \pi/2$.

95. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$ alrededor del eje x.

96. ***Centroide*** Encontrar la coordenada x del centroide de la región acotada por las gráficas de

$$y = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4.$$

En los ejercicios 97 y 98, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado.

97. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $-3 \le x \le 3$

98. $f(x) = \operatorname{sen} nx$, $0 \le x \le \pi/n$, n es un entero positivo.

Longitud de arco **En los ejercicios 99 y 100, usar la capacidad de integración de una calculadora para aproximar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

99. $y = \tan \pi x$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ **100.** $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$

101. ***Encontrando un patrón***

a) Encontrar $\int \cos^3 x\, dx$.

b) Encontrar $\int \cos^5 x\, dx$.

c) Encontrar $\int \cos^7 x\, dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \cos^{15} x\, dx$ sin realmente integrar.

102. ***Encontrando un patrón***

a) Escribir $\int \tan^3 x\, dx$ en términos de $\int \tan x\, dx$. Entonces encontrar $\int \tan^3 x\, dx$.

b) Escribir $\int \tan^5 x\, dx$ en términos de $\int \tan^3 x\, dx$.

c) Escribir $\int \tan^{2k+1} x\, dx$ donde k es un entero positivo, en términos de $\int \tan^{2k-1} x\, dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \tan^{15} x\, dx$ sin realmente integrar.

103. ***Métodos de integración*** Mostrar que los resultados siguientes son equivalentes.

Integración por las tablas:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|\right) + C$$

Integración por el sistema algegraico de una computadora:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arcsenh}(x)\right) + C$$

Preparación del examen Putnam

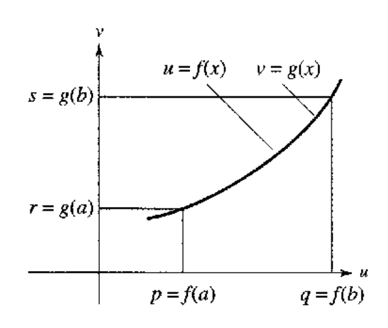
104. Evaluar $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9 - x)}\, dx}{\sqrt{\ln(9 - x)} + \sqrt{\ln(x + 3)}}$.

Sección 8.2 Integración por partes

- **Encontrar una antiderivada o primitiva usando la integración por partes.**
- **Usar un método tabular para realizar la integración por partes.**

EXPLORACIÓN

Demostración sin palabras **He aquí una vía diferente para demostrar la fórmula de integración por partes, tomada con permiso del autor de "Proof Without Words: Integration by Parts", por Roger B. Nelson, *Mathematics Magazine*, abril 1991.**



Área + Área $= qs - pr$

$$\int_r^s u\,dv + \int_q^p v\,du = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_r^s u\,dv = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)} - \int_q^p v\,du$$

Explicar cómo esta gráfica demuestra el teorema. ¿Qué notación usada en esta demostración no es familiar? ¿Cuál se cree que es su significado?

Integración por partes

En esta sección se estudiará una técnica importante de integración llamada **integración por partes**. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan *productos* de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como

$$\int x \ln x\,dx, \quad \int x^2 e^x\,dx \quad \text{y} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

La integración por partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[uv] &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= uv' + vu'\end{aligned}$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener

$$\begin{aligned}uv &= \int uv'\,dx + \int vu'\,dx\\ &= \int u\,dv + \int v\,du.\end{aligned}$$

Volviendo a escribir esta ecuación, se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 8.1 Integración por partes

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil de evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de u y dv es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\int xe^x\, dx.$

Solución Para aplicar la integración por partes, es necesario escribir la integral en la forma $\int u\, dv$. Hay varias maneras de hacer esto.

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\underbrace{(e^x dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\, dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(1)}_{u}\underbrace{(xe^x\, dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las estrategias de la página anterior hacen pensar en la elección de la primera opción porque la derivada de $u = x$ es más simple que x, y $dv = e^x\, dx$ es la porción más complicada del integrando que se adapta a una fórmula básica de la integración.

$$dv = e^x\, dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\, dx = e^x$$

$$u = x \quad \Longrightarrow \quad du = dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= xe^x - e^x + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Para verificar esto, derivar $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

NOTA El ejemplo 1, muestra que no es necesario incluir una constante de integración al resolver

$$v = \int e^x\, dx = e^x + C_1.$$

Para ilustrar esto, reemplazar $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y aplicar la integración por partes para ver que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 2 Integración por partes

Encontrar $\int x^2 \ln x\, dx.$

Solución En este caso, x^2 se integra más fácil que $\ln x$. Además, la derivada de $\ln x$ es más simple que $\ln x$. Así, se debe hacer $dv = x^2 dx$.

$$dv = x^2\, dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Verificar este resultado derivando.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver cómo la integración por partes se usa para demostrar la aproximación de Stirling

$$\ln(n!) = n \ln n - n$$

ver el artículo "The Validity of Stirling's Approximation: A Physical Chemistry Project", por A. S. Wallner y K. A. Brandt en *Journal of Chemical Education*.

TECNOLOGÍA Intentar el trazo de la gráfica de

$$\int x^2 \ln x\, dx \quad \text{y} \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

en la calculadora. ¿Se obtiene la misma gráfica? (Este ejercicio requiere algo de tiempo, así que se debe tener paciencia.)

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrandos que constan de un solo factor, tales como $\int \ln x\, dx$ o $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$. En estos casos, hay que tomar $dv = dx$, como se muestra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 Un integrando con un solo factor

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx$.

Solución Sea $dv = dx$.

$$dv = dx \implies v = \int dx = x$$

$$u = \operatorname{arcsen} x \implies du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

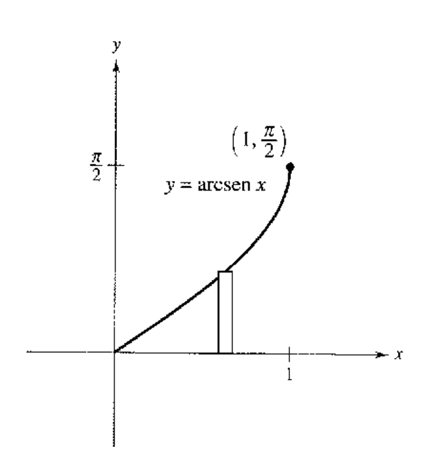
La integración por partes produce ahora

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x)\, dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C. \qquad \text{Integrar.}$$



El área de la región es aproximadamente 0.571
Figura 8.2

Usando esta antiderivada, evaluar la integral definida como sigue

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx = \Big[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\approx 0.571$$

El área representada por esta integral definida se muestra en la figura 8.2.

TECNOLOGÍA Recordar que hay dos maneras de usar la tecnología para evaluar una integral definida: (1) usar una aproximación numérica como la regla de los trapecios o la regla de Simpson, o (2) usar integración simbólica para encontrar la antiderivada y entonces aplicar el teorema fundamental de cálculo. Ambos métodos tienen limitaciones. Para encontrar el posible error al usar un método numérico, los integrandos deben tener una segunda derivada (la regla de los trapecios) o una cuarta derivada (la regla de Simpson) en el intervalo de integración: el integrando en el ejemplo 3 no tiene estos requisitos. Para aplicar el teorema fundamental de cálculo, la herramienta de integración simbólica debe poder encontrar la antiderivada.

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x\, dx?$$

¿Qué método se usaría para evaluar?

$$\int_0^1 \arctan x^2\, dx?$$

Algunas integrales requieren integrar por partes más de una vez.

EJEMPLO 4 Integraciones sucesivas por partes

Encontrar $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución Los factores x^2 y sen x son igualmente fáciles para integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de sen x no lo es. Así que, se debe elegir la opción $u = x^2$.

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \implies v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$u = x^2 \implies du = 2x \, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx.$$ Primer uso de la integración por partes.

Este primer uso de la integración por partes ha tenido éxito simplificando la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esa integral, aplicar de nuevo la integración por partes. Esta vez, sea $u = 2x$.

$$dv = \cos x \, dx \implies v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$

$$u = 2x \implies du = 2 \, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int 2x \cos x \, dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx$$ Segundo uso de la integración por partes.

$$= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Combinando estos dos resultados, se puede escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas. Así, en el ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Si en la segunda aplicación se hubiera cambiado la sustitución a $u = \cos x$ y $dv = 2x$, se habría obtenido

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

deshaciendo como consecuencia la integración anterior y volviendo a la integral *original*. Al hacer aplicaciones repetidas de integración por partes, también debe percatarse de la aparición de un *múltiplo constante* de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x \, dx$, y también ocurre en el próximo ejemplo.

Intentar encontrar

$$\int e^x \cos 2x \, dx$$

haciendo $u = \cos 2x$ y $dv = e^x \, dx$ en la primera sustitución. Para la segunda sustitución, sea $u = \operatorname{sen} 2x$ y $dv = e^x \, dx$.

EJEMPLO 5 Integración por partes

NOTA La integral en el ejemplo 5 es importante. En la sección 8.4 (ejemplo 5) se usa para encontrar la longitud de arco de un segmento parabólico.

Encontrar $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución La porción más complicada del integrando que puede integrarse fácilmente es $\sec^2 x$, para hacer $dv = \sec^2 x\, dx$ y $u = \sec x$.

$$dv = \sec^2 x\, dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$u = \sec x \quad \Longrightarrow \quad du = \sec x \tan x\, dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx \qquad \text{Reunir por integrales.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \qquad \text{Integrar y dividir por 2.}$$

AYUDA DE ESTUDIO Las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

juegan un papel importante en este capítulo.

EJEMPLO 6 Localización de un centroide

Una parte de la máquina es modelada por la región acotada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, $0 \le x \le \pi/2$, como se muestra en la figura 8.3. Encontrar el centroide de esta región.

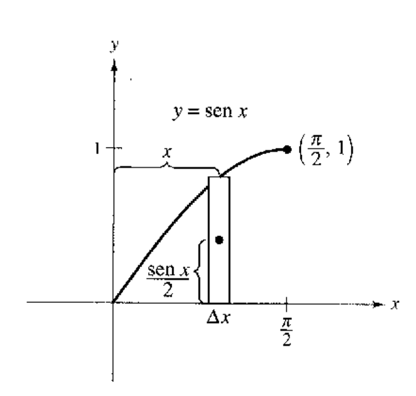


Figura 8.3

Solución Empezar encontrando el área de la región.

$$A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Ahora, encontrar las coordenadas del centroide como sigue

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{2}(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Evaluar la integral para $\bar{x}$, $(1/A)\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx$, con la integración por partes. Para hacer esto, sea $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ y $u = x$. Esto produce $v = -\cos x$ y $du = dx$, y escribir

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Por último, determinar $\bar{x}$ para ser

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Así que, el centroide de la región es $(1, \pi/8)$.

Al obtener experiencia usando la integración por partes, la habilidad para determinar u y dv aumentará. El resumen siguiente recoge varias integrales comunes con las sugerencias para la elección de u y dv.

AYUDA DE ESTUDIO Puede usarse el acrónimo LIATE como una pauta para escoger u en la integración por partes. En orden, verificar el integrando para lo siguiente.

¿Hay una parte Logarítmica?

¿Hay una parte trigonométrica Inversa?

¿Hay una parte Algebraica?

¿Hay una parte Trigonométrica?

¿Hay una parte Exponencial?

Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{sen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \cos ax\,dx$$

sea $u = x^n$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$, o $\cos ax\,dx$.

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \arctan ax\,dx$$

sea $u = \ln x$, arcsen ax, o arctan ax y sea $dv = x^n\,dx$.

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \qquad \text{o} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

sea $u = \operatorname{sen} bx$ o $\cos bx$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$.

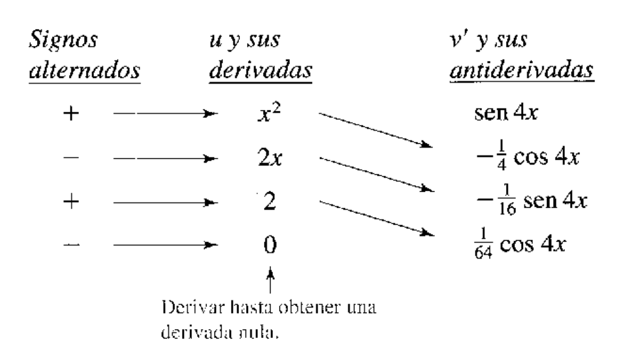
Método tabular

En problemas que contienen aplicaciones repetidas de la integración por partes, un método tabular, ilustrado en el ejemplo 7, puede ayudar para organizar el trabajo. Este método funciona bien para las integrales del tipo $\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx$, $\int x^n$, $\cos ax\,dx$, y $\int x^n e^{ax}\,dx$.

EJEMPLO 7 Uso del método tabular

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx$.

Solución Empezar como de costumbre haciendo $u = x^2$ y $dv = v'\,dx = \operatorname{sen} 4x\,dx$. Luego, crear una tabla de tres columnas, como se muestra.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el método tabular, ver el artículo "Tabular Integration by Parts", de David Horowitz en *The College Mathematics Journal*, y el artículo "More on Tabular Integration by Parts", de Leonard Gillman, en *The College Mathematics Journal*.

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C.$$

Ejercicios de la sección 8.2

En los ejercicios 1 a 4, asignar la antiderivada con la integral correcta. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\int \ln x\, dx$ *b*) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

c) $\int x^2 e^x\, dx$ *d*) $\int x^2 \cos x\, dx$

1. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x$
2. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$
3. $y = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$
4. $y = -x + x \ln x$

En los ejercicios 5 a 10, identificar *u* y *dv* para encontrar la integral usando la integración por partes. (No evaluar la integral.)

5. $\int xe^{2x}\, dx$
6. $\int x^2 e^{2x}\, dx$
7. $\int (\ln x)^2\, dx$
8. $\int \ln 3x\, dx$
9. $\int x \sec^2 x\, dx$
10. $\int x^2 \cos x\, dx$

En los ejercicios 11 a 36, encontrar la integral. (*Nota*: Resolver por el método más simple, no todas requieren la integración por partes.)

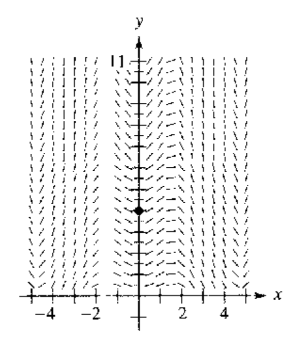
11. $\int xe^{-2x}\, dx$
12. $\int \frac{2x}{e^x}\, dx$
13. $\int x^3 e^x\, dx$
14. $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\, dt$
15. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$
16. $\int x^4 \ln x\, dx$
17. $\int t \ln(t + 1)\, dt$
18. $\int \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx$
19. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$
20. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$
21. $\int \frac{xe^{2x}}{(2x + 1)^2}\, dx$
22. $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2}\, dx$
23. $\int (x^2 - 1)e^x\, dx$
24. $\int \frac{\ln 2x}{x^2}\, dx$
25. $\int x\sqrt{x - 1}\, dx$
26. $\int \frac{x}{\sqrt{2 + 3x}}\, dx$
27. $\int x \cos x\, dx$
28. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$
29. $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$
30. $\int x^2 \cos x\, dx$
31. $\int t \csc t \cot t\, dt$
32. $\int \theta \sec \theta \tan \theta\, d\theta$
33. $\int \arctan x\, dx$
34. $\int 4 \arccos x\, dx$
35. $\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx$
36. $\int e^x \cos 2x\, dx$

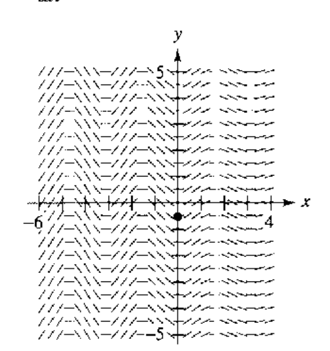
En los ejercicios 37 a 42, resolver la ecuación diferencial.

37. $y' = xe^{x^2}$
38. $y' = \ln x$
39. $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{\sqrt{2 + 3t}}$
40. $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{x - 1}$
41. $(\cos y)y' = 2x$
42. $y' = \arctan \frac{x}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 y 44, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de direcciones o pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una calculadora para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

43. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \cos x,\ (0, 4)$
44. $\frac{dy}{dx} = e^{-x/3} \operatorname{sen} 2x,\ \left(0, -\frac{18}{37}\right)$





Campos de pendientes **En los ejercicios 45 y 46, usar una calculadora para representar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de una calculadora.**

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} e^{x/8}$, $y(0) = 2$
46. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \operatorname{sen} x$, $y(0) = 4$

En los ejercicios 47 a 58, evaluar la integral definida. Usar una calculadora para confirmar el resultado.

47. $\int_0^4 xe^{-x/2}\, dx$
48. $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$
49. $\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$
50. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} 2x\, dx$
51. $\int_0^{1/2} \arccos x\, dx$
52. $\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x^2\, dx$
53. $\int_0^1 e^x \operatorname{sen} x\, dx$
54. $\int_0^2 e^{-x} \cos x\, dx$
55. $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$
56. $\int_0^1 \ln(1 + x^2)\, dx$
57. $\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x\, dx$
58. $\int_0^{\pi/4} x \sec^2 x\, dx$

NOTA En el ejemplo 5, la potencia de la tangente es impar y positiva. Así que también se podría encontrar la integral usando el procedimiento descrito en la guía 2. Demostrar en el ejercicio 85 que los resultados obtenidos por estos dos procedimientos sólo difieren por una constante.

EJEMPLO 5 La potencia de la secante es par y positiva

Encontrar $\int \sec^4 3x \tan^3 3x \, dx$.

Solución Sea $u = \tan 3x$, entonces $du = 3 \sec^2 3x \, dx$ y se pueden escribir

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 3x \tan^3 3x \, dx &= \int \sec^2 3x \tan^3 3x(\sec^2 3x) \, dx \\
&= \int (1 + \tan^2 3x) \tan^3 3x(\sec^2 3x) \, dx \\
&= \frac{1}{3}\int (\tan^3 3x + \tan^5 3x)(3 \sec^2 3x) \, dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\tan^4 3x}{4} + \frac{\tan^6 3x}{6}\right) + C \\
&= \frac{\tan^4 3x}{12} + \frac{\tan^6 3x}{18} + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 La potencia de la tangente es par

Evaluar $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx$.

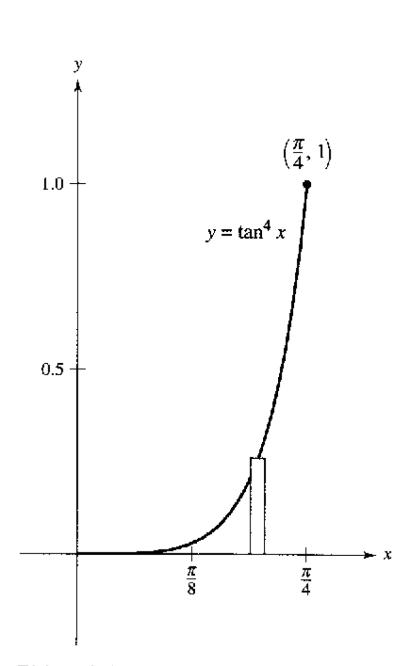
Solución Debido a que no hay factor secante, se puede empezar convirtiendo un factor tangente cuadrado en un factor secante cuadrado.

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x(\tan^2 x) \, dx \\
&= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C
\end{aligned}$$

Evaluar el integral definido como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx &= \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \\
&\approx 0.119
\end{aligned}$$

El área representada por la integral definida se muestra en la figura 8.5. Probar usando la regla de Simpson para aproximar el valor de esta integral. Con $n = 18$, se debe obtener una aproximación con un error menor que 0.00001.



El área de la región es aproximadamente 0.119
Figura 8.5

Para integrales que contienen potencias de cotangentes y cosecantes, seguir una estrategia similar a aquella usada para las potencias de tangentes y secantes. También, al integrar las funciones trigonométricas, recordar que a veces ayuda convertir el integrando entero en las potencias de senos y cosenos

EJEMPLO 7 Conversión de senos y cosenos

Encontrar $\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx$.

Solución Debido a que las primeras cuatro estrategias no aplican, intentar convertir el integrando en senos y cosenos. En este caso, se pueden integrar las potencias resultantes de seno y coseno como sigue.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx\\ &= \int (\operatorname{sen} x)^{-2}(\cos x)\, dx\\ &= -(\operatorname{sen} x)^{-1} + C\\ &= -\csc x + C\end{aligned}$$

Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos diferentes

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre integrales que contienen los productos del seno-coseno con ángulos diferentes, ver el artículo "Integrals of Products of Sine and Cosine with Different Arguments", de Sherrie J. Nicol, en *The College Mathematics Journal.*

Las integrales que contienen los productos de senos-cosenos de dos ángulos diferentes ocurren en muchas aplicaciones. En tales casos usar las identidades de sumas y productos.

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m-n)x] + \operatorname{sen}[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

EJEMPLO 8 Uso de identidades de producto y suma

Encontrar $\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\, dx$.

Solución Considerando la segunda identidad del producto suma, escribir

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C\\ &= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C.\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 8.3

En los ejercicios 1 a 4, usar la derivación para adaptar la antiderivada con la integral correcta. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\int \operatorname{sen} x \tan^2 x\, dx$ *b*) $8\int \cos^4 x\, dx$

c) $\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\, dx$ *d*) $\int \tan^4 x\, dx$

1. $y = \sec x$
2. $y = \cos x + \sec x$
3. $y = x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$
4. $y = 3x + 2\operatorname{sen} x \cos^3 x + 3\operatorname{sen} x \cos x$

En los ejercicios 5 a 18, encontrar la integral.

5. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$
6. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^5 2x \cos 2x\, dx$
8. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$
10. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
11. $\int \cos^3 \theta \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$
12. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 t}{\sqrt{\cos t}}\, dt$
13. $\int \cos^2 3x\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx$
15. $\int \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha\, d\alpha$
16. $\int \operatorname{sen}^4 2\theta\, d\theta$
17. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$
18. $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$

En los ejercicios 19 a 24, usar las fórmulas de Wallis para evaluar la integral.

19. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$
20. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$
21. $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\, dx$
22. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx$
24. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 x\, dx$

En los ejercicios 25 a 42, encontrar la integral conteniendo secante y tangente.

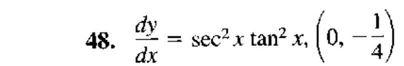
25. $\int \sec 3x\, dx$
26. $\int \sec^2(2x - 1)\, dx$
27. $\int \sec^4 5x\, dx$
28. $\int \sec^6 3x\, dx$
29. $\int \sec^3 \pi x\, dx$
30. $\int \tan^2 x\, dx$
31. $\int \tan^5 \frac{x}{4}\, dx$
32. $\int \tan^3 \frac{\pi x}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2}\, dx$
33. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$
34. $\int \tan^3 2t \sec^3 2t\, dt$
35. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$
36. $\int \tan^5 2x \sec^2 2x\, dx$
37. $\int \sec^6 4x \tan 4x\, dx$
38. $\int \sec^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}\, dx$
39. $\int \sec^3 x \tan x\, dx$
40. $\int \tan^3 3x\, dx$
41. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec x}\, dx$
42. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec^5 x}\, dx$

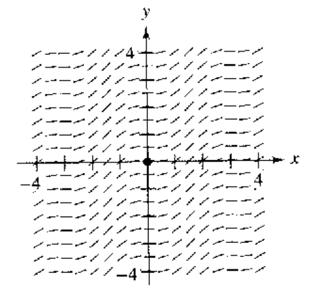
En los ejercicios 43 a 46, resolver la ecuación diferencial.

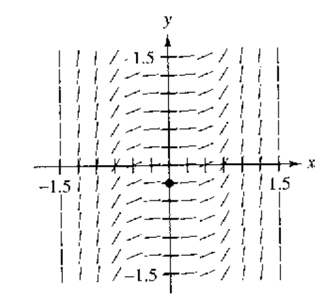
43. $\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}^4 \pi\theta$
44. $\frac{ds}{d\alpha} = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
45. $y' = \tan^3 3x \sec 3x$
46. $y' = \sqrt{\tan x} \sec^4 x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 47 y 48 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una calculadora para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

47. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x,\ (0, 0)$


48. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^2 x,\ \left(0, -\frac{1}{4}\right)$





Campos de pendientes **En los ejercicios 49 y 50, usar una calculadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

49. $\frac{dy}{dx} = \frac{3\operatorname{sen} x}{y},\ y(0) = 2$
50. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{y}\tan^2 x,\ y(0) = 3$

En los ejercicios 51 a 54, encontrar la integral.

51. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$
52. $\int \cos 4\theta \cos(-3\theta)\, d\theta$
53. $\int \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$
54. $\int \operatorname{sen}(-4x) \cos 3x\, dx$

En los ejercicios 55 a 64, encontrar la integral. Usar un sistema informático de álgebra para confirmar el resultado.

55. $\int \cot^3 2x\, dx$

56. $\int \tan^4 \frac{x}{2} \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$

57. $\int \csc^4 \theta\, d\theta$

58. $\int \csc^2 3x \cot 3x\, dx$

59. $\int \frac{\cot^2 t}{\csc t}\, dt$

60. $\int \frac{\cot^3 t}{\csc t}\, dt$

61. $\int \frac{1}{\sec x \tan x}\, dx$

62. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 x - \cos^2 x}{\cos x}\, dx$

63. $\int (\tan^4 t - \sec^4 t)\, dt$

64. $\int \frac{1 - \sec t}{\cos t - 1}\, dt$

En los ejercicios 65 a 72, evaluar la integral definida.

65. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

66. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\, dx$

67. $\int_0^{\pi/4} \tan^3 x\, dx$

68. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \sqrt{\tan t}\, dt$

69. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t}\, dt$

70. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3\theta \cos \theta\, d\theta$

71. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$

72. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + 1)\, dx$

En los ejercicios 73 a 78, usar una calculadora para encontrar la integral. Hacer la gráfica de la antiderivada para dos valores diferentes de la constante de integración.

73. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$

74. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

75. $\int \sec^5 \pi x\, dx$

76. $\int \tan^3(1 - x)\, dx$

77. $\int \sec^5 \pi x \tan \pi x\, dx$

78. $\int \sec^4(1 - x) \tan(1 - x)\, dx$

En los ejercicios 79 a 82, usar una calculadora para evaluar la integral definida.

79. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

80. $\int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2\, d\theta$

81. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$

82. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx$

Desarrollo de conceptos

83. Describir cómo integrar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ para cada condición.

a) m es positivo e impar.

b) n es positivo e impar.

c) m y n son positivos y pares.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

84. Describir cómo integrar $\int \sec^m x \tan^n x\, dx$ para cada condición.

a) m es positivo y par.

b) n es positivo e impar.

c) n es positivo y par y no hay factor secante.

d) m es positivo e impar y no hay factor tangente.

En los ejercicios 85 y 86, *a*) encontrar la integral indefinida de dos maneras diferentes, *b*) usar una calculadora para representar la gráfica de la antiderivada (sin la constante de integración) obtenida por cada método para demostrar que los resultados sólo difieren por una constante, y *c*) verificar analíticamente que los resultados sólo difieren por una constante.

85. $\int \sec^4 3x \tan^3 3x\, dx$

86. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$

Área **En los ejercicios 87 a 90, encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

87. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen}^3 x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

88. $y = \operatorname{sen}^2 \pi x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

89. $y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

90. $y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen} x \cos x, \quad x = -\pi/2, \quad x = \pi/4$

Volumen **En los ejercicios 91 y 92, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *x*.**

91. $y = \tan x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4 \quad x = \pi/4$

92. $y = \cos \frac{x}{2}, \quad y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

Volumen y centroide **En los ejercicios 93 y 94, para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, encontrar *a*) el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *x*, y *b*) el centroide de la región.**

93. $y = \operatorname{sen} x, y = 0, x = 0, x = \pi$

94. $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi/2$

En los ejercicios 95 a 98, usar la integración por partes para verificar la fórmula de la reducción.

95. $\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$

96. $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$

97. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$

98. $\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx$

En los ejercicios 99 a 102, usar los resultados de los ejercicios 95 a 98 para encontrar la integral.

99. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$ **100.** $\int \cos^4 x\, dx$

101. $\int \sec^4 \frac{2\pi x}{5}\, dx$ **102.** $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

103. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas máximas (alto) y mínimas (bajo) medias (en grados Fahrenheit) en Erie, Pennsylvania, durante cada mes del año. (*Fuente: NOAA*)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Máx	33.5	35.4	44.7	55.6	67.4	76.2
Mín	20.3	20.9	28.2	37.9	48.7	58.5

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Máx	80.4	79.0	72.0	61.0	49.3	38.6
Mín	63.7	62.7	55.9	45.5	36.4	26.8

Las temperaturas máximas y mínimas admiten el modelo

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\frac{\pi t}{6} + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$$

donde $t = 0$ corresponden a enero y a_0, a_1 y b_1 son como sigue.

$$a_0 = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\, dt$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\cos\frac{\pi t}{6}\, dt$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}\, dt$$

a) Aproximar el modelo $H(t)$ para las temperaturas máximas. (*Sugerencia:* Usar la regla de Simpson para aproximar las integrales y usar los datos de enero dos veces.)

b) Repetir el apartado *a)* para un modelo $L(t)$ para los datos de temperatura mínimos.

c) Usar una calculadora para comparar cada modelo con los datos reales. ¿Durante qué parte del año la diferencia es más grande entre las temperaturas máximas y mínimas?

104. ***Fórmulas de Wallis*** Usar el resultado del ejercicio 96 para demostrar las versiones siguientes de las fórmulas de Wallis.

a) Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

b) Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

105. El **producto escalar** de dos funciones f y g sobre $[a, b]$ está dado por $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$. Se dice que dos funciones distintas f y g son **ortogonales** si $\langle f, g\rangle = 0$. Mostrar que el conjunto siguiente de funciones es ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

$\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$

106. ***Serie de Fourier*** La suma siguiente es una *serie de Fourier finita*.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sen} ix$$

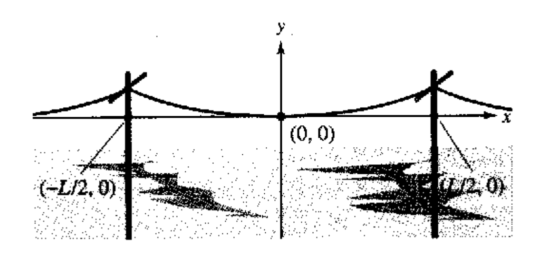
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

a) Usar el ejercicio 105 para demostrar que el coeficiente de a_n está dado por $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$.

b) Sea $f(x) = x$. Encontrar a_1, a_2 y a_3.

Proyecto de trabajo: Líneas de potencia

Las líneas de potencia son construidas atando cables entre los soportes fijos y ajustando la tensión en cada tramo. El cable cuelga entre los apoyos en la forma de una catenaria, como se muestra en la figura.



Sea T la tensión (en libras) en un tramo de cable, u la densidad (en libras por pie), sea $g \approx 32.2$ la aceleración debida a la gravedad (en pies/s^2), y sea L la distancia (en pies) entre dos soportes consecutivos. Entonces la ecuación de la catenaria es $y = \frac{T}{ug}\left(\cosh\frac{ugx}{T} - 1\right)$, donde x y y son medidos en pies.

a) Encontrar la longitud de la porción del cable entre dos soportes contiguos.

b) Para medir la tensión en un tramo de la línea de potencia, los especialistas usan el método de la onda de retorno. Se golpea el cable en un soporte, creando una onda en la línea, y es medido el tiempo t (en segundos) que tarda la onda en hacer un viaje redondo. La velocidad v (en pies por segundo) se da por $v = \sqrt{T/u}$. ¿Cuánto tiempo toma a la onda hacer un viaje redondo entre los soportes?

c) El pandeo s (en pulgadas) puede obtenerse evaluando y cuando $x = L/2$ en la ecuación para la catenaria (y multiplicando por 12). En la práctica, sin embargo, los especialistas de línea de potencia usan la "ecuación del instalador de líneas" dada por $s \approx 12.075t^2$. Usar el hecho que $[\cosh(ugL/2T) + 1] \approx 2$ para derivar esta ecuación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre la matemática de líneas de potencia, ver el artículo "Constructing Power Lines", de Thomas O'Neil en *The UMAP Journal.*

Sección 8.4 Sustituciones trigonométricas

- **Usar sustituciones trigonométricas para resolver una integral.**
- **Usar las integrales para formular y resolver las aplicaciones de la vida real.**

Integración de una función radical Hasta este punto del texto, no se ha evaluado la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Por argumentos geométricos se puede encontrar el valor exacto de esta integral. ¿Cuál es? Utilizando la integración simbólica con la regla de Simpson o de los trapecios, no se tiene la seguridad de la precisión de la aproximación. ¿Por qué?

Intentar calcular el valor exacto mediante la sustitución

$$x = \operatorname{sen} \theta \text{ y } dx = \cos \theta\, d\theta$$

¿Coincide la respuesta con el valor obtenido usando el razonamiento

Sustituciones trigonométricas

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas, usar **sustituciones trigonométricas** para evaluar integrales que contienen radicales

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \qquad \sqrt{a^2 + u^2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar al radical en el integrando. Hacer esto con las identidades pitagóricas.

$$\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta, \quad \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \quad \text{y} \quad \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1.$$

Por ejemplo, si $a > 0$, sea $u = a \operatorname{sen} \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}\\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}\\ &= a \cos \theta.\end{aligned}$$

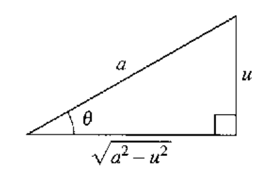
Notar que $\cos \theta \geq 0$, porque $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Sustituciones trigonométricas ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

   $u = a \operatorname{sen} \theta.$

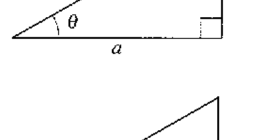
   Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

   $u = a \tan \theta.$

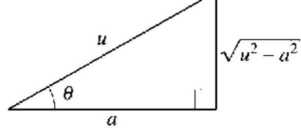
   Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



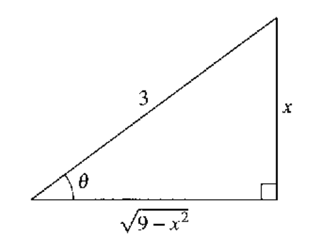
3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

   $u = a \sec \theta.$

   Entonces $\sqrt{u^2 - a^2} = \pm a \tan \theta$, donde $0 \leq \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Usar el valor positivo si $u > a$ y el valor negativo si $u < -a$.



NOTA Las restricciones sobre θ aseguran que la función que define la sustitución es inyectiva. De hecho, éstos son los mismos intervalos sobre los que se definen el arcseno, arctangente y arcsecante.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}, \cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Figura 8.6

EJEMPLO 1 Sustitución trigonométrica: $u = a \operatorname{sen}\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

Solución Primero, notar que ninguna de las reglas básicas de la integración aplica. Para usar la sustitución trigonométrica, observar que $\sqrt{9-x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$. Así que, usar la sustitución

$$x = a\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\theta.$$

Usando la derivación y el triángulo mostrados en la figura 8.6, se obtiene

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta \qquad \text{y} \qquad x^2 = 9\operatorname{sen}^2\theta.$$

Así, la sustitución trigonométrica lleva a

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{(9\operatorname{sen}^2\theta)(3\cos\theta)} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -\frac{1}{9}\cot\theta + C && \text{Aplicar la regla del cosecante.}\\
&= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C && \text{Sustituir para } \cot\theta.\\
&= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.
\end{aligned}$$

Notar que el triángulo en la figura 8.6 puede usarse para convertir los θ anteriores a x como sigue.

$$\begin{aligned}
\cot\theta &= \frac{\text{cateto ad}}{\text{cateto op}}\\
&= \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Usar la calculadora para encontrar cada integral definida.

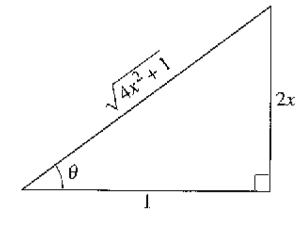
$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-x^2}}$$

Entonces usar la sustitución trigonométrica para reproducir los resultados obtenidos con la calculadora.

En un capítulo anterior se vio cómo pueden usarse las funciones hiperbólicas inversas para evaluar las integrales.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \qquad \int \frac{du}{a^2 - u^2} \qquad \text{y} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}.$$

También se pueden evaluar estas integrales por cambios de variable trigonométricos. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.



$\tan\theta = 2x$, $\sec\theta = \sqrt{4x^2+1}$
Figura 8.7

EJEMPLO 2 Sustitución trigonométrica: $u = a\tan\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Solución Sea $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \tan\theta$, como se muestra en la figura 8.7. Entonces,

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta.$$

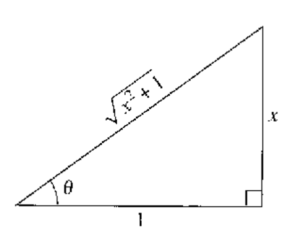
La sustitución trigonométrica produce

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} \qquad \text{Sustituir.}$$
$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta \qquad \text{Simplificar.}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \qquad \text{Aplicar la regla de la secante.}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C. \qquad \text{Deshacer el cambio.}$$

Intentar verificar este resultado con la calculadora. El resultado, ¿se da en esta forma o en la forma de una función hiperbólica inversa?

Extender el uso de la sustitución trigonométrica para cubrir las integrales conteniendo expresiones como $(a^2 - u^2)^{n/2}$ escribiendo la expresión como

$$(a^2 - u^2)^{n/2} = \left(\sqrt{a^2 - u^2}\right)^n.$$



$\tan\theta = x$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Figura 8.8

EJEMPLO 3 Sustitución trigonométrica: potencias racionales

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Solución Empezar escribiendo $(x^2+1)^{3/2}$ como $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$. Entonces, sea $a = 1$ y $u = x\tan\theta$, como se muestra en la figura 8.8. Usando

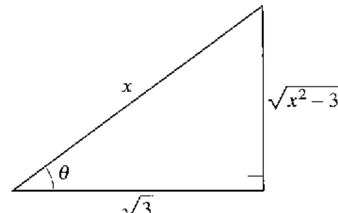
$$dx = \sec^2\theta\, d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

aplicar la sustitución trigonométrica como sigue

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} \qquad \text{Reescribir el denominador.}$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3\theta} \qquad \text{Sustituir.}$$
$$= \int \frac{d\theta}{\sec\theta} \qquad \text{Simplificar.}$$
$$= \int \cos\theta\, d\theta \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$
$$= \operatorname{sen}\theta + C \qquad \text{Aplicar la regla del coseno.}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C \qquad \text{Sustitución hacia atrás.}$$

Para las integrales definidas, a menudo es conveniente determinar los límites de la integración para θ, eso evita volver a convertir a x. Repasar este procedimiento en la sección 4.5, ejemplos 8 y 9.

EJEMPLO 4 Transformación de los límites de integración



$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{3}}, \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}$

Figura 8.9

Evaluar $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx.$

Solución Debido a que $\sqrt{x^2-3}$ tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, considerar

$$u = x, \quad a = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{3}\sec\theta$$

como se muestra en la figura 8.9. Entonces,

$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}\tan\theta.$$

Para determinar los límites superiores e inferiores de la integración, usar la sustitución $x = \sqrt{3}\sec\theta$ como sigue

Límite superior	*Límite inferior*
Cuando $x = \sqrt{3}$, $\sec\theta = 1$ y $\theta = 0$.	Cuando $x = 2$, $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Así, se tiene

Límites de integración para x — Límites de integración para θ

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{0}^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta}\\ &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta\\ &= \sqrt{3}\int_0^{\pi/6}(\sec^2\theta - 1)\,d\theta\\ &= \sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_0^{\pi/6}\\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\\ &\approx 0.0931.\end{aligned}$$

En el ejemplo 4, intentar volver a convertir a la variable x y evaluar la antiderivada en los límites originales de integración. Obtener

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{2}.$$

Al calcular integrales definidas por cambios de variables trigonométricos, verificar que los valores de θ están en los intervalos discutidos al principio de esta sección. Es decir, si se hubiera pedido evaluar la integral definida en el ejemplo 4

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\, dx$$

entonces usando $u = x$ y $a = \sqrt{3}$ en el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$ implicaría que $u < -a$. Así, al determinar los límites superiores e inferiores de integración, se tendría que escoger θ tal que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso la integral sería resuelta como sigue

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\, dx &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{(-\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)\, d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_{5\pi/6}^{\pi} -\sqrt{3}\tan^2\theta\, d\theta \\
&= -\sqrt{3}\int_{5\pi/6}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\, d\theta \\
&= -\sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{5\pi/6}^{\pi} \\
&= -\sqrt{3}\left[(0-\pi) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx -0.0931
\end{aligned}$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse completando el cuadrado. Por ejemplo, evaluar la integral siguiente.

$$\int \sqrt{x^2 - 2x}\, dx$$

Para empezar, completar el cuadrado y escribir el integral como

$$\int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\, dx.$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse para evaluar las tres integrales listadas en el teorema siguiente. Estas integrales se encontrarán varias veces en el resto del texto. Cuando esto pase, simplemente se citará este teorema. (En el ejercicio 85 verificar las fórmulas contenidas en el teorema.)

Teorema 8.2 Fórmulas de integración especiales ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + u\sqrt{a^2-u^2}\right) + C$

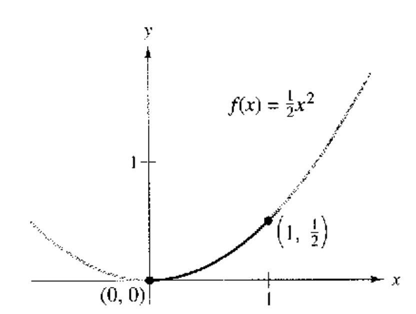
2. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$

3. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+a^2} + a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right|\right) + C$

Aplicaciones

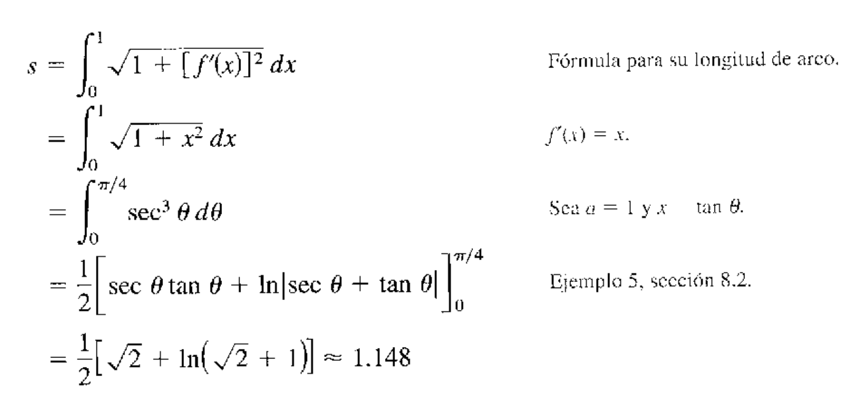
EJEMPLO 5 Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ entre $x = 0$ a $x = 1$ (ver figura 8.10).



La longitud de arco de la curva para (0, 0) a $(1, \frac{1}{2})$
Figura 8.10

Solución Referirse a la fórmula de longitud de arco en la sección 7.4.



$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{Fórmula para su longitud de arco.}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \qquad f'(x) = x.$$

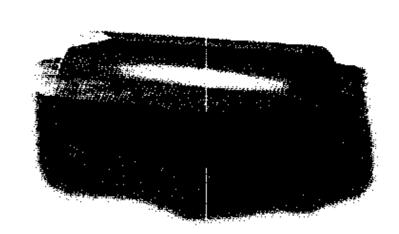
$$= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta \, d\theta \qquad \text{Sea } a = 1 \text{ y } x = \tan \theta.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \right]_0^{\pi/4} \qquad \text{Ejemplo 5, sección 8.2.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right] \approx 1.148$$

EJEMPLO 6 Comparación de las fuerzas de dos fluidos

Un barril de petróleo sellado (que pesa 48 libras por pie^3) está flotando en el agua de mar (que pesa 64 libras por pie^3), como se muestra en las figuras 8.11 y 8.12. (El barril no está completamente lleno de petróleo, la parte superior, 0.2 pies del barril, está vacío.) Comparar las fuerzas del fluido del interior y del exterior contra un extremo del barril.



El barril no está completamente lleno de petróleo; la parte superior del barril está vacia 0.2 pies
Figura 8.11

Solución En la figura 8.12, localizar el sistema de coordenadas con el origen al centro del círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$. para encontrar la fuerza del fluido contra un extremo interior del barril, integrar entre -1 y 0.8 (usando un peso de $w = 48$).

$$F = w\int_c^d h(y)L(y)\, dy \qquad \text{Ecuación general (ver sección 7.7).}$$

$$F_{\text{interior}} = 48\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

$$= 76.8\int_{-1}^{0.8} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 96\int_{-1}^{0.8} y\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

Para encontrar la fuerza exterior del fluido, integrar entre -1 y 0.4 (usando un peso de $w = 64$).

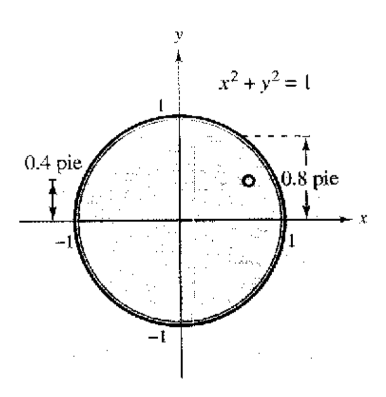


Figura 8.12

$$F_{\text{exterior}} = 64\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

$$= 51.2\int_{-1}^{0.4} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 128\int_{-1}^{0.4} y\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

Los detalles de integración se dejan para completarse en el ejercicio 84. Intuitivamente, ¿se diría que la fuerza del petróleo (interior) o la fuerza del agua de mar (exterior) es mayor? Evaluando estas dos integrales, determinar que

$$F_{\text{interior}} \approx 121.3 \text{ libras} \quad \text{y} \quad F_{\text{exterior}} \approx 93.0 \text{ libras}$$

Ejercicios de la sección 8.4

En los ejercicios 1 a 4, usar la derivación para asociar la antiderivada con la integral derecha. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$ *b*) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}\,dx$

c) $\int \sqrt{7+6x-x^2}\,dx$ *d*) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

1. $4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right| + \sqrt{x^2+16} + C$
2. $8\ln\left|\sqrt{x^2-16}+x\right| + \frac{x\sqrt{x^2-16}}{2} + C$
3. $8\,\text{arcsen}\frac{x}{4} - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C$
4. $8\,\text{arcsen}\frac{x-3}{4} + \frac{(x-3)\sqrt{7+6x-x^2}}{2} + C$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 5$ sen θ.

5. $\int \frac{1}{(25-x^2)^{3/2}}\,dx$
6. $\int \frac{10}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$
7. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$
8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

En los ejercicios 9 a 12, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 2$ sec θ.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$
11. $\int x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$
12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

En los ejercicios 13 a 16, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = \tan\theta$.

13. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$
14. $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$
16. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

En los ejercicios 17 a 20, usar las fórmulas de integración especial (teorema 8.2) para encontrar la integral.

17. $\int \sqrt{4+9x^2}\,dx$
18. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$
19. $\int \sqrt{25-4x^2}\,dx$
20. $\int \sqrt{2x^2-1}\,dx$

En los ejercicios 21 a 42, encontrar la integral.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$
22. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
24. $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$
25. $\int \sqrt{16-4x^2}\,dx$
26. $\int x\sqrt{16-4x^2}\,dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$
28. $\int \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt$
29. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$
30. $\int \frac{\sqrt{4x^2+9}}{x^4}\,dx$
31. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+9}}\,dx$
32. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+16}}\,dx$
33. $\int \frac{-5x}{(x^2+5)^{3/2}}\,dx$
34. $\int \frac{1}{(x^2+3)^{3/2}}\,dx$
35. $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$
36. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$
37. $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$
38. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx$
39. $\int \frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx$
40. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$
41. $\int \text{arcsec}\,2x\,dx,\quad x > \frac{1}{2}$
42. $\int x\,\text{arcsen}\,x\,dx$

En los ejercicios 43 a 46, completar el cuadrado y encontrar la integral.

43. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$
45. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+8}}\,dx$
46. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}}\,dx$

En los ejercicios 47 a 52, evaluar, usando la integral, *a*) los límites de integración dados y *b*) los límites obtenidos por la sustitución trigonométrica.

47. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt$
48. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-t^2)^{5/2}}\,dt$
49. $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$
50. $\int_0^{3/5} \sqrt{9-25x^2}\,dx$
51. $\int_4^6 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$
52. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la solución simbólica de la ecuación diferencial.

53. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-9},\quad x \geq 3,\quad y(3) = 1$
54. $\sqrt{x^2+4}\,\frac{dy}{dx} = 1,\quad x \geq -2,\quad y(0) = 4$

En los ejercicios 55 a 58, usar la calculadora para encontrar la integral. Verificar el resultado por derivación.

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}}\,dx$ **56.** $\int (x^2 + 2x + 11)^{3/2}\,dx$

57. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$ **58.** $\int x^2\sqrt{x^2 - 4}\,dx$

Desarrollo de conceptos

59. Decidir qué sustitución trigonométrica habría que hacer suponiendo que la integral a resolver contiene el radical dado, con $a > 0$. Explicar el razonamiento.

a) $\sqrt{a^2 - u^2}$ *b)* $\sqrt{a^2 + u^2}$ *c)* $\sqrt{u^2 - a^2}$

60. Enunciar el método de integración para realizar cada integración. Explicar por qué se eligió ese método. No integrar.

a) $\int x\sqrt{x^2 + 1}\,dx$ *b)* $\int x^2\sqrt{x^2 - 1}\,dx$

61. Evaluar la integral $\int \frac{x}{x^2 + 9}\,dx$ usando *a)* la sustitución *u* y *b)* la sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

62. Evaluar la integral $\int \frac{x^2}{x^2 + 9}\,dx$ *a)* algebraicamente usando $x^2 = (x^2 + 9) - 9$, y *b)* usando la sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 66, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

63. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int d\theta.$

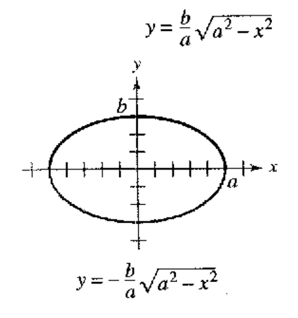
64. Si $x = \sec\theta$, entonces $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx = \int \sec\theta\tan\theta\,d\theta.$

65. Si $x = \tan\theta$, entonces $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{4\pi/3} \cos\theta\,d\theta.$

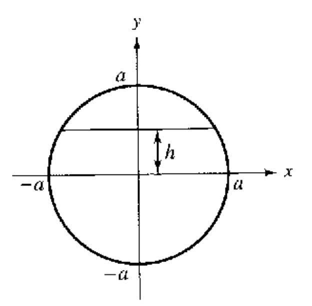
66. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta.$

67. ***Área*** Encontrar el área interior de la elipse mostrada en la figura.

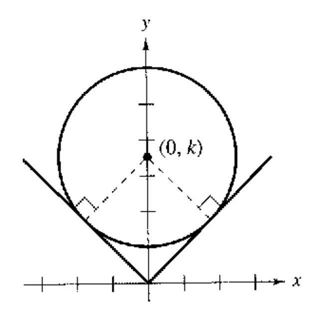
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



68. ***Área*** Encontrar el área de la región sombreada del círculo de radio *a*, si la cuerda está *h* unidades de $(0 < h < a)$ del centro del círculo (ver la figura).



69. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de la máquina es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y - k)^2 = 25$ (ver la figura).

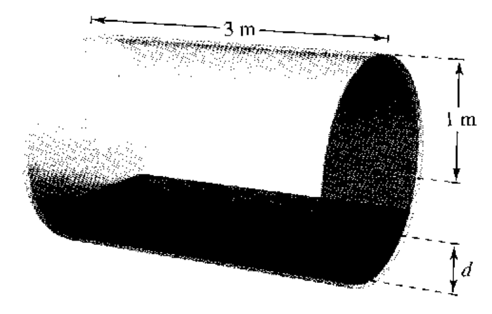


a) Encontrar *k* si el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

c) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina como una función del radio *r* del círculo.

70. ***Volumen*** El eje de un tanque de almacenamiento cilíndrico horizontal (ver la figura). El radio y longitud del tanque son 1 y 3 metros, respectivamente.



a) Determinar el volumen del fluido en el tanque como una función de la profundidad *d*.

b) Usar una calculadora para hacer la gráfica de la función en el apartado *a*).

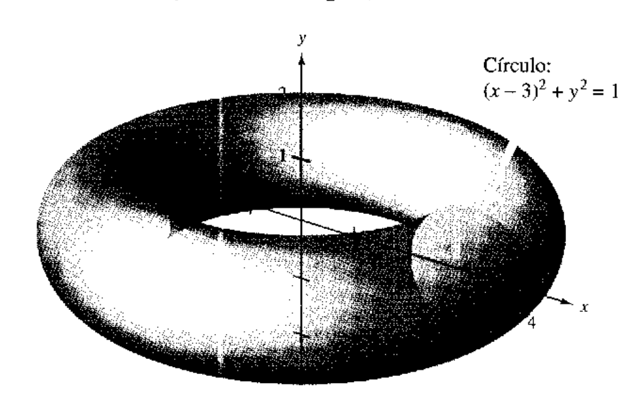
c) Diseñar una varilla de control para el tanque con las marcas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

d) El fluido está entrando en el tanque a una velocidad de $\frac{1}{4}$ m^3/min. Determinar la proporción de cambio de la profundidad del fluido como una función de su profundidad *d*.

e) Usar una calculadora para hacer la gráfica de la función en el apartado *d*). ¿Cuándo es mínima la proporción de cambio de la profundidad? ¿Esto está de acuerdo con la intuición? Explicar.

Volumen de un toro **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el volumen del toro generado al girar la región acotada por la gráfica del círculo alrededor del eje y.**

71. $(x-3)^2 + y^2 = 1$ (ver la figura)



72. $(x-h)^2 + y^2 = r^2, h > r$

Longitud de arco **En los ejercicios 73 y 74, encontrar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

73. $y = \ln x, \quad [1, 5]$

74. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad [0, 4]$

75. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de un arco de la curva del seno es igual a la longitud de un arco de la curva del coseno.

76. ***Conjetura***

a) Encontrar las fórmulas para la distancia entre (0, 0) y (a, a^2) a lo largo de la recta entre estos puntos y a lo largo de la parábola $y = x^2$.

b) Usar las fórmulas del apartado *a*) para encontrar las distancias para $a = 1$ y $a = 10$.

c) Hacer una conjetura sobre la diferencia entre las dos distancias cuando a crece.

Movimiento del proyectil **En los ejercicios 77 y 78, *a*) usar una calculadora para hacer la gráfica de la trayectoria de un proyectil que sigue el camino dado por la gráfica de la ecuación, *b*) determinar el rango del proyectil y *c*) usar integración en una calculadora para determinar la distancia de las trayectorias del proyectil.**

77. $y = x - 0.005x^2$

78. $y = x - \dfrac{x^2}{72}$

Centroide **En los ejercicios 79 y 80, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las desigualdades.**

79. $y \leq 3/\sqrt{x^2+9}, y \geq 0, x \geq -4, x \leq 4$

80. $y \leq \frac{1}{4}x^2, (x-4)^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0$

81. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie del sólido generada al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2, y = 0, x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ alrededor del eje x.

82. ***Intensidad de campo*** La intensidad de campo H de un imán de longitud $2L$ sobre una partícula a r unidades del centro del imán es

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}$$

donde $\pm m$ son los polos del imán (ver la figura). Encontrar la intensidad de campo media cuando la partícula se mueve de 0 a R unidades del centro evaluando la integral

$$\frac{1}{R}\int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}\,dr.$$

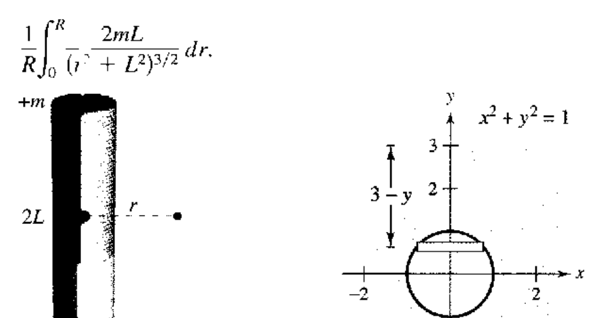


Figura para 82 **Figura para 83**

83. ***Fuerza de un fluido*** Encontrar la fuerza de un fluido sobre una ventana vertical de observación circular de 1 pie de radio dentro de un tanque lleno de agua de un centro piscícola cuando el centro de la ventana es *a*) 3 pies y *b*) d pies ($d > 1$) debajo de la superficie de agua (ver la figura). Usar la sustitución trigonométrica para evaluar la integral. (Recordar que en la sección 7.7, en un problema similar, se evaluó una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando era impar.)

84. ***Fuerza de un fluido*** Evaluar las siguientes dos integrales que proporcionan las fuerzas del fluido en el ejemplo 6.

a) $F_{\text{interior}} = 48\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy$

b) $F_{\text{exterior}} = 64\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy$

85. Usar la sustitución trigonométrica para verificar las fórmulas de la integración dadas en el teorema 8.2.

86. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de arco de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es igual a la circunferencia de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ (ver la figura).

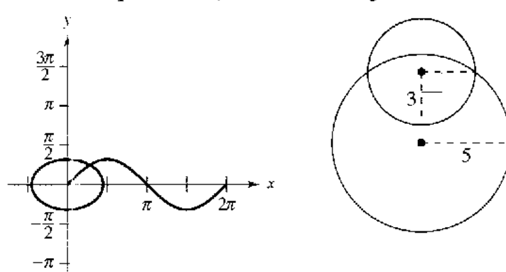


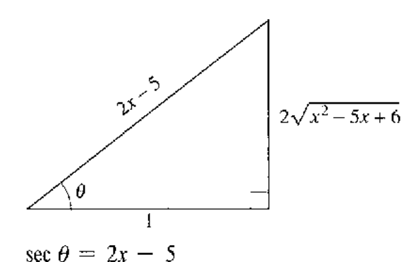
Figura para 86 **Figura para 87**

87. ***Área de un lune*** La región creciente acotada por dos círculos forman un lune (ver la figura). Encontrar el área del lune dado que el radio del círculo más pequeño es 3 y el radio del círculo más grande es 5.

Sección 8.5 Fracciones simples o parciales

- **Entender el concepto de una descomposición en fracciones simples o parciales.**
- **Usar la descomposición de fracciones simples con los factores lineales para integrar las funciones racionales.**
- **Usar la descomposición de fracciones simples con los factores cuadráticos para integrar las funciones racionales.**

Fracciones simples o parciales



$\sec\theta = 2x - 5$
Figura 8.13

En esta sección se examina un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales más simples para poder aplicar las fórmulas básicas de la integración. Este procedimiento se llama **método de las fracciones simples o parciales**. Para ver el beneficio del método de las fracciones simples, considerar la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$$

Para evaluar esta integral *sin* las fracciones simples, completar el cuadrado y hacer un cambio de variable trigonométrico (ver la figura 8.13) para obtener

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{dx}{(x-5/2)^2-(1/2)^2} \qquad a = \tfrac{1}{2},\ x - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\sec\theta.$$

$$= \int \frac{(1/2)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(1/4)\tan^2\theta} \qquad dx = \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta.$$

$$= 2\int \csc\theta\,d\theta$$

$$= 2\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.$$

Ahora, suponer que se ha observado que

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}. \qquad \text{Descomposición en fracciones simples.}$$

Entonces, evaluar la integral fácilmente, como sigue.

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C$$

Este método es preferible a los cambios de variable trigonométricos. Sin embargo, su uso depende de la habilidad para factorizar el denominador, $x^2 - 5x + 6$, y para encontrar las **fracciones simples**

$$\frac{1}{x-3} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{x-2}.$$

En esta sección se estudiarán las técnicas para encontrar las descomposiciones de las fracciones simples.

JOHN BERNOULLI (1667-1748)
El método de descomposición de las fracciones simples o parciales fue introducido por John Bernoulli, matemático suizo cuyas investigaciones fueron fundamentales en el desarrollo temprano del cálculo. John Bernoulli fue profesor en la Universidad de Basilea donde contó con ilustres discípulos, el más famoso fue Leonhard Euler.

AYUDA DE ESTUDIO En cursos previos se vio cómo combinar funciones tales como

$$\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3} = \frac{5}{(x-2)(x+3)}.$$

El método de las fracciones simples muestra cómo invertir este proceso.

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{?}{x-2} + \frac{?}{x+3}$$

Recordar del álgebra que cada polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreductibles.* Por ejemplo, el polinomio

$$x^5 + x^4 - x - 1$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x - 1 &= x^4(x+1) - (x+1) \\ &= (x^4 - 1)(x+1) \\ &= (x^2+1)(x^2-1)(x+1) \\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)(x+1)^2(x^2+1) \end{aligned}$$

donde $(x - 1)$ es un factor lineal, $(x + 1)^2$ es un factor lineal repetido, y $(x^2 + 1)$ es un factor cuadrático irreducible. Usando esta factorización, escribir la descomposición de la fracción simple de la expresión racional

$$\frac{N(x)}{x^5 + x^4 - x - 1}$$

donde $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, como sigue.

$$\frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Descomposición de $N(x)/D(x)$ en fracciones simples

1. **Dividir en caso impropio:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{a polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor del grado de $D(x)$. Entonces aplicar los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador:** Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px + q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2 + bx + c)^n$$

donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible.

3. **Factores lineales:** Para cada factor lineal $(px + q)^m$, la descomposición en fracciones simples debe incluir la suma siguiente de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos:** Para cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en fracciones simples debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

* *Para una revisión de técnicas de factorización, ver* Precalculus, *6a. edición, por Larson y Hostetler o* Precalculus: A Graphing Approach, *4a. edición, por Larson, Hostetler y Edwards (Boston, Massachusetts: Houghton Mifflin, 2004 y 2005, respectivamente).*

Factores lineales

Las técnicas algebraicas para determinar las constantes en los numeradores de una descomposición en fracciones simples con factores lineales se muestran en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Escribir la descomposición de la fracción simple para $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución Porque $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, incluir una fracción simple para cada factor y escribir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

donde A y B serán determinados. Multiplicando esta ecuación por el mínimo común denominador $(x - 3)(x - 2)$ da la **ecuación básica**

$$1 = A(x - 2) + B(x - 3). \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Porque esta ecuación es cierta para todo x, se puede sustituir cualquier valor *conveniente* para x para obtener las ecuaciones en A y B. Los valores más convenientes son los que hacen los factores particulares igual a 0.

NOTA Notar que las sustituciones para x en el ejemplo 1 son escogidas por su conveniencia determinando los valores para A y B; $x = 2$ se elige para eliminar el término $A(x - 2)$, y $x = 3$ se elige para eliminar el término $B(x - 3)$. La meta es hacer las sustituciones *convenientes* siempre que sea posible.

Para resolver para A, sea $x = 3$ y obtener

$$1 = A(3 - 2) + B(3 - 3) \qquad \text{Sea } x = 3 \text{ en la ecuación básica.}$$
$$1 = A(1) + B(0)$$
$$A = 1.$$

Para resolver para B, sea $x = 2$ y obtener

$$1 = A(2 - 2) + B(2 - 3) \qquad \text{Sea } x = 2 \text{ en la ecuación básica.}$$
$$1 = A(0) + B(-1)$$
$$B = -1.$$

Así, la descomposición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}$$

como se muestra al principio de esta sección.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender un método diferente para encontrar la descomposición de las fracciones simples, llamado Método de Heavyside, ver el artículo "Calculus to Algebra Connections in Partial Fraction Decomposition", por Joseph Wiener y Will Watkins, en *The AMATYC Review*.

Asegurarse de que el método de fracciones simples parciales sólo es práctico para las integrales de funciones racionales cuyos denominadores factorizan "muy bien". Por ejemplo, si el denominador en el ejemplo 1 se cambiara a $x^2 - 5x + 5$, su factorización como

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right]$$

sería demasiado complicada como para usar con las fracciones simples parciales. En casos así, es preferible completar el cuadrado o recurrir a integración simbólica en la calculadora para realizar la integración. Al hacer esto, se obtiene

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x - \sqrt{5} - 5\right| - \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x + \sqrt{5} - 5\right| + C.$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx.$

Solución Porque

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x &= x(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x + 1)^2 \end{aligned}$$

incluir una fracción para *cada potencia* de x y $(x + 1)$ y escribir

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x + 1)^2$ da la *ecuación básica*

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx. \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Para resolver para A, sea $x = 0$. Esto elimina los términos B y C y da

$$\begin{aligned} 6 &= A(1) + 0 + 0 \\ A &= 6. \end{aligned}$$

Para resolver para C, sea $x = -1$. Esto elimina los términos A y B y da

$$\begin{aligned} 5 - 20 + 6 &= 0 + 0 - C \\ C &= 9. \end{aligned}$$

Se han usado las opciones más convenientes para x, para encontrar el valor de B, usar cualquier *otro valor* de x junto con los valores calculados de A y C. Usando $x = 1$, $A = 6$ y $C = 9$ producen

$$\begin{aligned} 5 + 20 + 6 &= A(4) + B(2) + C \\ 31 &= 6(4) + 2B + 9 \\ -2 &= 2B \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Así, sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}\right) dx \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x + 1| + 9\frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x^6}{x + 1}\right| - \frac{9}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado derivando. Incluir álgebra en la verficación, simplificando la derivada hasta que haya obtenido el integrando original.

NOTA Es necesario hacer tantas sustituciones para x como coeficientes desconocidos (A, B, C, . . .) para ser determinados. Así, en el ejemplo 2, se hicieron tres sustituciones ($x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$) para resolver para A, B y C.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para un enfoque alternativo de usar las fracciones simples, ver el artículo "A Short-cut in Partial Fractions", por Xun-Chen y Huang, en *The College Mathematics Journal*.

TECNOLOGÍA Pueden usarse más sistemas algebraicos tales como *Derive*, *Maple*, *Mathcad*, *Mathematica* y *TI-89*, para descomponer una función racional en fracciones simples. Por ejemplo, usando el *Maple*, se obtiene lo siguiente.

$$\text{convertir}\left(\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}, \text{fracsimp}, x\right)$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1}$$

Factores cuadráticos

Al usar el método de fracciones simples con los factores *lineales*, una opción conveniente de x da un valor inmediatamente por uno de los coeficientes. Con los factores *cuadráticos*, un sistema de ecuaciones lineales tiene que ser resuelto, sin tener en cuenta la opción de x.

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos y lineales distintos

Encontrar $\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\,dx$.

Solución Porque

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

debe incluir una fracción simple para cada factor y escribir

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x - 1)(x^2 + 4)$ da la *ecuación básica*

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1).$$

Para resolver para A, sea $x = 0$ y obtener

$$-8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad \Longrightarrow \quad 2 = A.$$

Para resolver para B, sea $x = 1$ y obtener

$$-10 = 0 + B(5) + 0 \quad \Longrightarrow \quad -2 = B.$$

En este punto, C y D serán determinados todavía. Encontrar estas constantes restantes eligiendo otros dos valores para x y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales. Si $x = -1$, entonces, usando $A = 2$ y $B = -2$, escribir

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2) \\ 2 &= -C + D. \end{aligned}$$

Si $x = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1) \\ 8 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal sustrayendo la primera ecuación de la segunda

$$\begin{aligned} -C + D &= 2 \\ 2C + D &= 8 \end{aligned}$$

da $C = 2$. Por consiguiente, $D = 4$, y sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4}\right) dx \\ &= 2\ln|x| - 2\ln|x - 1| + \ln(x^2 + 4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 3 la solución de la ecuación básica empezó con la sustitución de valores de x haciendo que factores lineales fueran igual a 0. Este método funciona bien cuando la descomposición de fracciones simples contiene los factores lineales. Sin embargo, si la descomposición contiene sólo factores cuadráticos, es a menudo más conveniente un procedimiento alternativo.

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx.$

Solución Incluyen una fracción simple para cada potencia de $(x^2 + 2)$ y escribir

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $(x^2 + 2)^2$ da la *ecuación básica*.

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D.$$

Desarrollando la ecuación básica y agrupando como términos semejantes produce

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D).$$

Ahora, igualar los coeficientes de términos semejantes en ambos lados de la ecuación.

$8 = A$ $\qquad$ $0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$

Usando los valores conocidos $A = 8$ y $B = 0$, escribir

$$13 = 2A + C = 2(8) + C \implies C = -3$$
$$0 = 2B + D = 2(0) + D \implies D = 0.$$

Por último, concluir que

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2}\right) dx$$
$$= 4\ln(x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

TECNOLOGÍA Usando una calculadora para evaluar la integral en el ejemplo 4 podría encontrarse que la forma de la antiderivada es diferente. Por ejemplo, cuando se usa un sistema informático para trabajar el ejemplo 4, se obtiene

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \ln(x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

¿Este resultado es equivalente al obtenido en el ejemplo 4?

Cuando se integren expresiones racionales, tener presente que para las expresiones racionales impropias como

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 7x + 7}{x^2 + x - 2}$$

primero dividir para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 2x - 1 + \frac{-2x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

La expresión racional propia se descompone entonces en sus fracciones simples por los métodos usuales. Aquí están algunas estrategias para resolver la ecuación básica que se obtiene en una descomposición de fracciones parciales.

Estrategias para resolver la ecuación básica

Factores lineales

1. Sustituir en la ecuación básica las raíces de los distintos factores lineales.
2. Para factores lineales repetidos, usar los coeficientes lineales determinados en la estrategia 1 para reescribir la ecuación básica. Entonces sustituir otros valores convenientes de x y resolver para los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar términos atendiendo a las potencias de x
3. Igualar los coeficientes de cada potencia para obtener un sistema de ecuaciones lineales conteniendo A, B, C, etc.
4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Antes de concluir se debe recordar lo siguiente. Primero, no es necesario usar siempre la técnica de las fracciones simples en las funciones racionales. Por ejemplo, la integral siguiente se evalúa más fácil por la regla log.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 4}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3 + 3x - 4| + C\end{aligned}$$

Segundo, si el integrando no está en la forma reducida, reduciéndolo se puede eliminar la necesidad de las fracciones simples, como se muestra en la integral siguiente.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x - 4}\,dx &= \int \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}\,dx \\ &= \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 2| + C\end{aligned}$$

Por último, pueden usarse las fracciones simples con algunos cocientes que contienen funciones trascendentes. Por ejemplo, la sustitución $u = \operatorname{sen} x$ permite escribir

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1)}\,dx = \int \frac{du}{u(u - 1)}. \qquad u = \operatorname{sen} x,\ du = \cos x\,dx.$$

Ejercicios de la sección 8.5

En los ejercicios 1 a 6, escribir la forma de la descomposición en fracciones simples de la expresión racional. No resolver sus coeficientes.

1. $\dfrac{5}{x^2 - 10x}$

2. $\dfrac{4x^2 + 3}{(x - 5)^3}$

3. $\dfrac{2x - 3}{x^3 + 10x}$

4. $\dfrac{x - 2}{x^2 + 4x + 3}$

5. $\dfrac{16}{x^2 - 10x}$

6. $\dfrac{2x - 1}{x(x^2 + 1)^2}$

En los ejercicios 7 a 28, usar las fracciones simples para encontrar la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 9}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 + x - 2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{5 - x}{2x^2 + x - 1}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 12x - 12}{x^3 - 4x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 - 4x}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{(x - 1)^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3 + x^2 - x - 1}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^3 - 8}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 - 8}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4 - 1}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 3}{x^4 + 6x^2 + 9}\,dx$

En los ejercicios 29 a 32, evaluar la integral definida. Usar una calculadora para verificar el resultado.

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{2x^2 + 5x + 2}\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)}\,dx$

31. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}\,dx$

En los ejercicios 33 a 40, usar un sistema algebraico de cálculo para determinar la primitiva que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la primitiva resultante.

33. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - 6x + 9}\,dx,\quad (4, 0)$

34. $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 1}{x^2(x - 1)^3}\,dx,\quad (2, 1)$

35. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)^2}\,dx,\quad (0, 1)$

36. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2}\,dx,\quad (3, 4)$

37. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2}\,dx,\quad (3, 10)$

38. $\displaystyle\int \frac{x(2x - 9)}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx,\quad (3, 2)$

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4}\,dx,\quad (6, 4)$

40. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx,\quad (2, 6)$

En los ejercicios 41 a 46, usar una sustitución adecuada para encontrar la integral.

41. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos x - 1)}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x(\tan x + 1)}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)}\,dx$

En los ejercicios 47 a 50, usar el método de fracciones simples para verificar la fórmula de la integración.

47. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a + bx)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

49. $\displaystyle\int \frac{x}{(a + bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a + bx} + \ln|a + bx|\right) + C$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a + bx)}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

Campos de pendientes **En los ejercicios 51 y 52, usar una calculadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de la condición inicial dada.**

51. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6}{4 - x^2}$

$y(0) = 3$

52. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$

$y(0) = 5$

Desarrollo de conceptos

53. ¿Cuál es el primer paso cuando se integra $\displaystyle\int \frac{x^3}{x - 5}\,dx$? Explicar.

54. Describir la descomposición de la función racional propia $N(x)/D(x)$ *a)* si $D(x) = (px + q)^m$, y *b)* si $D(x) = (ax^2 + bx + c)^n$, donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible. Explicar por qué se eligió ese método.

55. Enunciar el método a usar para evaluar cada integral. Explicar por qué se eligió ese método. No integrar.

a) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 8}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{7x + 4}{x^2 + 2x - 8}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

Desarrollo de conceptos *(continuación)*

56. Determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la gráfica de $f(x) = 10/[x(x^2 + 1)]$ en el intervalo $[1, 3]$. Hacer la selección utilizando un dibujo de la región y no realizando algún cálculo. Explicar el razonamiento.

a) -6 *b)* 6 *c)* 3 *d)* 5 *e)* 8

57. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 12/(x^2 + 5x + 6)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

58. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 7\,(16 - x^2)$ y $y = 1$.

59. ***Modelo matemático*** El costo previsto de una compañía C(en cientos de miles de dólares) para quitar $p\%$ de un químico de su agua residual se muestra en la tabla.

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
C	0	0.7	1.0	1.3	1.7	2.0	2.7	3.6	5.5	11.2

Un modelo para los datos está dado por

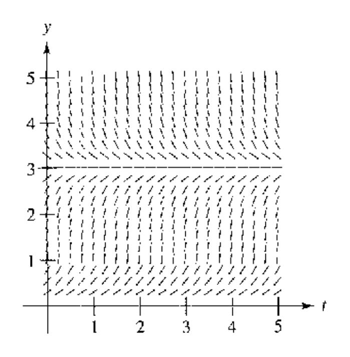
$$C = \frac{124p}{(10 + p)(100 - p)}, \quad 0 \le p < 100.$$

Usar el modelo para encontrar el costo medio para quitar entre 75 y 80% del químico.

60. ***Crecimiento logístico*** En el capítulo 6, la ecuación de crecimiento exponencial se derivó de la suposición de que la proporción de crecimiento era proporcional a la cantidad existente. En la práctica, a menudo existe una cota superior L por el cual el crecimiento no puede ocurrir. En la práctica, se debe asumir que la proporción de crecimiento no sólo es proporcional a la cantidad existente, sino también a la diferencia entre la cantidad existente y y la cota superior L. Que es, $dy/dt = ky(L - y)$. En la forma integral, escribir esta relación como

$$\int \frac{dy}{y(L - y)} = \int k\, dt.$$

a) Se muestra un campo de pendientes para $dy/dt = y(3 - y)$ de la ecuación diferencial. Dibujar una posible solución a la ecuación diferencial si $y(0) = 5$, y otro si $y(0) = \frac{1}{2}$.



b) Donde $y(0)$ es mayor que 3, ¿cuál es el signo de la pendiente de la solución?

c) Para $y > 0$, encontrar $\lim_{t \to \infty} y(t)$.

d) Evaluar las dos integrales dadas y resolver para y como una función de t donde y_0 es la cantidad inicial.

e) Usar el resultado del apartado *d)* para encontrar y hacer la gráfica de las soluciones en el apartado *a)*. Usar una calculadora para hacer la gráfica de las soluciones y comparar los resultados con las soluciones en el apartado *a)*.

f) La gráfica de la función y es una **curva logística**. Mostrar que la proporción de crecimiento es máxima en el punto de inflexión y que esto ocurre cuando $y = L/2$.

61. ***Volumen y centroide*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = 2x/(x^2 + 1)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x. Encontrar el centroide de la región.

62. ***Volumen*** Considerar la región acotada por la gráfica de $y^2 = (2 - x)^2/(1 + x)^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar esta región alrededor del eje x.

63. ***Modelo de epidemias*** Un solo individuo infectado entra en una comunidad de n individuos susceptibles. Sea x el número de individuos recientemente infectados en el momento t. El modelo de epidemias común asume que la enfermedad se extiende a un ritmo proporcional al producto del número total infectado y al número no infectado todavía. Así, $dx/dt = k(x + 1)(n - x)$ y se obtiene

$$\int \frac{1}{(x + 1)(n - x)}\, dx = \int k\, dt.$$

Resolver para x como una función de t.

64. ***Reacciones químicas*** En una reacción química, una unidad de compuesto Y y una unidad de compuesto Z se convierte en una sola unidad de X. El compuesto x es la cantidad de compuesto X formada, y la proporción de formación de X es proporcional al producto de las cantidades de compuestos no convertidos Y y Z. Entonces, $dx/dt = k(y_0 - x)(z_0 - x)$, donde el y_0 y z_0 son las cantidades iniciales de compuestos Y y Z. De esta ecuación se obtiene

$$\int \frac{1}{(y_0 - x)(z_0 - x)}\, dx = \int k\, dt..$$

a) Realizar las dos integraciones y resolver para x en términos de t.

b) Usar el resultado del apartado *a)* para encontrar x como $t \to \infty$ si 1) $y_0 < z_0$, 2) $y_0 > z_0$ y 3) $y_0 = z_0$.

65. Evaluar

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^4}\, dx$$

de dos maneras diferentes, una de las cuales por descomposición en fracciones simples.

Preparación del examen Putnam

66. Demostrar $\dfrac{22}{7} - \pi = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1 - x)^4}{1 + x^2}\, dx.$

Sección 8.6 Integración por tablas y otras técnicas de integración

- **Evaluar una integral indefinida usando una tabla de integrales.**
- **Evaluar una integral indefinida usando las fórmulas de reducción.**
- **Evaluar una integral indefinida que involucra funciones racionales de seno y coseno.**

Integración por tablas

Ya se han estudiado en este capítulo algunas técnicas de integración utilizables con ayuda de las reglas básicas de integración. Pero el saber usar varias técnicas no es suficiente. Se necesita saber cuándo usarlas. La integración es, por encima de todo, un problema de reconocimiento. Es decir, reconocer qué regla o técnica aplicar para obtener una antiderivada. Con frecuencia, una ligera alteración del integrado requerirá una técnica de integración diferente (o produce una función cuya antiderivada no es una función elemental), como se muestra abajo.

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \qquad \text{Integración por partes.}$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \qquad \text{Regla de las potencias.}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln|\ln x| + C \qquad \text{Regla log.}$$

$$\int \frac{x}{\ln x}\, dx = ? \qquad \text{Función no elemental.}$$

TECNOLOGÍA Un sistema algebraico consiste, en parte, en una base de datos de fórmulas de integración. La diferencia principal entre usar un sistema algebraico y usar tablas de integrales es que con un sistema algebraico de computadora busca en la base de datos una región adecuada. Con las tablas de integración, uno debe hacer la búsqueda.

Muchas personas encuentran las tablas de integrales como un valioso suplemento a las técnicas de integración discutidas en este capítulo. Pueden encontrarse tablas de integrales comunes en el apéndice B. Pero la **integración por tablas** no es una "solución total" para todas las dificultades que pueden acompañar a la integración; usar tablas de integrales requiere razonamiento considerable y visión, y a menudo involucra sustitución.

Cada fórmula de la integración en el apéndice B puede desarrollarse usando una o más de las técnicas de este capítulo. Intentar verificar algunas de las fórmulas. Por ejemplo, la fórmula 4

$$\int \frac{u}{(a+bu)^2}\, du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C \qquad \text{Fórmula 4.}$$

puede verificarse usando el método de fracciones simples, y la fórmula 19

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\, du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} \qquad \text{Fórmula 19.}$$

puede verificarse integrando por partes. Notar que las integrales en el apéndice B son clasificadas de acuerdo con formas que contienen lo siguiente.

u^n	$(a + bu)$
$(a + bu + cu^2)$	$\sqrt{a + bu}$
$(a^2 \pm u^2)$	$\sqrt{u^2 \pm a^2}$
$\sqrt{a^2 - u^2}$	Funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas inversas	Función exponencial
Funciones logarítmicas	

Usar las tablas de integrales en el apéndice B y la sustitución

$$u = \sqrt{x-1}$$

para evaluar la integral en el ejemplo 1. Si se hace esto, se obtendrá

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2\,du}{u^2+1}.$$

¿Hacerlo produce el mismo resultado que en el ejemplo 1?

EJEMPLO 1 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Solución Puesto que la expresión dentro del radical es lineal, considerar las integrales que contienen $\sqrt{a+bu}$.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C \qquad \text{Fórmula 17 } (a < 0).$$

Sea $a = -1$, $b = 1$ y $u = x$. Entonces $du = dx$ y puede escribirse

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C.$$

EJEMPLO 2 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int x\sqrt{x^4-9}\,dx$.

Solución Porque el radical tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, debe considerarse la fórmula 26.

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|\right) + C$$

Sea $u = x^2$ y $a = 3$. Entonces $du = 2x\,dx$, y se tiene

$$\int x\sqrt{x^4-9}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(x^2)^2 - 3^2}\,(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2\sqrt{x^4-9} - 9\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4-9}\right|\right) + C.$$

EJEMPLO 3 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx$.

Solución De las formas que contienen e^u, considerar la fórmula siguiente.

$$\int \frac{du}{1+e^u} = u - \ln(1+e^u) + C \qquad \text{Fórmula 84.}$$

Sea $u = -x^2$. Entonces $du = -2x\,dx$, y se tiene

$$\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{1+e^{-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-x^2 - \ln(1+e^{-x^2})\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + \ln(1+e^{-x^2})\right] + C.$$

TECNOLOGÍA El ejemplo 3 muestra la importancia de tener varias técnicas de solución a disposición. Esta integral no es difícil de resolver con una tabla, pero cuando se ha intentado resolverla con un programa de integración símbolica muy conocido, la calculadora ha sido incapaz de encontrar la antiderivada.

Fórmulas de reducción

Algunas integrales de las tablas tienen la forma $\int f(x)\,dx = g(x) + \int h(x)\,dx$. Tales fórmulas de integración se llaman **fórmulas de reducción** porque reducen una integral dada a la suma de una función y una integral más simple.

EJEMPLO 4 Aplicación de una fórmula de reducción

Encontrar $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución Considerar las tres fórmulas siguientes.

$$\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C \qquad \text{Fórmula 52.}$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du \qquad \text{Fórmula 54.}$$

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du \qquad \text{Fórmula 55.}$$

Usando la fórmula 54, la 55 y entonces la 52 produce

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^3\cos x + 3\int x^2 \cos x\,dx\\ &= -x^3\cos x + 3\left(x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx\right)\\ &= -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA A veces, cuando se usa integración simbólica, se obtienen resultados que parecen muy diferentes, pero son realmente equivalentes. Aquí se muestra cómo varios sistemas diferentes evaluaron la integral en el ejemplo 5.

Maple

$\sqrt{3-5x} - \sqrt{3}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3-5x}\sqrt{3}\right)$

Derive

$\sqrt{3}\ln\left[\dfrac{\sqrt{(3-5x)}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right] + \sqrt{(3-5x)}$

Mathematica

Sqrt [3 − 5x] − Sqrt [3] ArcTanh[Sqrt [3 − 5x] / Sqrt [3]]

Mathcad

$\sqrt{3-5x} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\ln\left[-\frac{1}{5}\dfrac{(-6+5x+2\sqrt{3}\sqrt{3-5x})}{x}\right]$

Notar que estos programas no incluyen una constante de integración.

EJEMPLO 5 Aplicación de una fórmula de reducción

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx$.

Solución Considerar las dos fórmulas siguientes

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C \qquad \text{Fórmula 17 } (a > 0).$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} \qquad \text{Fórmula 19.}$$

Usando la fórmula 19, con $a = 3$, $b = -5$ y $u = x$, se produce

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3-5x}}{x}\,dx &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3-5x} + 3\int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}}\right)\\ &= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}}.\end{aligned}$$

Usando la fórmula 17, con $a = 3$, $b = -5$ y $u = x$, se produce

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx &= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-5x}+\sqrt{3}}\right|\right) + C\\ &= \sqrt{3-5x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-5x}+\sqrt{3}}\right| + C.\end{aligned}$$

Funciones racionales de seno y coseno

EJEMPLO 6 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx$.

Solución Sustituir 2 sen x cos x para sen $2x$ produce

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx = 2\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2 + \cos x}\, dx.$$

Una verificación de las formas que contienen el sen u o cos u en el apéndice B muestra que ninguno de aquellos listados aplica. Así, considerar formas que contienen $a + bu$. Por ejemplo,

$$\int \frac{u\, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}(bu - a \ln|a + bu|) + C. \qquad \text{Fórmula 3.}$$

Sea $a = 2$, $b = 1$ y $u = \cos x$. Entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, y se tiene

$$\begin{aligned}
2\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2 + \cos x}\, dx &= -2\int \frac{\cos x(-\operatorname{sen} x\, dx)}{2 + \cos x} \\
&= -2(\cos x - 2\ln|2 + \cos x|) + C \\
&= -2\cos x + 4\ln|2 + \cos x| + C.
\end{aligned}$$

El ejemplo 6 contiene una expresión racional de sen x y cos x. Si no se consigue encontrar una integral de esta forma en la integración por tablas, intentarlo usando la sustitución especial siguiente para convertir la expresión trigonométrica a una expresión racional normal.

Sustitución para funciones racionales de seno y coseno

Para integrales que contienen funciones racionales de seno y coseno, la sustitución

$$u = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

hace que

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2\, du}{1 + u^2}.$$

Demostración De la sustitución para u, se sigue que

$$u^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Resolviendo para cos x produce $\cos x = (1 - u^2)/(1 + u^2)$. Para encontrar sen x, escribir $u = \operatorname{sen} x/(1 + \cos x)$ como

$$\operatorname{sen} x = u(1 + \cos x) = u\left(1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right) = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Por último, para encontrar dx, considerar $u = \tan(x/2)$. Entonces se tiene el $\arctan u = x/2$ y $dx = (2\, du)/(1 + u^2)$.

Ejercicios de la sección 8.6

En los ejercicios 1 y 2, usar una tabla de integrales con formas que contienen $a + bu$ para encontrar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{2}{3x^2(2x-5)^2}\,dx$

En los ejercicios 3 y 4, usar una tabla de integrales con formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ para encontrar la integral.

3. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x}\,dx$

En los ejercicios 5 y 6, usar una tabla de integrales con formas que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$ para encontrar la integral.

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^4}}\,dx$

En los ejercicios 7 a 10, usar una tabla de integrales con formas que contienen las funciones trigonométricas para encontrar la integral.

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 2x\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\tan 5x}\,dx$

En los ejercicios 11 y 12, usar una tabla de integrales con formas que contienen e^u para encontrar la integral.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx$

12. $\displaystyle\int e^{-x/2}\operatorname{sen}2x\,dx$

En los ejercicios 13 y 14, usar una tabla de integrales con formas que contienen u para encontrar la integral.

13. $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$

14. $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar la integral indefinida *a*) usando las tablas de integración y *b*) usando el método dado.

Integral	*Método*
15. $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$	Integración por partes
16. $\displaystyle\int x^4\ln x\,dx$	Integración por partes
17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$	Fracciones simples
18. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-75}\,dx$	Fracciones simples

En los ejercicios 19 a 42, usar la integración por tablas para encontrar la integral.

19. $\displaystyle\int x\operatorname{arcsec}(x^2+1)\,dx$

20. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} 2x\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{2x}{(1-3x)^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{\theta^2}{1-\operatorname{sen}\theta^3}\,d\theta$

25. $\displaystyle\int e^x\arccos e^x\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-\tan e^x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x}{1-\sec x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{t[1+(\ln t)^2]}\,dt$

29. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{3+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$

30. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2+9x^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2+9x^2}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \sqrt{x}\arctan x^{3/2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(3+2\ln x)}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1-e^{2x})^{3/2}}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-6x+10)^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int (2x-3)^2\sqrt{(2x-3)^2+4}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4-6x^2+5}}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+1}}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{(1+e^x)^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int \tan^3\theta\,d\theta$

En los ejercicios 43 a 50, usar la integración por tablas para evaluar la integral.

43. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int_1^3 x^2\ln x\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}x\,dx$

47. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

48. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{(3x-5)^2}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^3\cos t\,dt$

50. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3+x^2}\,dx$

En los ejercicios 51 a 56, verificar la fórmula de integración.

51. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{(2n+1)b}\left(u^n\sqrt{a+bu} - na\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}}\,du\right)$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

54. $\displaystyle\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen}u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen}u\,du$

55. $\displaystyle\int \arctan u\,du = u\arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

56. $\int (\ln u)^n\,du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\,du$

En los ejercicios 57 a 62, usar integración simbólica en la calculadora para determinar la antiderivada que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la antiderivada resultante.

57. $\int \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1-x}}\,dx,\ \left(\frac{1}{2}, 5\right)$

58. $\int x\sqrt{x^2+2x}\,dx,\ (0, 0)$

59. $\int \frac{1}{(x^2-6x+10)^2}\,dx,\ (3, 0)$

60. $\int \frac{\sqrt{2-2x-x^2}}{x+1}\,dx,\ \left(0, \sqrt{2}\right)$

61. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\tan\theta}\,d\theta,\ \left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

62. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)}\,d\theta,\ (0, 1)$

En los ejercicios 63 a 70, encontrar o evaluar la integral.

63. $\int \frac{1}{2-3\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

64. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$

65. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}\,d\theta$

66. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3-2\cos\theta}\,d\theta$

67. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{3-2\cos\theta}\,d\theta$

68. $\int \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta$

69. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$

70. $\int \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}\,d\theta$

Área **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

71. $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}},\ y = 0,\ x = 8$

72. $y = \frac{x}{1+e^{x^2}},\ y = 0,\ x = 2$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 73 a 78, enunciar (si es posible) el método o fórmula de integración que se usaría para encontrar la antiderivada. Explicar por qué se eligió ese método o fórmula. No integrar.

73. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

74. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

75. $\int x\,e^{x^2}\,dx$

76. $\int x\,e^x\,dx$

77. $\int e^{x^2}\,dx$

78. $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}\,dx$

79. *a)* Evaluar $\int x^n \ln x\,dx$ para $n = 1, 2$ y 3. Describir cualquier modelo que se pueda observar.
b) Escribir una regla general para evaluar la integral en el apartado *a*), para un entero $n \geq 1$.

80. Describir lo que significa una fórmula de reducción. Dar un ejemplo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 81 y 82, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

81. Para usar una tabla de integrales, la integral que se está evaluando debe aparecer en la tabla.

82. Al usar una tabla de integrales, puede que se tenga que hacer la sustitución para volver a escribir la integral en la forma en que aparece en la tabla.

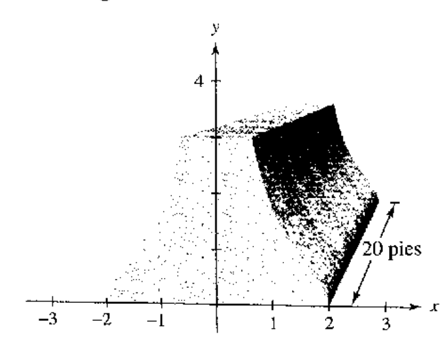
83. ***Trabajo*** Un cilindro hidráulico de una máquina industrial empuja un bloque de hierro a una distancia de x pies $(0 \leq x \leq 5)$, donde la fuerza variable requerida es $F(x) = 2\,000xe^{-x}$ libras. Encontrar el trabajo realizado al empujar el bloque 5 pies.

84. ***Trabajo*** Repetir el ejercicio 83, usando una fuerza $F(x) = \frac{500x}{\sqrt{26-x^2}}$ libras.

85. ***Diseño arquitectónico*** La sección transversal de una viga de concreto para un edificio está acotada por las gráficas de las ecuaciones

$$x = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}},\ x = \frac{-2}{\sqrt{1+y^2}},\ y = 0 \ \text{ y } \ y = 3$$

donde x y y son medidos en pies. La longitud de la viga es de 20 pies (ver la figura). *a*) Encontrar el volumen V y el peso W de la viga. Asumir que el concreto pesa 148 libras por pie cúbico. *b*) Entonces encontrar el centroide de una sección transversal de la viga.



86. ***Población*** Una población está creciendo de acuerdo con el modelo logístico $N = \frac{5\,000}{1+e^{4.8-1.9t}}$ donde t es el tiempo en días. Encontrar la población media en el intervalo $[0, 2]$.

En los ejercicios 87 y 88, usar una calculadora para *a*) resolver la ecuación integral para la constante *k*, y *b*) hacer la gráfica de la región cuya área está dada por la integral.

87. $\int_0^4 \frac{k}{2+3x}\,dx = 10$

88. $\int_0^k 6x^2 e^{-x/2}\,dx = 50$

Preparación del examen Putnam

89. Evaluar $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$.

Sección 8.7 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

- **Reconocer los límites que producen las formas indeterminadas.**
- **Aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar un límite.**

Formas indeterminadas

Recordar de los capítulos 1 y 3 que las formas 0/0 y ∞/∞ son llamadas *indeterminadas* porque no garantizan que un límite existe, ni indican lo que el límite es, si existe. Cuando se encontró una de estas formas indeterminadas al principio del texto, se intentó volver a escribir la expresión usando varias técnicas algebraicas.

Forma indeterminada	*Límite*	*Técnica algebraica*
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-2}{x+1} = \lim_{x\to -1} 2(x-1) = -4$	Dividir numerador y denominador por $(x+1)$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-(1/x^2)}{2+(1/x^2)} = \frac{3}{2}$	Dividir numerador y denominador por x^2

Ocasionalmente, se pueden desarrollar estas técnicas algebraicas para encontrar los límites de las funciones trascendentes. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$$

produce la forma indeterminada 0/0. Factorizando y dividiendo se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} (e^x+1) = 2.$$

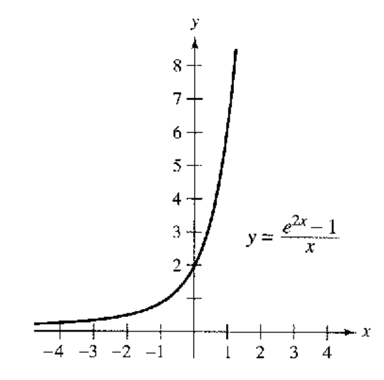
Sin embargo, no todas las formas indeterminadas pueden ser evaluadas por la manipulación algebraica. Esto a menudo es verdad cuando funciones algebraicas y trascendentes están mezcladas. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$

produce la forma indeterminada 0/0. Volviendo a escribir la expresión para obtener

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

simplemente produce otra forma indeterminada, $\infty - \infty$. Obviamente, se podría usar la tecnología para estimar el límite, como se muestra en la tabla y en la figura 8.14. De la tabla y la gráfica, el límite parece ser 2. (Este límite se verificará en el ejemplo 1.)



El límite cuando x tiende a 0 parece ser 2
Figura 8.14

x	−1	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1	1
$\frac{e^{2x}-1}{x}$	0.865	1.813	1.980	1.998	?	2.002	2.020	2.214	6.389

GUILLAUME L'HÔPITAL (1661-1704)
La regla L'Hôpital debe su nombre al matemático francés Guillaume Francois Antoine de L'Hôpital quien escribió el primer libro sobre cálculo diferencial (en 1696), en el que aparece la citada regla. Se ha descubierto recientemente que tanto la regla como su demostración estaban contenidos en una carta de John Bernoulli a L'Hôpital. "... Reconozco que debo mucho a las mentes brillantes de los hermanos Bernoulli... He hecho libre uso de sus hallazgos...", escribió L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital

Para encontrar el límite ilustrado en la figura 8.14, se puede usar el teorema llamado la **regla de L'Hôpital**. Este teorema establece que bajo ciertas condiciones el límite del cociente $f(x)/g(x)$ es determinado por el límite del cociente de las derivadas

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Para demostrar este teorema, se puede usar un resultado más general llamado **teorema general del valor medio**.

TEOREMA 8.3 Teorema general del valor medio

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) y continuo en $[a, b]$ tal que $g'(x) \neq 0$ para cualquier x en (a, b), entonces allí existe un punto c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

NOTA Para ver por qué éste se llama teorema general del valor medio, considerar el caso especial en que $g(x) = x$. Para este caso, se obtiene el teorema del valor medio "estándar" como se presenta en la sección 3.2.

El teorema general del valor medio y la regla de L'Hôpital se demuestran en el apéndice A.

TEOREMA 8.4 La regla de L'Hôpital

Sea f y g funciones que son derivables en un intervalo abierto (a, b) conteniendo c, excepto posiblemente el propio c. Asumir que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente el propio c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada 0/0, entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite en la derecha existe (o es infinito). Este resultado también aplica si el límite de $f(x)/g(x)$ como x tiende a c produce cualquiera de la forma indeterminada ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$.

NOTA Hay quienes en ocasiones usan incorrectamente la regla de L'Hôpital aplicando la regla del cociente a $f(x)/g(x)$. Asegurarse de que la regla involucra $f'(x)/g'(x)$, no la derivada de $f(x)/g(x)$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para reforzar la comprensión de la necesidad de la restricción que $g'(x)$ sea no cero para todo x en (a, b), excepto posiblemente c, ver el artículo "Counterexamples to L'Hôpital's Rule", por R.P. Boas, en *The American Mathematical Monthly*.

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales. Por ejemplo, si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c por la derecha produce la forma indeterminada 0/0, entonces,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite existe (o es infinito).

TECNOLOGÍA *Métodos numéricos y gráficos* Usar un método numérico o gráfico para aproximar cada límite.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{2x}-1}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{4^{2x}-1}{x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{5^{2x}-1}{x}$

¿Qué patrón se observa? ¿Presenta una ventaja un método analítico para estos límites? En ese caso, explicar el razonamiento.

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evaluar $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

Solución Porque la sustitución directa resulta en la forma indeterminada

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0} (e^{2x}-1) = 0 \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \end{cases}$$

se puede aplicar la regla de L'Hôpital como se muestra abajo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^{2x}-1]}{\frac{d}{dx}[x]} \qquad \text{Aplicar la regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} \qquad \text{Derivar numerador y denominador.}$$

$$= 2 \qquad \text{Evaluar el límite.}$$

NOTA Al escribir la cadena de ecuaciones en el ejemplo 1, no se sabe que el primer límite es igual al segundo hasta que se haya demostrado que el segundo límite existe. En otras palabras, si el segundo límite no hubiera existido, no habría sido permisible aplicar la regla de L'Hôpital.

Otra forma de establecer la regla de L'Hôpital si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a ∞ (o $-\infty$) produce la forma indeterminada 0/0 u ∞/∞, entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite de la derecha existe.

EJEMPLO 2 Forma indeterminada ∞/∞

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Solución Por sustitución directa llegamos a una forma indeterminada ∞/∞, así que se puede aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x]}{\frac{d}{dx}[x]} \qquad \text{Aplicar la regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \qquad \text{Derivar numerador y denominador.}$$

$$= 0. \qquad \text{Evaluar el límite.}$$

NOTA Intentar representar gráficamente $y_1 = \ln x$ y $y_2 = x$ en la misma pantalla. ¿Qué función crece más rápido cuando x tiende a ∞? ¿Cómo se relaciona esta observación con el ejemplo 2?

En ocasiones es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez para quitar una forma indeterminada, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez

Evaluar $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}}$.

Solución Porque los resultados de la sustitución directa en la forma indeterminada ∞/∞, se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x^2]}{\frac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

Este límite da la forma indeterminada $(-\infty)/(-\infty)$ para poder aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo y obtener

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{d}{dx}[2x]}{\frac{d}{dx}[-e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Además de las formas 0/0 y ∞/∞, hay otras formas indeterminadas como $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 y $\infty - \infty$. Por ejemplo, considerar los cuatro límites siguientes que llevan a la forma indeterminada $0 \cdot \infty$.

$$\underbrace{\lim_{x\to0}\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{El límite es 1}},\quad \underbrace{\lim_{x\to0}\,(x)\left(\frac{2}{x}\right)}_{\text{El límite es 2}},\quad \underbrace{\lim_{x\to\infty}\,(x)\left(\frac{1}{e^x}\right)}_{\text{El límite es 0}},\quad \underbrace{\lim_{x\to\infty}\,(e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{El límite es }\infty}$$

Puesto que cada límite es diferente, está claro que la forma $0 \cdot \infty$ es indeterminada en el sentido que no determina el valor del límite (o incluso la existencia) del límite. Los ejemplos siguientes indican los métodos para evaluar estas formas. Básicamente, se intenta convertir cada una de estas formas a 0/0 u ∞/∞ para que la regla de L'Hôpital pueda aplicarse.

EJEMPLO 4 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$.

Solución Como la sustitución directa produce la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, intentar reescribir el límite para adaptar a la forma 0/0 o ∞/∞. En este caso, volver a escribir el límite para adaptar a la segunda forma.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Por consiguiente, la regla de L'Hôpital permite concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}\,e^x} = 0.$$

Si la estrategia de reducir un límite a los tipos 0/0 o ∞/∞ no parece funcionar, intentar otro tipo. Así, en el ejemplo 4 se puede escribir el límite como

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}}$$

que da la forma indeterminada 0/0. De hecho, aplicando la regla de L'Hôpital a este límite se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-1/(2x^{3/2})}$$

que también da la forma indeterminada 0/0.

Las formas indeterminadas 1^∞, ∞^0 y 0^0 provienen de los límites de funciones que tienen bases variables y exponentes variables. Cuando se vio este tipo de función previamente, se usó la derivación logarítmica para encontrar la derivada. Puede usarse un procedimiento similar al tomar los límites, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Forma indeterminada 1^∞

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Solución Como la sustitución directa da la forma indeterminada 1^∞, proceder como sigue. Para empezar, asumir que el límite existe y es igual a y.

$$y = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Tomando logaritmos naturales en esa ecuación se obtiene

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right].$$

Porque la función logarítmica natural es continua, se puede escribir

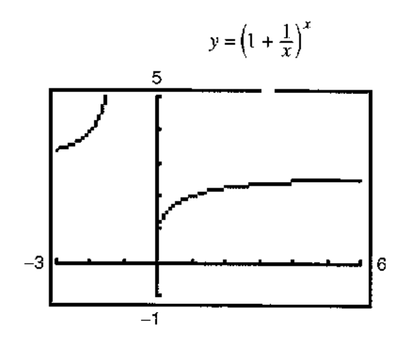
$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \qquad \text{Forma indeterminada } \infty \cdot 0.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x}\right) \qquad \text{Forma indeterminada } 0/0.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(-1/x^2)\{1/[1 + (1/x)]\}}{-1/x^2}\right) \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + (1/x)}$$

$$= 1.$$



El límite de $[1 + (1/x)]^x$ cuando x tiende a infinito es e
Figura 8.15

Ahora, porque se ha demostrado que $\ln y = 1$, concluir que $y = e$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Utilizar una calculadora para confirmar este resultado, como se muestra en la figura 8.15.

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales, como se demuestra en los ejemplos 6 y 7.

EJEMPLO 6 Forma indeterminada 0^0

Encontrar $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x$.

Solución Porque la sustitución directa produce la forma indeterminada 0^0, proceder como se muestra abajo. Para empezar, asumir que el límite existe y es igual a y.

$$y = \lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x \qquad \text{Forma indeterminada } 0^0.$$

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x\right] \qquad \text{Tomar un logaritmo natural de cada lado.}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [\ln(\text{sen } x)^x] \qquad \text{Continuidad.}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [x \ln(\text{sen } x)] \qquad \text{Forma indeterminada } 0 \cdot (-\infty).$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } x)}{1/x} \qquad \text{Forma indeterminada } -\infty/\infty.$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} \qquad \text{Forma indeterminada } 0/0.$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

Ahora, porque $\ln y = 0$, concluir que $y = e^0 = 1$, y se sigue que

$$\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x = 1.$$

TECNOLOGÍA Al evaluar límites complicados como en el ejemplo 6, es útil verificar la racionalidad de la solución con una calculadora, numérica o gráficamente. Por ejemplo, los cálculos en la tabla siguiente y la gráfica en la figura 8.16 son consistentes con la conclusión que $(\text{sen } x)^x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0 por la derecha.

x	1.0	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$(\text{sen } x)^x$	0.8415	0.7942	0.9550	0.9931	0.9991	0.9999

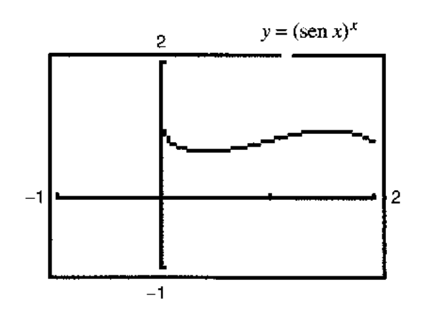
Usar una calculadora para estimar los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)^x$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^x.$$

Entonces verificar los resultados analíticamente.



El límite de $(\text{sen } x)^x$ es 1 cuando x tiende a 0 por la derecha
Figura 8.16

AYUDA DE ESTUDIO En cada uno de los ejemplos presentados en esta sección, la regla de L'Hôpital se usa para encontrar un límite que existe. También puede usarse para concluir que un límite es infinito. Por ejemplo, intentar con la regla de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

EJEMPLO 7 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Solución Porque la sustitución directa da la forma indeterminada $\infty - \infty$, intentar volver a escribir la expresión para producir una forma a la que se pueda aplicar la regla de L'Hôpital. En este caso, se pueden combinar las dos fracciones para obtener

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right].$$

Ahora, porque la sustitución directa produce la forma indeterminada 0/0, aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{d}{dx}[x-1-\ln x]}{\dfrac{d}{dx}[(x-1)\ln x]} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1-(1/x)}{(x-1)(1/x)+\ln x}\right] \\
&= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\right).
\end{aligned}$$

Este límite también da la forma indeterminada 0/0, para poder aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo para obtener

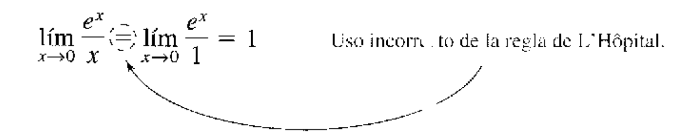
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{1+x(1/x)+\ln x}\right] \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Las formas $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞ y ∞^0 se han identificado como *indeterminadas*. Hay formas similares que deben reconocerse como "determinadas".

$\infty + \infty \to \infty$	El límite es infinito positivo.
$-\infty - \infty \to -\infty$	El límite es infinito negativo.
$0^\infty \to 0$	El límite es cero.
$0^{-\infty} \to \infty$	El límite es infinito positivo.

(Se pide verificar dos de estas afirmaciones en los ejercicios 106 y 107.)

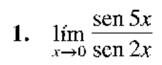
Como comentario final, recordar que la regla de L'Hôpital sólo puede aplicarse a cocientes que llevan a las formas indeterminadas 0/0 y ∞/∞. Por ejemplo, la aplicación siguiente de la regla de L'Hôpital es *incorrecta*.



La razón de que esta aplicación es incorrecta es que, aunque el límite del denominador es 0, el límite del numerador es 1, lo cual no satisface las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

Ejercicios de la sección 8.7

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 a 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Usar una calculadora para hacer la gráfica de la función y apoyar el resultado.**



1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - e^x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 e^{-x/100}$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$						

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$						

En los ejercicios 5 a 10, evaluar el límite *a*) usando las técnicas de los capítulos 1 y 3 y *b*) usando la regla de L'Hôpital.

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(x-3)}{x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{4x^2 + x}$

En los ejercicios 11 a 36, evaluar el límite, usando la regla de L'Hôpital si es necesario. (En el ejercicio 18, *n* es un entero positivo.)

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-x^2} - 2}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1-x)}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{x^2 - 1}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1+x)}{x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1+x)}{x^n}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan x - (\pi/4)}{x-1}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2 + 2x + 3}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x-1}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x+2}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x/2}}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^4}{x^3}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x}$

En los ejercicios 37 a 54, *a*) describir el tipo de forma indeterminada (si hay) que se obtiene por sustitución directa, *b*) evaluar el límite, usando la regla de L'Hôpital si es necesario, *c*) usar una calculadora para hacer la gráfica de la función y verificar el resultado en el apartado *b*).

37. $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln x$

38. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \cot x$

39. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$

40. $\lim\limits_{x\to\infty} x \tan\dfrac{1}{x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + x)^{2/x}$

43. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

44. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$

46. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{1/x}$

47. $\lim\limits_{x\to 0^+} [3(x)^{x/2}]$

48. $\lim\limits_{x\to 4^+} [3(x-4)]^{x-4}$

49. $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$

50. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]^x$

51. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{8}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x-2}\right)$

52. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}\right)$

53. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

54. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{10}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$

En los ejercicios 55 a 58, usar una calculadora para *a*) hacer la gráfica de la función y *b*) encontrar el límite requerido (si existe).

55. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\ln(2x-5)}$

56. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 2} - x\right)$

58. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}}$

Desarrollo de conceptos

59. Listar seis formas indeterminadas diferentes.

60. Establecer la regla de L'Hôpital.

61. Encontrar las funciones derivables f y g que satisfacen la condición especificada tal que

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 5} g(x) = 0.$$

Explicar cómo se obtuvieron las respuestas. (*Nota*: hay muchas respuestas correctas.)

a) $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 10$ *b)* $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

c) $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

62. Encontrar las funciones derivables f y g tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 25.$$

Explicar cómo se obtuvieron las respuestas. (*Nota*: hay muchas respuestas correctas.)

63. ***Estimación numérica*** Completar la tabla para mostrar que x eventualmente "domina" a $(\ln x)^4$.

x	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\frac{(\ln x)^4}{x}$						

64. ***Estimación numérica*** Completar la tabla para mostrar que e^x eventualmente "domina" a x^5.

x	1	5	10	20	30	40	50	100
$\frac{e^x}{x^5}$								

Comparación de funciones **En los ejercicios 65 a 70, usar la regla de L'Hôpital para determinar las proporciones comparativas del incremento de las funciones**

$$f(x) = x^m,\ g(x) = e^{nx},\ \text{y } h(x) = (\ln x)^n$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y $x \to \infty$.

65. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{5x}}$

66. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

67. $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

68. $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$

69. $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m}$

70. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^{nx}}$

En los ejercicios 71 a 74, encontrar cualquier asíntota y extremo relativo que pueden existir y usar una calculadora para hacer la gráfica de la función. (*Sugerencia:* Algunos de los límites requeridos para encontrar las asíntotas se han visto en los ejercicios precedentes.)

71. $y = x^{1/x},\quad x > 0$

72. $y = x^x,\quad x > 0$

73. $y = 2xe^{-x}$

74. $y = \frac{\ln x}{x}$

Para pensar **En los ejercicios 75 a 78, la regla de L'Hôpital se usa incorrectamente. Describir el error.**

75. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to 0} 2e^x = 2$

76. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = \pi$

77. $\lim_{x\to\infty} x \cos \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(1/x)}{1/x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{[-\operatorname{sen}(1/x)](1/x^2)}{-1/x^2}$

$= 0$

78. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}}$

$= \lim_{x\to\infty}$

$= 1$

Estimación analítica **En los ejercicios 79 y 80, *a)* explicar por qué la regla de L'Hôpital no puede usarse para encontrar el límite, *b)* encontrar el límite analíticamente y *c)* usar una calculadora para hacer la gráfica de la función y aproximar el límite de la gráfica. Comparar el resultado con el del apartado *b*).**

79. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

80. $\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan x}{\sec x}$

Análisis gráfico **En los ejercicios 81 y 82, representar la gráfica de $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$. ¿Qué se nota sobre estas proporciones cuando $x \to 0$? ¿Cómo ilustra esto la regla de L'Hôpital?**

81. $f(x) = \operatorname{sen} 3x,\quad g(x) = \operatorname{sen} 4x$

82. $f(x) = e^{3x} - 1,\quad g(x) = x$

83. ***Velocidad en un medio resistente*** La velocidad v de un objeto que cae a través de un medio resistente como el aire o el agua está dada por

$$v = \frac{32}{k}\left(1 - e^{-kt} + \frac{v_0 k e^{-kt}}{32}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, t es el tiempo en segundos, y k es la resistencia constante del medio. Usar la regla de L'Hôpital para encontrar la fórmula para la velocidad de un cuerpo cayendo en un vacío haciendo v_0 y t fijos y k tendiendo a cero. (Asumir que la dirección descendente es positiva.)

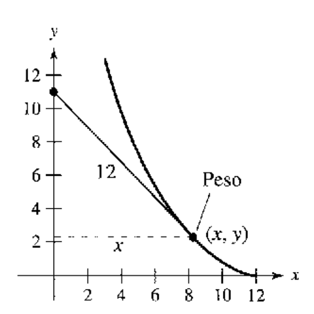
84. ***Interés compuesto*** La fórmula para la cantidad A en una cuenta de ahorro compuesto n veces por año durante t años a una tasa de interés r y un depósito inicial P está dada por

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Usar la regla de L'Hôpital para demostrar que la fórmula límite cuando el número de compuestos por año tiende a infinito está dada por $A = Pe^{rt}$.

85. ***Función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define en términos de la integral de la función dada por $f(x) = x^{n-1}e^{-x}$, $n > 0$. Mostrar que para cualquier valor fijo de n, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es cero.

86. ***Tractriz*** Una persona se mueve del origen a lo largo del eje y positivo arrastrando un peso al final de una cuerda de 12 metros (ver la figura). Inicialmente, el peso se localiza en el punto (12, 0).



a) Mostrar que la pendiente de la recta tangente de la trayectoria del peso es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x}.$$

b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar la ecuación de la trayectoria del peso. Usar una calculadora para hacer la gráfica de la trayectoria y compararla con la figura.

c) Encontrar cualquier asíntota vertical de la gráfica en el apartado *b*).

d) Cuando la persona ha alcanzado el punto (0, 12), ¿qué tanto se ha movido el peso?

En los ejercicios 87 a 90, aplicar el teorema general del valor medio a las funciones f y g en el intervalo dado. Encontrar todos los valores de c en el intervalo (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

	Funciones	*Intervalo*
87.	$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2 + 1$	$[0, 1]$
88.	$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 4$	$[1, 2]$
89.	$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
90.	$f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^3$	$[1, 4]$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

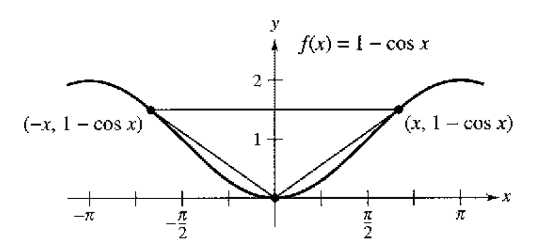
91. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2 + x + 1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x + 1}{1}\right] = 1$

92. Si $y = e^x/x^2$, entonces $y' = e^x/2x$.

93. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to\infty}[p(x)/e^x] = 0$.

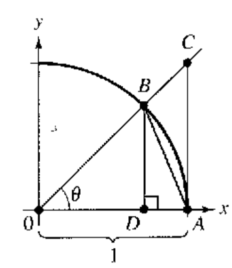
94. Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces $\lim_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = 0$.

95. ***Área*** Encontrar el límite cuando x tiende a 0, de la proporción del área del triángulo al área sombreada total en la figura.



96. En la sección 1.3, un argumento geométrico (ver la figura) fue usado para demostrar que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$



a) Escribir el área de ΔABD en términos de θ.

b) Escribir el área de la región sombreada en términos de θ.

c) Escribir la proporción R del área de ΔABD para la región sombreada.

d) Encontrar $\lim_{\theta\to 0} R$.

Funciones continuas **En los ejercicios 97 y 98, encontrar el valor de c que hace a la función continua en $x = 0$.**

97. $f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 2\operatorname{sen} 2x}{2x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$

98. $f(x) = \begin{cases} (e^x + x)^{1/x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$

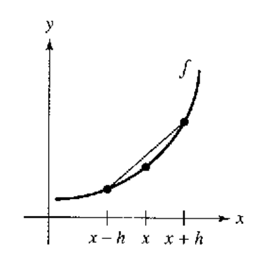
99. Encontrar los valores de a y b tal que $\lim_{x\to 0}\frac{a - \cos bx}{x^2} = 2$.

100. Mostrar que $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ para cualquier entero $n > 0$.

101. *a)* Sea $f'(x)$ continuo. Mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x).$$

b) Explicar el resultado del apartado *a)* gráficamente.



102. Sea $f''(x)$ continuo. Mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x).$$

103. Dibujar la gráfica de

$$g(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

y determinar $g'(0)$.

104. Usar una calculadora para hacer la gráfica

$$f(x)=\frac{x^k-1}{k}$$

para $k=1$, 0.1 y 0.01. Entonces evaluar el límite

$$\lim_{k\to 0^+}\frac{x^k-1}{k}.$$

105. Considerar los límites $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x\ln x)$.

a) Describir el tipo de forma indeterminada que se obtiene por la sustitución directa.
b) Evaluar el límite.
c) Usar una calculadora para verificar el resultado del apartado *b)*.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un enfoque geométrico de este ejercicio, ver el artículo "A Geometric Proof of $\lim\limits_{d\to 0^-}(-d\ln d)=0$" de John H. Mathews, en el *College Mathematics Journal.*

106. Demostrar que si $f(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=0$.

107. Demostrar que si $f(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\infty$.

108. Demostrar la generalización siguiente del teorema del valor medio. Si f es dos veces derivable en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces

$$f(b)-f(a)=f'(a)(b-a)-\int_a^b f''(t)(t-b)\,dt.$$

109. ***Formas indeterminadas*** Mostrar que las formas indeterminadas 0^0, ∞^0 y 1^∞ no siempre tienen un valor de 1 evaluando cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$
c) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{(\ln 2)/x}$

110. ***Historia del cálculo*** En 1696 el libro de texto de cálculo de L'Hôpital, ilustró su regla que usa el límite de la función

$$f(x)=\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, $a>0$. Encontrar este límite.

111. Considerar la función

$$h(x)=\frac{x+\operatorname{sen}x}{x}.$$

a) Usar una calculadora para hacer la gráfica de la función. Entonces usar el *zoom* y rasgos del *trace* para investigar $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)$.

b) Encontrar $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)$ analíticamente escribiendo

$$h(x)=\frac{x}{x}+\frac{\operatorname{sen}x}{x}.$$

c) ¿Puede usarse la regla de L'Hôpital para encontrar $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)$? Explicar el razonamiento.

Preparación del examen Putnam

112. Evaluar

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right]^{1/x}$$

donde $a>0$, $a\neq 1$.

Sección 8.8 Integrales impropias

- **Evaluar una integral impropia que tiene un límite de integración infinito.**
- **Evaluar una integral impropia que tiene una discontinuidad infinita.**

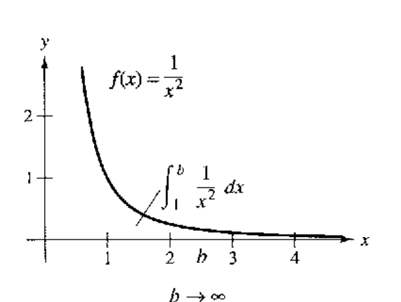
Integrales impropias con límites de integración infinitos

La definición de una integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

requiere que el intervalo $[a, b]$ sea finito. Además, el teorema fundamental del cálculo por el que se han estado evaluando las integrales definidas, requiere que f sea continuo en $[a, b]$. En esta sección se estudiará un procedimiento para evaluar integrales que normalmente no satisfacen estos requisitos porque cualquiera de los dos límites de integración son infinitos, o f tiene un número finito de discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$. Las integrales que poseen estas características son las **integrales impropias**. Notar que en una función se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en c si, por *la derecha o izquierda,*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty.$$



La región no acotada tiene un área de 1
Figura 8.17

Para conseguir una idea de cómo evaluar una integral impropia, considerar la integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

la cual puede interpretarse como el área de la región sombreada mostrada en la figura 8.17. Tomando el límite como $b \to \infty$ produce

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{dx}{x^2}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Esta integral impropia se interpreta como el área de la región *no acotada* entre la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ y el eje x (a la derecha de $x = 1$).

Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos

1. Si f es continuo en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real (ver ejercicio 110).

En los primeros dos casos, la integral impropia **converge** si el límite existe, en caso contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia a la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias a la derecha divergen.

EJEMPLO 1 Una integral impropia divergente

Evaluar $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Solución

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} \qquad \text{Tomar el límite como } b \to \infty.$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^b \qquad \text{Aplicar la regla log.}$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0) \qquad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$

$$= \infty \qquad \text{Evaluar el límite.}$$

Ver figura 8.18

Esta región no acotada tiene un área infinita
Figura 8.18

NOTA Intentar comparar las regiones mostradas en las figuras 8.17 y 8.18. Ellas parecen similares, sin embargo, la región en la figura 8.17 tiene un área finita de 1 y la región en la figura 8.18 tiene un área infinita.

EJEMPLO 2 Integrales impropias convergentes

Evaluar cada integral impropia.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

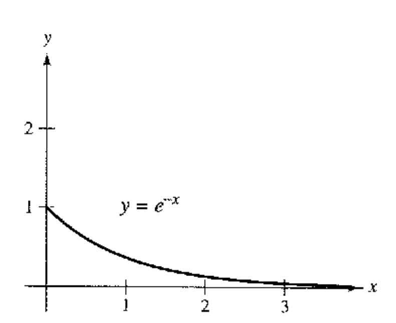
Solución

a)
$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1)$$
$$= 1$$

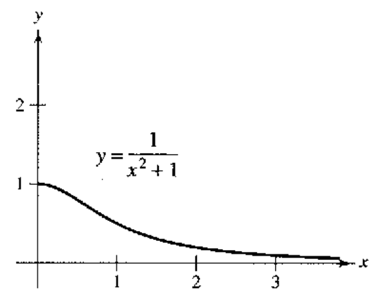
Ver figura 8.19

b)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \arctan b$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

Ver figura 8.20



El área de la región no acotada es 1
Figura 8.19



El área de la región no acotada es $\pi/2$
Figura 8.20

En el ejemplo siguiente, notar cómo la regla de L'Hôpital puede usarse para evaluar una integral impropia.

EJEMPLO 3 Usando la regla de L'Hôpital con una integral impropia

Evaluar $\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx$.

Solución Usar la integración por partes, con $dv = e^{-x}\,dx$ y $u = (1-x)$.

$$\begin{aligned}\int (1-x)e^{-x}\,dx &= -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x}\,dx\\ &= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C\\ &= xe^{-x} + C\end{aligned}$$

Ahora, aplicar la definición de una integral impropia.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\Big[xe^{-x}\Big]_1^b\\ &= \left(\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b}\right) - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

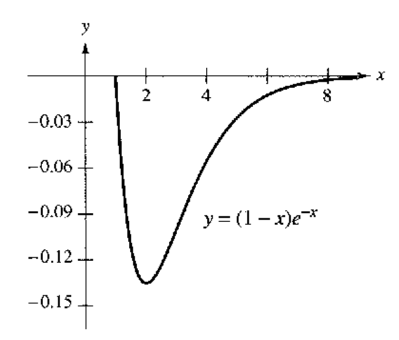
Por último, usando la regla de L'Hôpital en el límite derecho produce

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = 0$$

concluir que

$$\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e}.$$

Ver figura 8.21.



El área de la región no acotada es $|-1/e|$
Figura 8.21

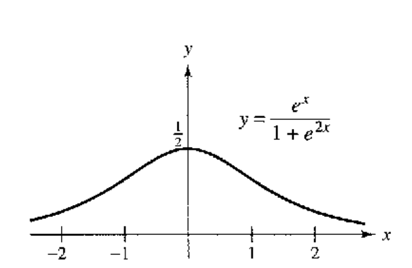
EJEMPLO 4 Límites superior e inferior de integración infinitos

Evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

Solución Notar que el integrando es continuo en $(-\infty, \infty)$. Para evaluar la integral, se puede descomponer en dos partes, eligiendo $c = 0$ como un valor conveniente.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\\ &= \lim_{b\to-\infty}\Big[\arctan e^x\Big]_b^0 + \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan e^x\Big]_0^b\\ &= \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan e^b\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\arctan e^b - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ver figura 8.22.

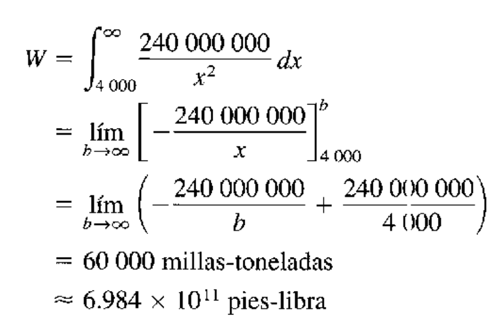


El área de la región no acotada es $\pi/2$
Figura 8.22

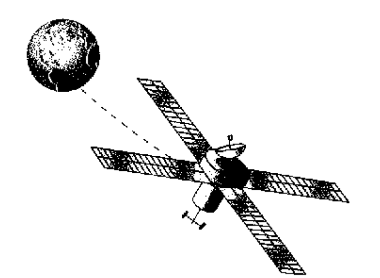
EJEMPLO 5 Envío de un módulo espacial a órbita

En el ejemplo 3 de la sección 7.5, se requerían 10 000 toneladas por milla de trabajo para propulsar un módulo espacial de 15 toneladas métricas a una altura de 800 millas sobre la Tierra. ¿Cuánto trabajo se requiere para propulsar el módulo a una distancia infinita fuera de la superficie de la Tierra?

Solución Al principio podría pensarse que se requeriría una cantidad infinita de trabajo. Pero si éste fuera el caso, sería imposible enviar los cohetes al espacio exterior. Porque esto se ha hecho, el trabajo requerido debe ser finito. Se puede determinar el trabajo de la manera siguiente. Usando la integral del ejemplo 3, sección 7.5, reemplazar el límite superior de 4 800 millas por ∞ y escribir



$$
\begin{aligned}
W &= \int_{4\,000}^{\infty} \frac{240\,000\,000}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{240\,000\,000}{x}\right]_{4\,000}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{240\,000\,000}{b} + \frac{240\,000\,000}{4\,000}\right) \\
&= 60\,000 \text{ millas-toneladas} \\
&\approx 6.984 \times 10^{11} \text{ pies-libra}
\end{aligned}
$$



El trabajo requerido para mover un módulo espacial a una distancia no acotada fuera de la Tierra es aproximadamente $6.984 = 10^{11}$ libra/pie
Figura 8.23

Ver figura 8.23.

Integrales impropias con discontinuidades infinitas

El segundo tipo básico de integral impropia es uno que tiene una discontinuidad infinita en *o entre* los límites de integración.

Definición de integrales impropias con discontinuidades infinitas

1. Si f es continuo en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

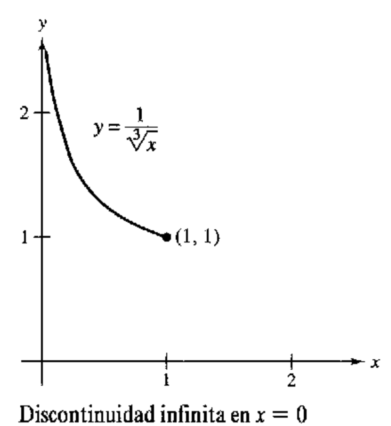
2. Si f es continuo en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Si f es continuo en el intervalo $[a, b]$, excepto para algún c en (a, b) en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En los primeros dos casos, la integral impropia **converge** si el límite existe, de otra forma, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia en la izquierda diverge si alguna de las integrales impropias a la derecha diverge.



Discontinuidad infinita en $x = 0$
Figura 8.24

EJEMPLO 6 Una integral impropia con una discontinuidad infinita

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Solución El integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, como se muestra en la figura 8.24. Se puede evaluar esta integral como se muestra abajo.

$$\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_b^1$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\frac{3}{2}(1 - b^{2/3})$$
$$= \frac{3}{2}$$

EJEMPLO 7 Una integral impropia divergente

Evaluar $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$.

Solución Porque el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, se puede escribir

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to 0^+}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_b^2$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2b^2}\right)$$
$$= \infty.$$

Así pues, se puede concluir que la integral impropia diverge.

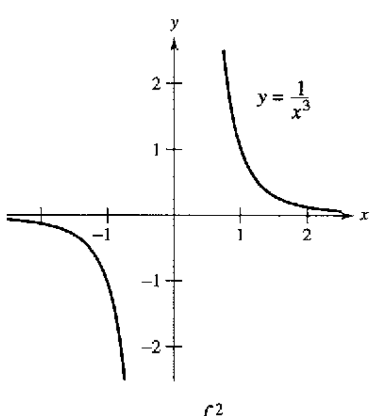
EJEMPLO 8 Una integral impropia con una discontinuidad interior

Evaluar $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$.

Solución Esta integral es impropia porque el integrando tiene una discontinuidad infinita en el punto interior $x = 0$, como se muestra en la figura 8.25. Así, se puede escribir

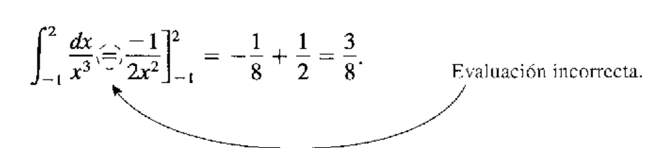
$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}.$$

Del ejemplo 7 se sabe que la segunda integral diverge. Así, la integral impropia original también diverge.



La integral impropia $\displaystyle\int_{-1}^2 1/x^3\,dx$ diverge
Figura 8.25

NOTA Cuando se investiga si una integral es impropia o no, hay que averiguar si tiene discontinuidad infinita en un punto terminal o en un punto interior del intervalo de integración. Por ejemplo, si no se hubiera reconocido que la integral en el ejemplo 8 era impropia, se habría obtenido el resultado *incorrecto*.



$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} \neq \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

La integral en el próximo ejemplo es impropia por dos razones. Un límite de integración es infinito, y el integrando tiene una discontinuidad infinita en el límite exterior de integración.

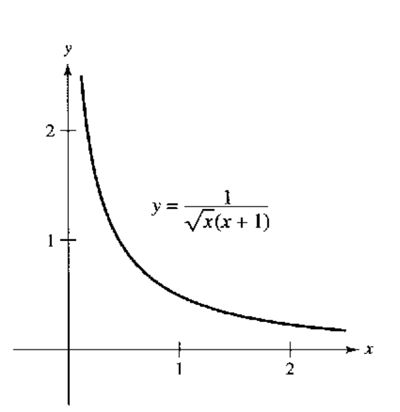
EJEMPLO 9 Una integral doblemente impropia

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Solución Para evaluar esta integral, elegir un punto conveniente (por ejemplo, $x = 1$) y escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{b\to 0^+} \Big[2 \arctan \sqrt{x} \Big]_b^1 + \lim_{c\to\infty} \Big[2 \arctan \sqrt{x} \Big]_1^c \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Ver figura 8.26.



El área de la región infinita es π.
Figura 8.26

EJEMPLO 10 Una aplicación que involucra longitud de arco

Usar la fórmula de la longitud de arco para demostrar que la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 2π.

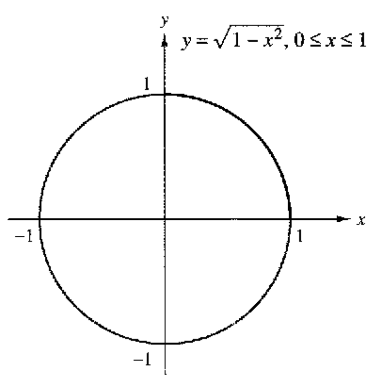
Solución Para simplificar el trabajo, considerar el cuarto de círculo dado por $y = \sqrt{1 - x^2}$, donde $0 \le x \le 1$. La función y es derivable para cualquier x en este intervalo, excepto $x = 1$. Por consiguiente, la longitud de arco del cuarto de círculo está dada por la integral impropia

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Esta integral es impropia porque tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$. Así, se puede escribir

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\
&= \lim_{b\to 1^-} \Big[\operatorname{arcsen} x \Big]_0^b \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por último, multiplicando por 4, concluir que la circunferencia del círculo es $4s = 2\pi$, como se muestra en la figura 8.27.



La circunferencia del círculo es 2π
Figura 8.27

Esta sección concluye con un teorema útil que describe la convergencia o divergencia de un tipo común de integral impropia. La prueba de este teorema se deja como ejercicio (ver ejercicio 49).

Teorema 8.5 Un tipo especial de integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 11 Aplicación a un sólido de revolución

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para la investigación extensa de sólidos que tienen volúmenes finitos y áreas de superficie infinitas, ver el artículo "Supersolids: Solids Having Finite Volume and Infinite Surfaces", por William P. Love, en Mathematics Teacher.

El sólido formado al girar (alrededor del eje x) la región no acotada que queda entre la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x ($x \geq 1$) se llama la **trompeta de Gabriel**. (Ver figura 8.28.) Mostrar que este sólido tiene un volumen finito y un área de superficie infinita.

Solución Usando el método de los discos y el teorema 8.5, determinar el volumen para ser

$$V = \pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \qquad \text{Teorema 8.5, } p = 2 > 1.$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2-1}\right) = \pi.$$

El área de la superficie está dada por

$$S = 2\pi\int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx.$$

Porque

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$$

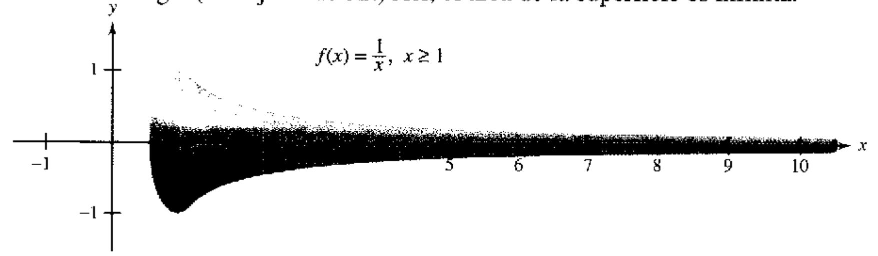
en el intervalo $[1, \infty)$, y la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$$

diverge, se puede concluir que la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

también diverge. (Ver ejercicio 52.) Así, el área de la superficie es infinita.



La trompeta de Gabriel tiene un volumen finito y un área de superficie infinita
Figura 8.28

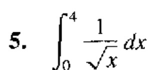
PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender sobre otra función que tiene un volumen finito y un área de superficie infinita, ver el artículo "Gabriel's Wedding Cake", por Julian F. Fleron, en *The College Mathematics Journal*.

Ejercicios de la sección 8.8

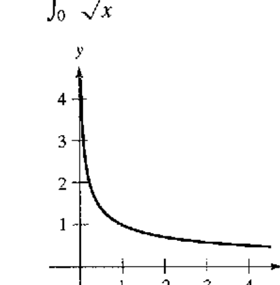
En los ejercicios 1 a 4, decidir si la integral es impropia. Explicar el razonamiento.

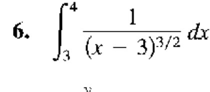
1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{3x-2}$
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^\infty \ln(x^2)\,dx$

En los ejercicios 5 a 10, explicar por qué la integral es impropia y determinar si es divergente o convergente. Evaluar las que sean convergentes.

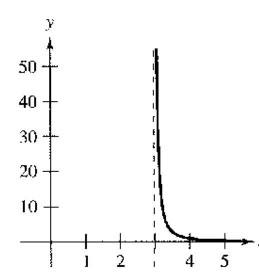


5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

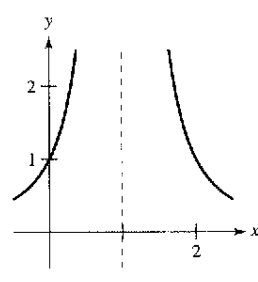


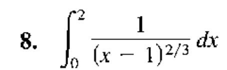


6. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}}\,dx$

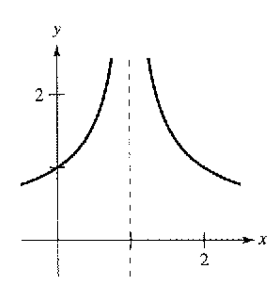


7. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

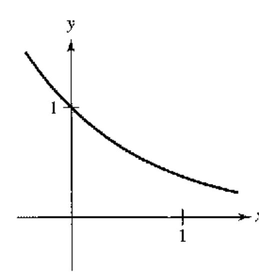




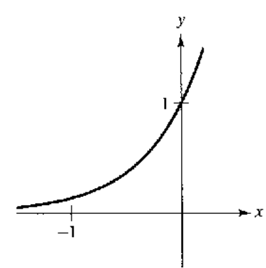
8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$



9. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

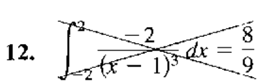


10. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$



Redacción **En los ejercicios 11 a 14, explicar por qué la evaluación de la integral es incorrecta. Usar la integración en una calculadora para intentar evaluar la integral. Determinar si la calculadora da la respuesta correcta.**

11. ~~$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -2$~~
12. ~~$\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{-2}{(x-1)^3}\,dx = \frac{8}{9}$~~



13. ~~$\displaystyle\int_0^\infty e^x\,dx = 0$~~
14. ~~$\displaystyle\int_0^\pi \sec x\,dx = 0$~~

En los ejercicios 15 a 32, determinar si la integral impropia es divergente o convergente. Evaluar la integral si es convergente.

15. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$
16. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5}{x^3}\,dx$
17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
18. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$
19. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx$
20. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x/2}\,dx$
21. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$
22. $\displaystyle\int_0^\infty (x-1)e^{-x}\,dx$
23. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$
24. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx, \quad a>0$
25. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$
26. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
27. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2}{4+x^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$
29. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$
30. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
31. $\displaystyle\int_0^\infty \cos \pi x\,dx$
32. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

En los ejercicios 33 a 48, determinar si la integral impropia es divergente o convergente. Evaluar la integral si converge, y verificar los resultados con los obtenidos usando una caluladora para hacer la gráfica.

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$
34. $\displaystyle\int_0^4 \frac{8}{x}\,dx$
35. $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx$
36. $\displaystyle\int_0^6 \frac{4}{\sqrt{6-x}}\,dx$
37. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$
38. $\displaystyle\int_0^e \ln x^2\,dx$
39. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$
40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta$
41. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$
42. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
43. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
44. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}\,dx$
45. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$
46. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{(x-2)^{8/3}}\,dx$
47. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{x}(x+6)}\,dx$
48. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$

En los ejercicios 49 y 50, determinar todos los valores de p para los que la integral impropia es convergente.

49. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$

51. Usar la inducción matemática para verificar que la integral siguiente converge para todo entero positivo n.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

52. Dadas las funciones continuas f y g tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ en el intervalo $[a, \infty)$, demostrar lo siguiente.

a) Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

b) Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge.

En los ejercicios 53 a 62, usar los resultados de los ejercicios 49 a 52 para determinar si la integral impropia converge o diverge.

53. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

55. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx$

57. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+5}\,dx$

58. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

59. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}\,dx$

60. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

62. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\,dx$

Desarrollo de conceptos

63. Describir los diferentes tipos de integrales impropias.

64. Definir las condiciones de *convergencia* o *divergencia* al trabajar con integrales impropias.

65. Explicar por qué $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \neq 0$.

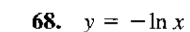
66. Considerar la integral

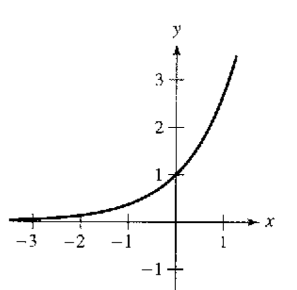
$$\int_0^{3} \frac{10}{x^2-2x}\,dx.$$

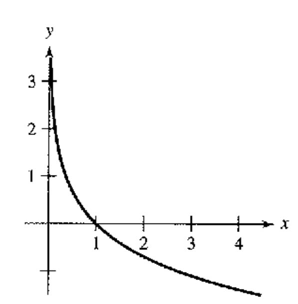
Para determinar la convergencia o divergencia de la integral, ¿cuántas integrales impropias deben analizarse? ¿Qué debe ser verdadero en cada integral para que la integral dada converja?

Área **En los ejercicios 67 a 70, encontrar el área no acotada de la región sombreada.**

67. $y = e^x, \quad -\infty < x \le 1$ **68.** $y = -\ln x$

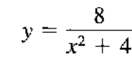


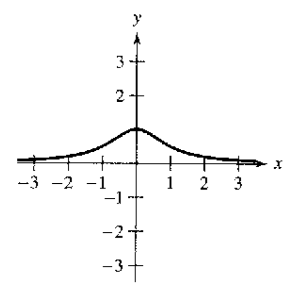


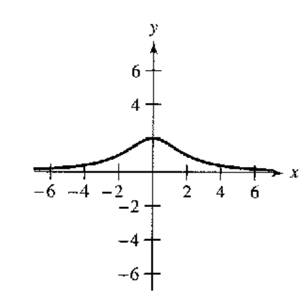


69. La bruja de Agnesi: **70.** La bruja de Agnesi:

$$y = \frac{1}{x^2+1} \qquad y = \frac{8}{x^2+4}$$







Área y volumen **En los ejercicios 71 y 72, considerar la región que satisface las desigualdades. *a*) Encontrar el área de la región. *b*) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x. *c*) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.**

71. $y \le e^{-x},\ y \ge 0,\ x \ge 0$ **72.** $y \le \frac{1}{x^2},\ y \ge 0,\ x \ge 1$

73. ***Longitud de arco*** Dibujar la gráfica del hipocicloide de cuatro cúspides

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$$

y encontrar su perímetro.

74. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

sobre el intervalo $[0, 4]$.

75. ***Área de una superficie*** La región acotada por

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

se gira alrededor del eje y para formar un toro. Encontrar el área de la superficie del toro.

76. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$ alrededor del eje x.

Propulsión **En los ejercicios 77 y 78, usar el peso del cohete para contestar cada pregunta. (Usar 4 000 millas como el radio de la Tierra y no considerar el efecto de la resistencia al aire.)**

a) **¿Cuánto trabajo se requiere para propulsar el cohete a una distancia infinita fuera de la superficie de la Tierra?**

b) **¿Qué tan lejos ha viajado el cohete cuando la mitad del trabajo total ha ocurrido?**

77. Cohete de 5 toneladas **78.** Cohete de 10 toneladas

Probabilidad **Una función no negativa f se llama *función de densidad de probabilidad* si**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1.$$

La probabilidad de que x quede entre a y b está dada por

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

El valor esperado de x está dado por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt.$$

En los ejercicios 79 y 80, *a*) mostrar que la función no negativa es una función de densidad de probabilidad, *b*) encontrar $P(0 \le x \le 4)$ y *c*) encontrar $E(x)$.

79. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{7}e^{-t/7}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

80. $f(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{-2t/5}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Costo capitalizado **En los ejercicios 81 y 82, encontrar el costo capitalizado C de un recurso *a*) para $n = 5$ años, *b*) para $n = 10$ años y *c*) para siempre. El costo capitalizado está dado por**

$$C = C_0 + \int_0^n c(t)e^{-rt}\,dt$$

donde C_0 es la inversión original, t es el tiempo en años, r es el interés compuesto continuo del interés anual y $c(t)$ es el costo anual de mantenimiento.

81. $C_0 = \$650\,000$
$c(t) = \$25\,000$
$r = 0.06$

82. $C_0 = \$650\,000$
$c(t) = \$25\,000(1 + 0.08t)$
$r = 0.06$

83. ***Teoría electromagnética*** El potencial magnético P en un punto en el eje de un circuito circular está dado por

$$P = \frac{2\pi NIr}{k}\int_c^{\infty} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{3/2}}\,dx$$

donde N, I, r, k y c son las constantes. Encontrar P.

84. ***Fuerza gravitacional*** Una varilla uniforme "semi-infinita" ocupa el eje x no negativo. La varilla tiene una densidad lineal δ la cual mide un segmento de longitud dx que tiene una masa de $\delta\,dx$. Una partícula de masa m se localiza en el punto $(-a, 0)$. La fuerza gravitatoria F que la varilla ejerce en la masa está dada por

$$F = \int_0^{\infty} \frac{GM\delta}{(a + x)^2}\,dx$$

donde G es la constante gravitatoria. Encontrar F.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 85 a 88, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falso.**

85. Si f es continuo en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

86. Si f es continuo en $[0, \infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) \ne 0$.

87. Si f' es continuo en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces, $\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$.

88. Si la gráfica de f es simétrica con respecto al origen o al eje y, entonces $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

89. ***Redacción***

a) Las integrales impropias

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

divergen y convergen, respectivamente. Describir las diferencias esenciales entre los integrandos que son causa del distinto comportamiento.

b) Dibujar una gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x/x$ sobre el intervalo $(1, \infty)$. Usar el conocimiento de la integral definida para inferir si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

converge o no. Dar las razones de la respuesta.

c) Usar una iteración de integración por partes en la integral en el apartado *b*) para determinar su divergencia o convergencia.

90. ***Exploración*** Considerar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4}{1 + (\tan x)^n}\,dx$$

donde n es un entero positivo.

a) ¿La integral es impropia? Explicar.

b) Usar una para hacer la gráfica del integrando para $n = 2$, 4, 8 y 12.

c) Usar las gráficas para aproximar la integral como $n \to \infty$.

d) Usar un sistema algebraico de computadora para evaluar la integral para los valores de n en el apartado *b*). Hacer una conjetura sobre el valor de la integral para cualquier entero positivo n. Comparar los resultados con la respuesta en el apartado *c*).

91. ***Función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx, \quad n > 0.$$

a) Encontrar $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.
b) Usar la integración por partes para mostrar que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
c) Escribir $\Gamma(n)$ usando notación factorial donde n es un entero positivo.

92. Demostrar que $I_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)I_{n-1}$, donde

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}\,dx, \quad n \geq 1.$$

Entonces evaluar cada integral.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx$
b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\,dx$
c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{(x^2+1)^6}\,dx$

Transformada de Laplace **Sea $f(t)$ una función definida para todos los valores positivos de t. La transformada de Laplace de $f(t)$ se define por**

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

si la integral impropia existe. Se usa la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales. En los ejercicios 93 a 100, encontrar la transformada de Laplace de la función.

93. $f(t) = 1$
94. $f(t) = t$
95. $f(t) = t^2$
96. $f(t) = e^{at}$
97. $f(t) = \cos at$
98. $f(t) = \operatorname{sen} at$
99. $f(t) = \cosh at$
100. $f(t) = \operatorname{senh} at$

101. ***Probabilidad normal*** La altura media de hombres estadounidenses entre 18 y 24 años de edad es 70 pulgadas, y la desviación estándar es 3 pulgadas. Un hombre de 18 a 24 años de edad es elegido al azar de entre la población. La probabilidad de que sea de 6 pies de alto o más es

$$P(72 \leq x < \infty) = \int_{72}^\infty \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-(x-70)^2/18}\,dx.$$

(Fuente: National Center for Health Statistics)

a) Usar una calculadora para representar gráficamente el integrando. Usar la calculadora para verificar que el área entre el eje x y el integrando es 1.
b) Usar una computadora para aproximar $P(72 \leq x < \infty)$.
c) Aproximar $0.5 - P(70 \leq x \leq 72)$ usando una calculadora. Usar la gráfica en el apartado *a)* para explicar por qué este resultado es igual a la respuesta del apartado *b)*.

102. *a)* Dibujar el semicírculo $y = \sqrt{4-x^2}$.
b) Explicar por qué

$$\int_{-2}^{2} \frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

sin evaluar cualquier integral.

103. ¿Para qué valor de c la integral converge?

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{c}{x+1}\right)dx$$

Evaluar la integral para este valor de c.

104. ¿Para qué valor de c la integral converge?

$$\int_1^\infty \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{3x}\right)dx$$

Evaluar la integral para este valor de c.

105. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la gráfica de f alrededor del eje x.

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

106. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región no acotada que queda entre $y = -\ln x$ y el eje y ($y \geq 0$) alrededor del eje x.

u-Sustitución **En los ejercicios 107 y 108, volver a escribir la integral impropia como una integral propia usando la u-sustitución dada. Entonces usar la regla de los trapecios con $n = 5$ para aproximar la integral.**

107. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad u = \sqrt{x}$

108. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx, \quad u = \sqrt{1-x}$

109. *a)* Usar una calculadora para representar gráficamente la función $y = e^{-x^2}$.
b) Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\,dy.$

110. Sea $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ convergente y sean a y b los números reales donde $a \neq b$. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx.$$

Ejercicios de repaso del capítulo 8

En los ejercicios 1 a 8, usar las reglas básicas de integración para encontrar o evaluar la integral.

1. $\int x\sqrt{x^2 - 1}\, dx$
2. $\int xe^{x^2-1}\, dx$
3. $\int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$
5. $\int_1^e \frac{\ln(2x)}{x}\, dx$
6. $\int_{3/2}^2 2x\sqrt{2x - 3}\, dx$
7. $\int \frac{16}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
8. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

En los ejercicios 9 a 16, usar la integración por partes para encontrar la integral.

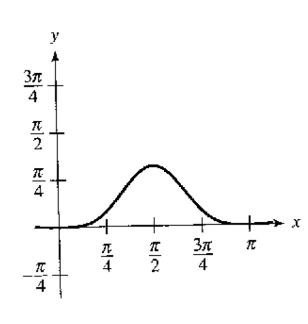
9. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$
10. $\int (x^2 - 1)e^x\, dx$
11. $\int x\sqrt{x - 5}\, dx$
12. $\int \arctan 2x\, dx$
13. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$
14. $\int \ln\sqrt{x^2 - 1}\, dx$
15. $\int x \operatorname{arcsen} 2x\, dx$
16. $\int e^x \arctan e^x\, dx$

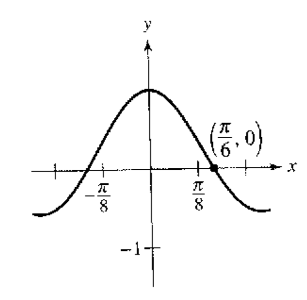
En los ejercicios 17 a 22, encontrar la integral trigonométrica.

17. $\int \cos^3(\pi x - 1)\, dx$
18. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2}\, dx$
19. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$
20. $\int \tan\theta \sec^4\theta\, d\theta$
21. $\int \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$
22. $\int \cos 2\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2\, d\theta$

Área **En los ejercicios 23 y 24, encontrar el área de la región.**

23. $y = \operatorname{sen}^4 x$
24. $y = \cos(3x)\cos x$





En los ejercicios 25 a 30, usar la sustitución trigonométrica para encontrar o evaluar la integral.

25. $\int \frac{-12}{x^2\sqrt{4 - x^2}}\, dx$
26. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\, dx, \quad x > 3$
27. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx$
28. $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx$
29. $\int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2}\, dx$
30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + 2\cos^2\theta}\, d\theta$

En los ejercicios 31 y 32, encontrar la integral usando cada método.

31. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4 + x^2$
c) Integración por partes: $dv = (x/\sqrt{4 + x^2})\, dx$

32. $\int x\sqrt{4 - x}\, dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4 + x$
c) Sustitución: $u = 4 + x$
d) Integración por partes: $dv = \sqrt{4 + x}\, dx$

En los ejercicios 33 a 38, usar las fracciones simples para encontrar la integral.

33. $\int \frac{x - 28}{x^2 - x - 6}\, dx$
34. $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 4}{x^2 - x}\, dx$
35. $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$
36. $\int \frac{4x - 2}{3(x - 1)^2}\, dx$
37. $\int \frac{x^2}{x^2 + 2x - 15}\, dx$
38. $\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta(\tan\theta - 1)}\, d\theta$

En los ejercicios 39 a 46, usar la integración por tablas para encontrar o evaluar la integral.

39. $\int \frac{x}{(2 + 3x)^2}\, dx$
40. $\int \frac{x}{\sqrt{2 + 3x}}\, dx$
41. $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x}{1 + \operatorname{sen} x^2}\, dx$
42. $\int_0^1 \frac{x}{1 + e^{x^2}}\, dx$
43. $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 8}\, dx$
44. $\int \frac{3}{2x\sqrt{9x^2 - 1}}\, dx, \quad x > \frac{1}{3}$
45. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}\pi x \cos\pi x}\, dx$
46. $\int \frac{1}{1 + \tan\pi x}\, dx$

47. Verificar la fórmula de la reducción

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx.$$

48. Verificar la fórmula de la reducción

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n - 1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx.$$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar la integral usando cualquier método.

49. $\int \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta$

50. $\int \frac{\csc \sqrt{2x}}{\sqrt{x}} \, dx$

51. $\int \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}} \, dx$

52. $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx$

53. $\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx$

54. $\int \frac{3x^3 + 4x}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

55. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

56. $\int (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 \, d\theta$

En los ejercicios 57 a 60, resolver la ecuación diferencial usando cualquier método.

57. $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{x^2 - 9}$

58. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x}$

59. $y' = \ln(x^2 + x)$

60. $y' = \sqrt{1 - \cos \theta}$

En los ejercicios 61 a 66, evaluar la integral definida usando cualquier método. Usar una calculadora para verificar el resultado.

61. $\int_2^{\sqrt{5}} x(x^2 - 4)^{3/2} \, dx$

62. $\int_0^1 \frac{x}{(x - 2)(x - 4)} \, dx$

63. $\int_1^4 \frac{\ln x}{x} \, dx$

64. $\int_0^2 xe^{3x} \, dx$

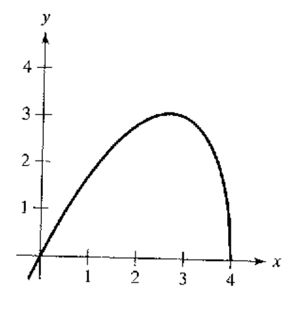
65. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$

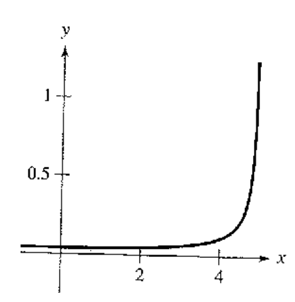
66. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1 + x}} \, dx$

Área **En los ejercicios 67 y 68, encontrar el área de la región.**

67. $y = x\sqrt{4 - x}$

68. $y = \frac{1}{25 - x^2}$





Centroide **En los ejercicios 69 y 70, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

69. $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = 0$

70. $(x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad (x - 4)^2 + y^2 = 4$

Longitud de arco **En los ejercicios 71 y 72, aproximar a dos posiciones decimales la longitud de arco de la curva sobre el intervalo dado.**

	Función	*Intervalo*
71.	$y = \operatorname{sen} x$	$[0, \pi]$
72.	$y = \operatorname{sen}^2 x$	$[0, \pi]$

En los ejercicios 73 a 80, usar la regla de L'Hôpital para evaluar el límite.

73. $\lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2}{x - 1}$

74. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\operatorname{sen} 2\pi x}$

75. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$

76. $\lim_{x \to \infty} xe^{-x^2}$

77. $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{2/x}$

78. $\lim_{x \to 1^+} (x - 1)^{\ln x}$

79. $\lim_{n \to \infty} 1\,000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^n$

80. $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{2}{\ln x} - \frac{2}{x - 1}\right)$

En los ejercicios 81 a 86, determinar si la integral impropia es divergente o convergente. Evaluar la integral si converge.

81. $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \, dx$

82. $\int_0^1 \frac{6}{x - 1} \, dx$

83. $\int_1^{\infty} x^2 \ln x \, dx$

84. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \, dx$

85. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

86. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \, dx$

87. ***Valor presente*** La junta directiva de una corporación está calculando el precio a pagar por un negocio que se prevé rendirá un flujo continuo de ganancia de \$500 000 por año. Si el dinero ganará una tasa nominal de 5% por año compuesto continuo, ¿cuál es el valor presente del negocio?

a) durante 20 años?

b) para siempre (a perpetuidad)

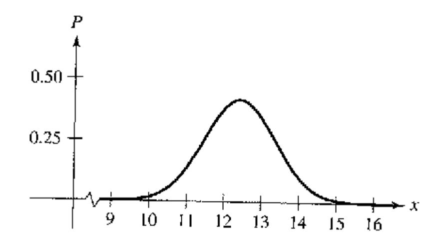
(*Nota*: El valor presente para t_0 años es, $\int_0^{t_0} 500\,000e^{-0.05t} \, dt$.)

88. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$, $y = 0$ y $x = 0$ alrededor del eje x.

89. ***Probabilidad*** La longitud media (del pico a la cola) de especies diferentes de pájaros orientales en Estados Unidos se distribuye aproximadamente con una media de 12.9 centímetros y una desviación normal de 0.95 centímetros (ver la figura). La probabilidad de que un pájaro seleccionado al azar tenga una longitud entre a y b centímetros es

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{0.95\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-12.9)^2/2(0.95)^2} \, dx.$$

Usar una calculadora para aproximar la probabilidad de que un pájaro seleccionado al azar tenga una longitud de *a)* 13 centímetros o mayor y *b)* 15 centímetros o mayor. (*Fuente: Peterson's Field Guide: Eastern Birds*)



SP Solución de problemas

1. *a*) Evaluar las integrales

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx.$$

b) Usar las fórmulas de Wallis para demostrar que

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

para todos los n enteros positivos.

2. *a*) Evaluar las integrales $\int_0^1 \ln x\, dx$ y $\int_0^1 (\ln x)^2\, dx$.

b) Demostrar que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

para todos los n enteros positivos.

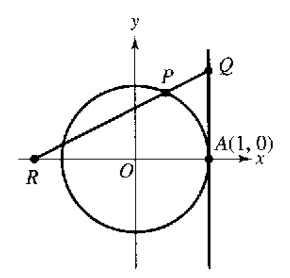
3. Encontrar el valor de la constante positiva c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x + c}{x - c}\right)^x = 9.$$

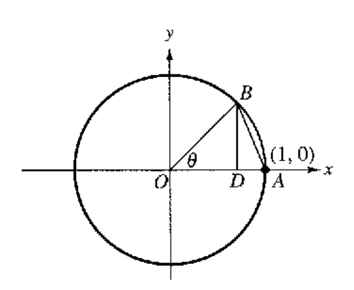
4. Encontrar el valor de la constante positiva c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - c}{x + c}\right)^x = \frac{1}{4}.$$

5. En la figura, la recta $x = 1$ es tangente a la circunferencia unitaria en A. La longitud del segmento QA es igual a la longitud PA del arco circular. Mostrar que la longitud del segmento OR tiende a 2 cuando P tiende a A.



6. En la figura, el segmento BD es la altura de $\triangle OAB$. Sea R el cociente entre el área de $\triangle DAB$ y de la región sombreada formada al suprimir $\triangle OAB$ en el sector circular subtendido por el ángulo θ. Encontrar $\lim_{\theta\to 0^+} R$.



7. Encontrar el área de la región acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la curva

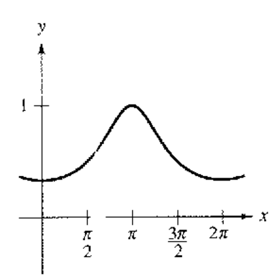
$$y = \frac{x^2}{(x^2 + 9)^{3/2}}.$$

a) Usar una calculadora para hacer la gráfica de la región y aproximar su área.

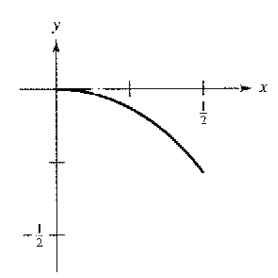
b) Usar una sustitución trigonométrica apropiada para encontrar el área exacta.

c) Usar la sustitución $x = 3$ senh u para encontrar el área exacta y verificar que se obtiene la misma respuesta que en el apartado *b*).

8. Usar la sustitución $u = \tan \frac{x}{2}$ para encontrar el área de la región sombreada bajo la gráfica de $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$, $0 \le x \le \pi/2$ (ver la figura).

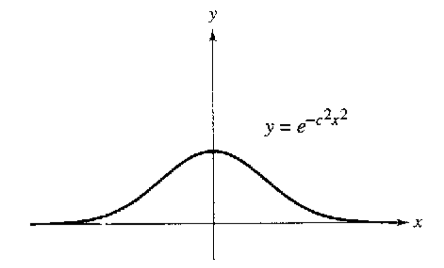


9. Encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función $y = \ln(1 - x^2)$ en el intervalo $0 \le x \le \frac{1}{2}$ (ver la figura).



10. Encontrar el centroide de la región sobre el eje x y acotada anteriormente por la curva $y = e^{-c^2x^2}$ donde c es una constante positiva (ver la figura).

$$\left(\textit{Sugerencia: } \text{Mostrar que} \int_0^\infty e^{-c^2x^2}\, dx = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.\right)$$



11. Algunas funciones elementales, como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, no tienen antiderivadas que son las funciones elementales. Joseph Liouville demostró que

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx$$

no tiene una antiderivada elemental. Usar este hecho para demostrar que

$$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

no es elemental.

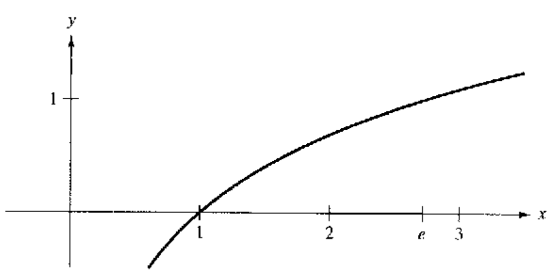
12. *a)* Sea $y = f^{-1}(x)$ la función inversa de f. Usar la integración por partes para derivar la fórmula

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy.$$

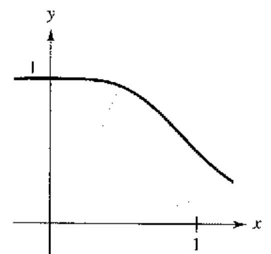
b) Usar la fórmula del apartado *a)* para encontrar la integral

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx.$$

c) Usar la fórmula del apartado *a)* para encontrar el área bajo la gráfica de $y = \ln x$, $1 \le x \le e$ (ver la figura).



13. Factorizar el polinomio $p(x) = x^4 + 1$ y entonces encontrar el área bajo la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$, $0 \le x \le 1$ (ver la figura).



14. *a)* Usar la sustitución $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ para evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx.$$

b) Sea n un entero positivo. Evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx.$$

15. Usar una calculadora para estimar cada límite. Entonces calcular cada límite usando la regla de L'Hôpital. ¿Qué se puede concluir sobre la forma indeterminada $0 \cdot \infty$?

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\cot x + \frac{1}{x}\right)$ *b)* $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \left[\left(\cot x + \frac{1}{x}\right)\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)\right]$

16. Suponer que el denominador de una fracción se descompone en productos de factores lineales distintos

$$D(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

para un n entero positivo y un número real distinto $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si N es un polinomio de grado menor de n, mostrar que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{P_1}{x - c_1} + \frac{P_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{P_n}{x - c_n}$$

donde $P_k = N(c_k)/D'(c_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Notar que esto es la descomposición de las fracciones simples de $N(x)/D(x)$.

17. Usar los resultados del ejercicio 16 para encontrar la descomposición de las fracciones parciales de

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 - 13x^2 + 12x}.$$

18. La velocidad v (en pies por segundo) de un cohete cuya masa inicial (incluido el combustible) es m, está dada por

$$v = gt + u \ln \frac{m}{m - rt}, \quad t < \frac{m}{r}$$

donde u es la velocidad de la expulsión del combustible, r es la proporción en que el combustible se consume, y $g = -32$ pies/s^2 son la aceleración debida a la gravedad. Encontrar la ecuación de la posición para un cohete para el cual $m = 50\,000$ libras, $u = 12\,000$ pies por segundo y $r = 400$ libras por segundo. ¿Cuál es la altura del cohete cuando $t = 100$ segundos? (Asumir que el cohete despegó al nivel del suelo y se desplaza verticalmente.)

19. Suponer que $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ y las segundas derivadas de f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)g''(x)\,dx = \int_a^b f''(x)g(x)\,dx.$$

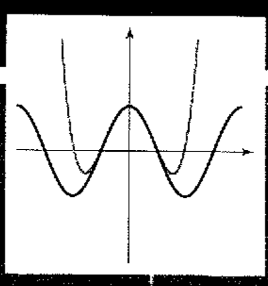
20. Suponer que $f(a) = f(b) = 0$ y las segundas derivadas de f existen en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar que

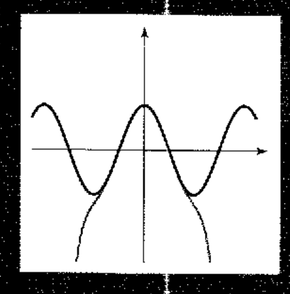
$$\int_a^b (x - a)(x - b)f''(x)\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx.$$

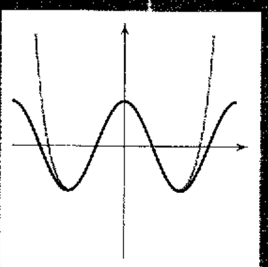
21. Usando la desigualdad

$$\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^{15}} < \frac{1}{x^5 - 1} < \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{2}{x^{15}}$$

para $x \ge 2$, aproximar $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^5 - 1}\,dx$.

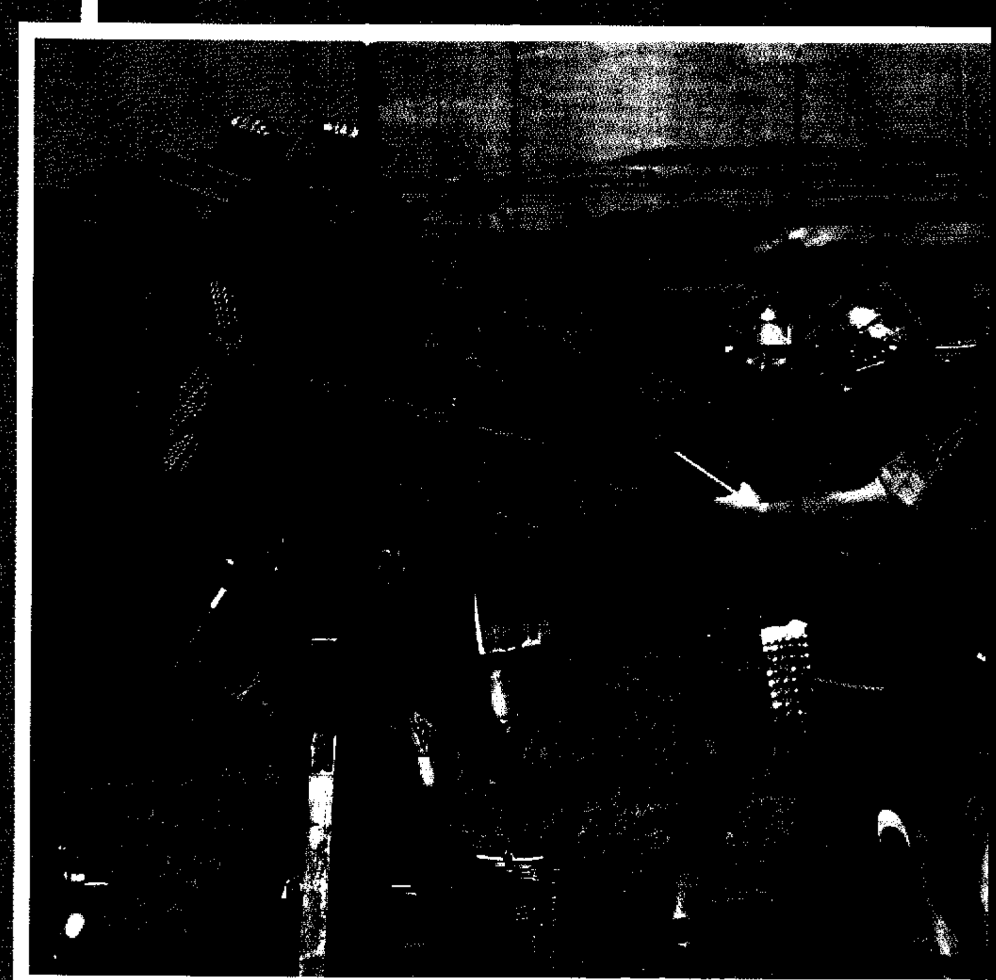






Series infinitas

La catapulta se usaba como una máquina portátil lanzadora de piedra. El mecanismo de la propulsión era similar al de una ballesta. Los artilleros experimentados apuntaban y disparaban la catapulta a simple ojo. ¿Qué tipo de trayectoria del proyectil piensa que estos artilleros prefieren, una trayectoria alta y arqueada, o baja y relativamente recta? ¿Por qué?



Charles & Josette Lenars/Corbis

Sección 9.1 Sucesiones

- **Dar los términos de una sucesión.**
- **Determinar si una sucesión converge o diverge.**
- **Dar una fórmula para el término n-ésimo de una sucesión.**
- **Usar las propiedades de las sucesiones monótonas y de las sucesiones acotadas.**

Sucesiones

En matemáticas, la palabra "sucesión" se usa en un sentido muy parecido al lenguaje usual. Decir que una colección de objetos o eventos está en *sucesión* significa generalmente que la colección está ordenada de manera que tiene un primer miembro, un segundo miembro, un tercer miembro, y así sucesivamente.

Matemáticamente, una **sucesión** se define como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Aunque una sucesión es una función, es común representar las sucesiones empleando subíndices en lugar de la notación habitual de la función. Por ejemplo, en la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

Sucesión.

al 1 se le asigna a_1, al 2 se le asigna a_2, y así sucesivamente. Los números a_1, a_2, a_3, ..., a_n... son los **términos** de la sucesión. El número a_n es el **término n-ésimo** de la sucesión, y la sucesión completa se denota por $\{a_n\}$.

Búsqueda de patrones **Describir un patrón para cada una de las sucesiones siguientes. Después usar la descripción para escribir una fórmula para el término n-ésimo de cada sucesión. A medida que n se incrementa, ¿los términos parecen acercarse a algún límite? Explique su razonamiento.**

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

c) $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{6}, \frac{10}{10}, \frac{10}{15}, \ldots$

d) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \ldots$

NOTA De vez en cuando, es conveniente empezar una sucesión con a_0, para que los términos de la sucesión sean $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

EJEMPLO 1 Dar los términos de una sucesión

a) Los términos de la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ son

$$\begin{array}{cccccc} 3 + (-1)^1, & 3 + (-1)^2, & 3 + (-1)^3, & 3 + (-1)^4, & \ldots \\ 2, & 4, & 2, & 4, & \ldots. \end{array}$$

b) Los términos de la sucesión $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n}{1 - 2n}\right\}$ son

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{1 - 2 \cdot 1}, & \dfrac{2}{1 - 2 \cdot 2}, & \dfrac{3}{1 - 2 \cdot 3}, & \dfrac{4}{1 - 2 \cdot 4}, & \ldots \\ -1, & -\dfrac{2}{3}, & -\dfrac{3}{5}, & -\dfrac{4}{7}, & \ldots. \end{array}$$

c) Los términos de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{2^n - 1}\right\}$ son

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1^2}{2^1 - 1}, & \dfrac{2^2}{2^2 - 1}, & \dfrac{3^2}{2^3 - 1}, & \dfrac{4^2}{2^4 - 1}, & \ldots \\ \dfrac{1}{1}, & \dfrac{4}{3}, & \dfrac{9}{7}, & \dfrac{16}{15}, & \ldots. \end{array}$$

d) Los términos de la sucesión definida en forma **recursiva o recurrente** $\{d_n\}$, donde $d_1 = 25$ y $d_{n+1} = d_n - 5$ son

$$25, \quad 25 - 5 = 20, \quad 20 - 5 = 15, \quad 15 - 5 = 10, \ldots.$$

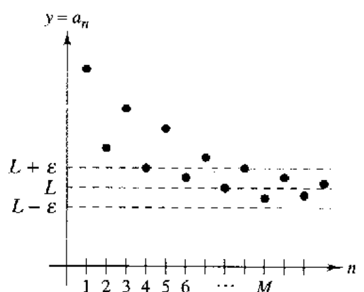
AYUDA DE ESTUDIO Algunas sucesiones se definen en forma recursiva o recurrente. Para definir una sucesión en forma recursiva se necesita dar uno o más de los primeros términos. Todos los otros términos de la sucesión son definidos usando los términos anteriores, como se muestra en el ejemplo 1*d*.

Límite de una sucesión

El punto principal de este capítulo son las sucesiones cuyos términos tienden a valores límite. Tales sucesiones se llaman **convergentes**. Por ejemplo, la sucesión $\{1/2^n\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

converge a 0, como se indica en la definición siguiente.



Para $n > M$, todos los términos de la sucesión distan de L menos de ε unidades
Figura 9.1

Definición del límite de una sucesión

Sea L un número real. El **límite** de una sucesión $\{a_n\}$ es L, escrito como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Si el límite L de una sucesión existe, entonces la sucesión **converge** a L. Si el límite de una sucesión no existe, entonces la sucesión **diverge**.

Gráficamente, esta definición dice que finalmente (para $n > M$ y $\varepsilon > 0$) los términos de una sucesión que converge a L quedarán dentro de la franja entre las rectas $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$, como se muestra en la figura 9.1.

Si una sucesión $\{a_n\}$ coincide con una función f en cada entero positivo, y si $f(x)$ tiende a un límite L a medida que $x \to \infty$, la sucesión debe converger al mismo límite L.

TEOREMA 9.1 Límite de una sucesión

Sea L un número real. Sea f una función de una variable real tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo n, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

EJEMPLO 2 Encuentre el límite de una sucesión

Hallar el límite de la sucesión cuyo término n-ésimo es

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Solución A partir del teorema 5.15

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Por tanto, puede aplicar el teorema 9.1 para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

NOTA Hay diferentes situaciones en las que una sucesión puede no tener un límite. Una situación así es cuando los términos de la sucesión crecen sin límite o decrecen sin límite. Estos casos son escritos simbólicamente como sigue.

Los términos crecen sin límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Los términos decrecen sin límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Las propiedades siguientes de límites de sucesiones corresponden a aquellas dadas para los límites de funciones en una variable real en la sección 1.3.

TEOREMA 9.2 Propiedades de los límites de sucesiones

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = K$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cL$, c es cualquier número real
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = LK$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{K}$, $b_n \neq 0$ y $K \neq 0$

EJEMPLO 3 **Análisis de convergencia o divergencia**

a) Como la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ tiene los términos

$2, 4, 2, 4, \ldots$ Vea el ejemplo 1*a*, página 594.

que alternan entre 2 y 4, el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

no existe. Por tanto, la sucesión diverge.

b) Para $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$, divida el numerador y denominador entre n para obtener

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n) - 2} = -\frac{1}{2}$$ Vea el ejemplo 1*b*, página 594.

lo cual implica que la sucesión converge a $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 4 **Uso de la Regla de L'Hôpital para determinar la convergencia**

Mostrar que la sucesión cuyo término n-ésimo es $a_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$ converge.

Solución Considere la función en una variable real

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(\ln 2)2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 2^x} = 0.$$

Como $f(n) = a_n$ para todo entero positivo, puede aplicarse el teorema 9.1 para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0.$$ Vea el ejemplo 1*c*, página 594.

Así, la sucesión converge a 0.

TECNOLOGÍA Represente en una calculadora la función del ejemplo 4. Nótese que cuando x tiende a infinito, el valor de la función se acerca a 0. Si usted tiene acceso a una calculadora gráfica que pueda generar los términos de una sucesión, úsela para generar los primeros 20 términos de la sucesión del ejemplo 4. Después examine los términos para observar numéricamente que la sucesión converge a 0.

El símbolo $n!$ (se lee "n factorial" o "factorial de n") se usa para simplificar algunas de las fórmulas desarrolladas en este capítulo. Sea n un entero positivo; entonces **n factorial** se define como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Como un caso especial, el **cero factorial** se define como $0! = 1$. De esta definición, se puede ver que $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y así sucesivamente. Los factoriales siguen las mismas convenciones respecto al orden de las operaciones que los exponentes. Es decir, así como $2x^3$ y $(2x)^3$ implican un orden diferente de las operaciones, $2n!$ y $(2n)!$ implica los órdenes siguientes.

$$2n! = 2(n!) = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n)$$

y

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1) \cdots 2n$$

Otro teorema útil para límites que puede reescribirse para sucesiones es el teorema del encaje o del emparedado de la sección 1.3.

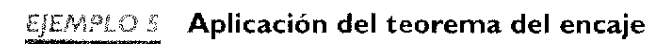
TEOREMA 9.3 Teorema del encaje o del emparedado para sucesiones

Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

y existe un entero N tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n > N$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$$



EJEMPLO 5 Aplicación del teorema del encaje

Pruebe que la sucesión $\{c_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n!}\right\}$ converge, y encuentre su límite.

Solución Para aplicar el teorema del encaje, debe encontrar dos sucesiones convergentes que puedan relacionarse a la sucesión dada. Dos posibilidades son $a_n = -1/2^n$ y $b_n = 1/2^n$, ambas convergen en 0. Comparando el término $n!$ con 2^n, se puede ver que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n = 24 \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdots n}_{n-4 \text{ factores}} \qquad (n \geq 4)$$

y

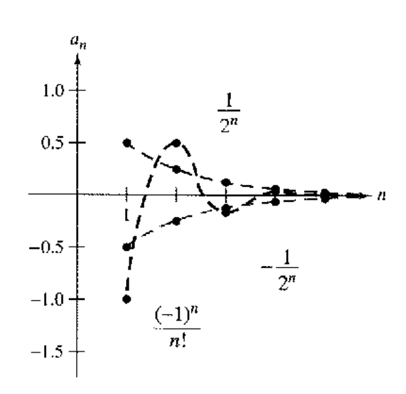
$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 16 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2.}_{n-4 \text{ factores}} \qquad (n \geq 4)$$

Esto implica que para $n \geq 4$, $2^n < n!$, y tiene

$$\frac{-1}{2^n} \leq (-1)^n \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 4$$

como se muestra en la figura 9.2. Por tanto, el teorema del encaje o del emparedado asegura que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 0.$$



Para $n \geq 4$, $(-1)^n/n!$ queda confirmado entre $-1/2^n$ y $1/2^n$
Figura 9.2

NOTA El ejemplo 5 sugiere algo acerca del ritmo o velocidad a la que $n!$ aumenta cuando $n \to \infty$. Como la figura 9.2 sugiere, ambos $1/2^n$ y $1/n!$ tienden a 0 a medida que $n \to \infty$. Si bien $1/n!$ se aproxima a 0 mucho más rápido que $1/2^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

De hecho, puede demostrarse que para cualquier número fijo k,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0.$$

Esto significa que *la función factorial crece más rápido que cualquier función exponencial.*

En el ejemplo 5, la sucesión $\{c_n\}$ tiene tanto términos positivos como negativos. Para esta sucesión, sucede que la sucesión de valores absolutos, $\{|c_n|\}$, también converge a 0. Esto se puede demostrar por medio del teorema del encaje o del emparedado usando la desigualdad

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 4.$$

En tales casos, es a menudo conveniente considerar la sucesión de los valores absolutos y entonces aplicar el teorema 9.4 que establece que si la sucesión de los valores absolutos converge a 0, la sucesión original también converge a 0.

TEOREMA 9.4 Teorema de valor absoluto

Dada la sucesión $\{a_n\}$, si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración Considere las dos sucesiones $\{|a_n|\}$ y $\{-|a_n|\}$. Como ambas sucesiones convergen a 0 y

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

se puede usar el teorema del encaje o del emparedado para concluir que $\{a_n\}$ converge a 0.

Reconocimiento de patrones en las sucesiones

A veces los términos de una sucesión se generan mediante alguna regla que no identifica explícitamente el término n-ésimo de la sucesión. En tales casos, puede ser necesario descubrir el patrón en la sucesión y describir el término n-ésimo. Una vez que el término n-ésimo se ha especificado, se puede investigar la convergencia o divergencia de la sucesión.

EJEMPLO 6 El término n-ésimo de una sucesión

Hallar una sucesión $\{a_n\}$ cuyos cinco primeros términos son

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$$

y después determine si la sucesión particular que se ha elegido converge o diverge.

Solución Primero, note que los numeradores son potencias sucesivas de 2, y los denominadores forman la sucesión de enteros impares positivos. Comparando a_n con n, se tiene el esquema siguiente.

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \ldots, \frac{2^n}{2n-1}$$

Usando la regla de L'Hôpital para evaluar el límite de $f(x) = 2^x/(2x - 1)$, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x(\ln 2)}{2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2n-1} = \infty.$$

Por tanto, la sucesión diverge.

Sin una regla específica para la generación de los términos de una sucesión o algún conocimiento del contexto en que se obtienen los términos de la sucesión, no es posible determinar la convergencia o divergencia de la sucesión meramente a partir de sus primeros términos. Por ejemplo, aunque los primeros tres términos de las siguientes cuatro sucesiones son idénticos, las primeras dos sucesiones convergen a 0, la tercera sucesión converge a $\frac{1}{9}$, y la cuarta sucesión diverge.

$$\{a_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

$$\{b_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{6}{(n+1)(n^2-n+6)}, \ldots$$

$$\{c_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{62}, \ldots, \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18}, \ldots$$

$$\{d_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \ldots, \frac{-n(n+1)(n-4)}{6(n^2+3n-2)}, \ldots$$

El proceso de determinar un término n-ésimo a partir del patrón observado en los primeros términos de una sucesión es un ejemplo de *razonamiento inductivo.*

EJEMPLO 7 Cálculo del término n-ésimo de una sucesión

Determine un término n-ésimo de una sucesión cuyos primeros cinco términos son

$$-\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120}, \ldots$$

y después decida si la sucesión converge o diverge.

Solución Note que los numeradores son de la forma 3^n menos 1. Por tanto, se puede razonar que los numeradores están dados por la regla $3^n - 1$. Factorizando los denominadores se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \\ 6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 120 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot . \end{aligned}$$

Esto sugiere que los denominadores son de la forma $n!$ Finalmente, como los signos son alternados, se puede escribir el término n-ésimo como

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{3^n - 1}{n!}\right).$$

De la discusión sobre el crecimiento de $n!$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{n!} = 0.$$

Aplicando el teorema 9.4, puede concluirse que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Así, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0.

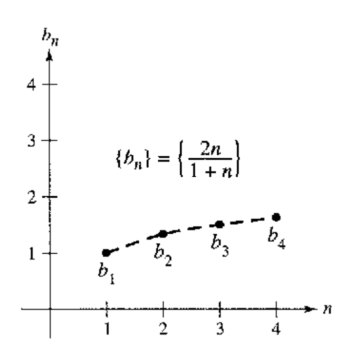
Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas

Hasta ahora se ha determinado la convergencia de una sucesión encontrando su límite. Aun cuando no pueda determinarse el límite de una sucesión particular, puede ser útil saber si la sucesión converge. El teorema 9.5 proporciona un criterio de convergencia para sucesiones sin determinar el límite. Primero, se dan algunas definiciones preliminares.

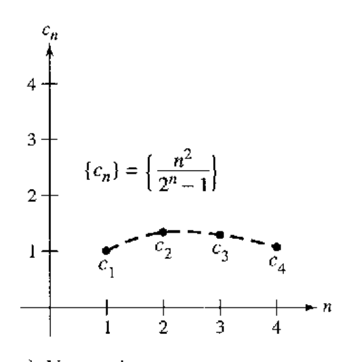
> **Definición de una sucesión monótona**
>
> Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si sus términos no son decrecientes
>
> $$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$
>
> o si sus términos no son crecientes
>
> $$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots.$$

$\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$

a) No monótona



b) Monótona



c) No monótona

Figura 9.3

EJEMPLO 8 Determinar si una sucesión es monótona

Determinar si la sucesión que tiene el término n-ésimo dado es monótona.

a) $a_n = 3 + (-1)^n$ ***b)*** $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$ ***c)*** $c_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

Solución

a) Esta sucesión alterna entre 2 y 4. Por tanto, no es monótona.

b) Esta sucesión es monótona porque cada término sucesivo es mayor que su predecesor. Para ver esto, compare los términos b_n y b_{n+1}. [Note que, como n es positivo, se puede multiplicar cada lado de la desigualdad por $(1 + n)$ y $(2 + n)$ sin invertir el signo de la desigualdad.]

$$b_n = \frac{2n}{1+n} \overset{?}{<} \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} = b_{n+1}$$
$$2n(2+n) \overset{?}{<} (1+n)(2n+2)$$
$$4n + 2n^2 \overset{?}{<} 2 + 4n + 2n^2$$
$$0 < 2$$

Empezando con la última desigualdad, que es válida, se pueden invertir los pasos para concluir que la desigualdad original también es válida.

c) Esta sucesión no es monótona, porque el segundo término es mayor que el primer término, y mayor que el tercero. (Note que si se suprime el primer término, la sucesión resultante $c_2, c_3, c_4, \ldots$ es monótona.)

La figura 9.3 ilustra gráficamente estas tres sucesiones.

NOTA En el ejemplo 8*b*, otra manera de ver que la sucesión es monótona es argumentar que la derivada de la función derivable correspondiente $f(x) = 2x/(1 + x)$ es positivo para todo x. Esto implica que f es creciente, lo cual a su vez implica que $\{a_n\}$ es creciente.

NOTA Todas las sucesiones mostradas en la figura 9.3 son acotadas. Para ver esto, considere lo siguiente.

$$2 \le a_n \le 4$$

$$1 \le b_n \le 2$$

$$0 \le c_n \le \frac{4}{3}$$

Definición de una sucesión acotada

1. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada superiormente** si existe un número real M tal que $a_n \le M$ para todo n. El número M es llamado una **cota superior** de la sucesión.
2. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada inferiormente** si hay un número real N tal que $N \le a_n$ para todo n. El número N es llamado una **cota inferior** de la sucesión.
3. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si lo está superior e inferiormente.

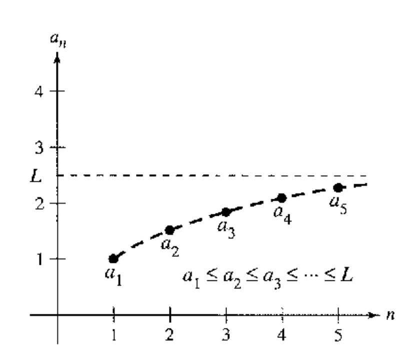
Una propiedad importante de los números reales es que son **completos**. Informalmente, esto significa que no hay huecos en la recta del número real. (El conjunto de números racionales no tiene la propiedad de ser completo.) El axioma de completitud para los números reales puede usarse para concluir que si una sucesión tiene una cota superior, debe tener una **mínima cota superior** (una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior de la sucesión). Por ejemplo, el límite superior de la sucesión $\{a_n\} = \{n/(n + 1)\}$,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

es 1. El teorema de completitud es usado en la demostración del teorema 9.5.

TEOREMA 9.5. Sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge.



Toda sucesión acotada no decreciente converge
Figura 9.4

Demostración Supóngase que la sucesión es no decreciente, como se muestra en la figura 9.4. Para simplificar, también supóngase que todo término de la sucesión es positivo. Como la sucesión es acotada, debe existir una cota superior M tal que

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le M.$$

Del axioma de completitud, se sigue que existe una mínima cota superior L tal que

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le L.$$

Para $\varepsilon > 0$, se sigue que $L - \varepsilon < L$, y por consiguiente $L - \varepsilon$ no puede ser una cota superior de la sucesión. Por consiguiente, por lo menos un término de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \varepsilon$. Es decir, $L - \varepsilon < a_N$ para algún entero positivo N. Como los términos de $\{a_n\}$ son no decrecientes, se sigue que $a_N \le a_n$ para todo $n > N$. Ahora se sabe que $L - \varepsilon < a_N \le a_n \le L < L + \varepsilon$, para todo $n > N$. Se sigue que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N$, lo cual por definición significa que $\{a_n\}$ converge a L. La demostración para una sucesión no creciente es similar.

EJEMPLO 9 **Sucesiones acotadas y monótonas**

a) La sucesión $\{a_n\} = \{1/n\}$ es acotada y monótona, y por tanto, por el teorema 9.5, debe converger.

b) La sucesión divergente $\{b_n\} = \{n^2/(n + 1)\}$ es monótona, pero no acotada. (Es acotada inferiormente.)

c) La sucesión divergente $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$ es acotada, pero no monótona.

Ejercicios de la sección 9.1

En los ejercicios 1 a 10, escribir los primeros cinco términos de la sucesión.

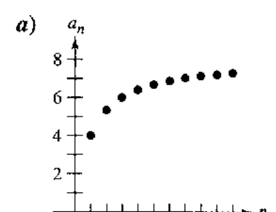
1. $a_n = 2^n$
2. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$
3. $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
4. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$
5. $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$
6. $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$
7. $a_n = \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2}$
8. $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{n}\right)$
9. $a_n = 5 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
10. $a_n = 10 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{6}{n^2}$

En los ejercicios 11 a 14, escribir los primeros cinco términos de la sucesión definida por recurrencia.

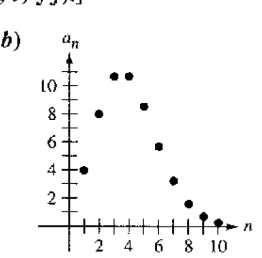
11. $a_1 = 3,\ a_{k+1} = 2(a_k - 1)$
12. $a_1 = 4,\ a_{k+1} = \left(\dfrac{k+1}{2}\right)a_k$
13. $a_1 = 32,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$
14. $a_1 = 6,\ a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k^2$

En los ejercicios 15 a 20, asociar la sucesión con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

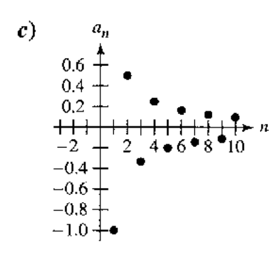
a)



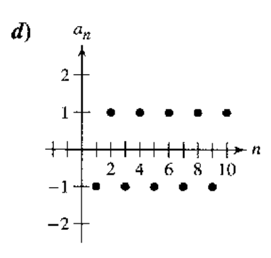
b)



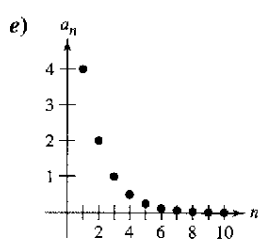
c)



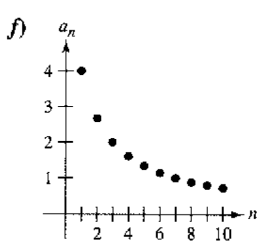
d)



e)



f)



15. $a_n = \dfrac{8}{n+1}$
16. $a_n = \dfrac{8n}{n+1}$
17. $a_n = 4(0.5)^{n-1}$
18. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$
19. $a_n = (-1)^n$
20. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

En los ejercicios 21 a 24, usar calculadora para representar los primeros 10 términos de la sucesión.

21. $a_n = \dfrac{2}{3}n$
22. $a_n = 2 - \dfrac{4}{n}$
23. $a_n = 16(-0.5)^{n-1}$
24. $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

En los ejercicios 25 a 30, escribir los siguientes dos términos de la sucesión. Describir el patrón que utilizó para encontrar estos términos.

25. $2, 5, 8, 11, \ldots$
26. $\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$
27. $5, 10, 20, 40, \ldots$
28. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$
29. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$
30. $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$

En los ejercicios 31 a 36, simplificar el cociente de factoriales.

31. $\dfrac{10!}{8!}$
32. $\dfrac{25!}{23!}$
33. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$
34. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$
35. $\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$
36. $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$

En los ejercicios 37 a 42, encontrar el límite (si es posible) de la sucesión.

37. $a_n = \dfrac{5n^2}{n^2+2}$
38. $a_n = 5 - \dfrac{1}{n^2}$
39. $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$
40. $a_n = \dfrac{5n}{\sqrt{n^2+4}}$
41. $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$
42. $a_n = \cos\dfrac{2}{n}$

En los ejercicios 43 a 46, usar una calculadora para representar los primeros 10 términos de la sucesión. Usar la gráfica para hacer una conjetura acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión. Verificar su conjetura analíticamente y, si la sucesión converge, encuentre su límite.

43. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$
44. $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$
45. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$
46. $a_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$

En los ejercicios 47 a 68, determinar la convergencia o divergencia de la sucesión con el término *n*-ésimo dado. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

47. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
48. $a_n = 1 + (-1)^n$
49. $a_n = \dfrac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 1}$
50. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+1}$
51. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$
52. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

53. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$

54. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n^2}$

55. $a_n = \dfrac{\ln(n^3)}{2n}$

56. $a_n = \dfrac{\ln \sqrt{n}}{n}$

57. $a_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

58. $a_n = (0.5)^n$

59. $a_n = \dfrac{(n + 1)!}{n!}$

60. $a_n = \dfrac{(n - 2)!}{n!}$

61. $a_n = \dfrac{n - 1}{n} - \dfrac{n}{n - 1}, \quad n \geq 2$

62. $a_n = \dfrac{n^2}{2n + 1} - \dfrac{n^2}{2n - 1}$

63. $a_n = \dfrac{n^p}{e^n}, \ p > 0$

64. $a_n = n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$

65. $a_n = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n$

66. $a_n = 2^{1/n}$

67. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

68. $a_n = \dfrac{\cos \pi n}{n^2}$

En los ejercicios 69 a 82, escribir una expresión para el término *n*-ésimo de la sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)

69. $1, 4, 7, 10, \ldots$

70. $3, 7, 11, 15, \ldots$

71. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

72. $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$

73. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

74. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

75. $2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, \ldots$

76. $1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, 1 + \frac{15}{16}, 1 + \frac{31}{32}, \ldots$

77. $\dfrac{1}{2 \cdot 3}, \dfrac{2}{3 \cdot 4}, \dfrac{3}{4 \cdot 5}, \dfrac{4}{5 \cdot 6}, \ldots$

78. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

79. $1, -\dfrac{1}{1 \cdot 3}, \dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}, -\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \ldots$

80. $1, x, \dfrac{x^2}{2}, \dfrac{x^3}{6}, \dfrac{x^4}{24}, \dfrac{x^5}{120}, \ldots$

81. $2, 24, 720, 40{,}320, 3{,}628{,}800, \ldots$

82. $1, 6, 120, 5040, 362{,}880, \ldots$

En los ejercicios 83 a 94, determinar si la sucesión con el término *n*-ésimo dado es monótona. Discutir la existencia de cotas de la sucesión. Use una calculadora para confirmar sus resultados.

83. $a_n = 4 - \dfrac{1}{n}$

84. $a_n = \dfrac{3n}{n + 2}$

85. $a_n = \dfrac{n}{2^{n+2}}$

86. $a_n = ne^{-n/2}$

87. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{n}\right)$

88. $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

89. $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

90. $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

91. $a_n = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{6}$

92. $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

93. $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$

94. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{n}}{n}$

En los ejercicios 95 a 98, *a*) usar el teorema 9.5 para mostrar que la sucesión con el término *n*-ésimo dado converge y *b*) usar una calculadora para representar los primeros 10 términos de la sucesión y encontrar su límite.

95. $a_n = 5 + \dfrac{1}{n}$

96. $a_n = 4 - \dfrac{3}{n}$

97. $a_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$

98. $a_n = 4 + \dfrac{1}{2^n}$

99. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente tal que $2 \leq a_n \leq 4$. Explicar por qué $\{a_n\}$ tiene un límite. ¿Qué puede concluir sobre el límite?

100. Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona tal que $a_n \leq 1$. Discutir la convergencia de $\{a_n\}$. Si $\{a_n\}$ converge, ¿qué se puede concluir acerca del límite?

101. ***Interés compuesto*** Considerar la sucesión $\{A_n\}$ de la cual el término *n*-ésimo está dado por

$$A_n = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$$

donde P es el capital invertido, A_n es el balance de la cuenta después de n meses y r es la proporción de interés compuesto anualmente.

a) ¿Es $\{A_n\}$ una sucesión convergente? Explique.

b) Hallar los primeros 10 términos de la sucesión si $P =$ \$9 000 y $r = 0.055$.

102. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de \$100 al principio de cada mes en una cuenta a una tasa de interés anual compuesto mensualmente de 3%. El balance en la cuenta después de n meses es $A_n = 100(401)(1.0025^n - 1)$.

a) Calcular los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$.

b) Hallar el balance en la cuenta después de 5 años calculando el término 60 de la sucesión.

c) Hallar el balance en la cuenta después de 20 años calculando el término 240 de la sucesión.

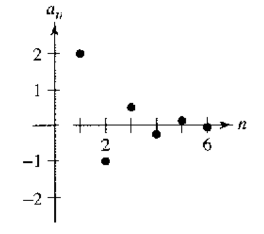
Desarrollo de conceptos

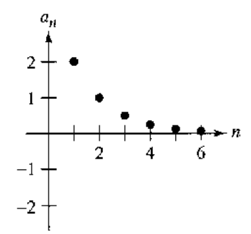
103. En sus propias palabras, definir.

a) Sucesión *b*) Convergencia de una sucesión

c) Sucesión monótona *d*) Sucesión acotada

104. Las gráficas de dos sucesiones son mostradas en las figuras. ¿Qué gráfica representa la sucesión con signos alternos? Explique su razonamiento.





Desarrollo de conceptos (continuación)

En los ejercicios 105 a 108, dé un ejemplo de una sucesión que satisfaga la condición o explique por qué no existe tal sucesión. (Los ejemplos no son únicos.)

105. Una sucesión monótonamente creciente que converge a 10.

106. Una sucesión acotada monótonamente creciente que no converge.

107. Una sucesión que converge a $\frac{3}{4}$.

108. Una sucesión no acotada que converge a 100.

109. ***Los gastos gubernamentales*** Un programa gubernamental que actualmente cuesta a los contribuyentes $2.5 mil millones por año, se va a reducir 20 por ciento por año.

a) Escribir una expresión para la cantidad presupuestada para este programa después de n años.

b) Calcular los presupuestos durante los primeros 4 años.

c) Determinar la convergencia o divergencia de la sucesión de presupuestos reducidos. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

110. ***Inflación*** Si la proporción de inflación es $4\frac{1}{2}\%$ por año y el precio medio de un automóvil es actualmente $16 000, el precio medio después de n años será

$$P_n = \$16\,000(1.045)^n.$$

Calcular los precios medios durante los próximos 5 años.

111. ***Modelo matemático*** El número a_n de especies en peligro o amenazadas de extinción en Estados Unidos de 1996 a 2002 se muestra en la tabla, donde n representa el año, con $n = 6$ que corresponde a 1996. *(Fuente: U.S. Fish and Wildlife Service)*

n	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1 053	1 132	1 194	1 205	1 244	1 254	1 263

a) Use la función de regresión de una calculadora para encontrar un modelo de la forma

$$a_n = bn^2 + cn + d, \qquad n = 6, 7, \ldots, 12$$

para los datos. Use la calculadora para trazar los puntos y gráficas del modelo.

b) Use el modelo para predecir el número de especies en peligro amenazadas en el año 2008.

112. ***Modelo matemático*** Las ventas anuales a_n (en millones de dólares) para los productos de Avon, Inc. de 1993 a 2002 se da abajo como pares ordenados de la forma (n, a_n), donde n representa el año, y $n = 3$ que corresponde a 1993. *(Fuente: 2002 Avon Products, Inc. Reporte anual)*

(3, 3 844), (4, 4 267), (5, 4 492), (6, 4 814), (7, 5 079),
(8, 5 213), (9, 5 289), (10, 5 682), (11, 5 958), (12, 6 171)

a) Use la función de regresión en una calculadora para encontrar un modelo de la forma

$$a_n = bn + c, \quad n = 3, 4, \ldots, 12$$

para los datos. Gráficamente compare los puntos y el modelo.

b) Use el modelo para predecir las ventas en el año 2008.

113. ***Comparación del crecimiento exponencial y factorial*** Considere la sucesión $a_n = 10^n/n!$.

a) Hallar dos términos consecutivos que sean iguales en magnitud.

b) ¿Son los términos que siguen a los encontrados en el apartado *a*) crecientes o decrecientes?

c) En la sección 8.7, ejercicios 65 a 70, se mostró que para valores "grandes" de la variable independiente, una función exponencial crece más rápidamente que una función polinómica. Del resultado del apartado *b*), ¿qué inferencia puede obtenerse acerca del crecimiento de una función exponencial en comparación con una función factorial, para valores enteros "grandes" de n?

114. Calcule los primeros seis términos de la sucesión

$$\{a_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Si la sucesión converge, encuentre su límite.

115. Calcule los primeros seis términos de la sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

116. Demuestre que si $\{s_n\}$ converge en L y $L > 0$, entonces existe un número N tal que $s_n > 0$ para $n > N$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 117 a 120, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.**

117. Si $\{a_n\}$ converge a 3 y $\{b_n\}$ converge a 2, entonces $\{a_n + b_n\}$ converge a 5.

118. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = 0$.

119. Si $n > 1$, entonces $n! = n(n - 1)!$

120. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n/n\}$ converge a 0.

121. ***Sucesión de Fibonacci*** En un estudio de la reproducción de conejos, Fibonacci (hacia 1170-1240) encontró la sucesión que lleva ahora su nombre. La sucesión se define recursivamente por

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \qquad \text{donde} \quad a_1 = 1 \text{ y } a_2 = 1.$$

a) Escriba los primeros 12 términos de la sucesión.

b) Escriba los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

c) Usando la definición en el apartado *b*), muestre que

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

d) La **razón áurea** ρ puede definirse por $\lim_{n\to\infty} b_n = \rho$. Muestre que $\rho = 1 + 1/\rho$ y resuelva esta ecuación para ρ.

122. ***Conjetura*** Sea $x_0 = 1$ considerar la sucesión x_n dada por la fórmula

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Usar una calculadora para calcular los primeros 10 términos de la sucesión y hacer una conjetura sobre el límite de la sucesión.

123. Considerar la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

a) Calcular los primeros cinco términos de esta sucesión.

b) Escribir una fórmula de recurrencia para a_n, para $n \geq 2$.

c) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

124. Considerar la sucesión

$$\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \ldots$$

a) Calcular los primeros cinco términos de esta sucesión.

b) Escribir una fórmula de recurrencia para a_n, para $n \geq 2$.

c) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

125. Considerar la sucesión $\{a_n\}$ donde $a_1 = \sqrt{k}$, $a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$, y $k > 0$.

a) Mostrar que $\{a_n\}$ es creciente y acotada.

b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe.

c) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

126. ***Media aritmética-geométrica*** Sea $a_0 > b_0 > 0$. Sea a_1 la media aritmética de a_0 y b_0 y sea b_1 la media geométrica de a_0 y b_0.

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad \text{Media aritmética}$$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} \qquad \text{Media geométrica}$$

Ahora defina las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ como sigue.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

a) Sea $a_0 = 10$ y $b_0 = 3$. Escriba los primeros cinco términos de $\{a_n\}$ y de $\{b_n\}$. Compare los términos de $\{b_n\}$. Compare a_n y b_n. ¿Qué se puede notar?

b) Use la inducción para mostrar que $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$, para $a_0 > b_0 > 0$.

c) Explicar por qué $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son ambos convergentes.

d) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

127. *a*) Sea $f(x) = \sin x$ y $a_n = n \operatorname{sen} 1/n$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n - f'(0) = 1.$$

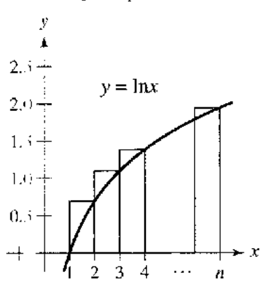
b) Sea $f(x)$ derivable en el intervalo $[0, 1]$ y $f(0) = 0$. Considerar la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = n\,f(1/n)$. Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = f'(0)$.

128. Considerar la sucesión $\{a_n\} = \{nr^n\}$. Decida si $\{a_n\}$ converge para todo valor r.

a) $r = \frac{1}{2}$ *b*) $r = 1$ *c*) $r = \frac{3}{2}$

d) ¿Para qué valores de r converge la sucesión $\{nr^n\}$?

129. *a*) Mostrar que $\int_1^n \ln x\,dx < \ln(n!)$ para $n \geq 2$.



b) Dibujar una gráfica similar a la que se muestra

$$\ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x\,dx.$$

c) Usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para mostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}, \text{ para } n > 1.$$

d) Usar el teorema del encaje o del emparedado para sucesiones y el resultado del apartado *c*) para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

e) Pruebe el resultado del apartado *d*) para $n = 20$, 50, y 100.

130. Considerar la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + (k/n)}\right\}$.

a) Escribir los primeros cinco términos de $\{a_n\}$.

b) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$ interpretando a_n como una suma Riemann de una integral definida.

131. Demostrar, mediante la definición del límite de una sucesión que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

132. Demostrar, usando la definición del límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ para $-1 < r < 1$.

133. Terminar la demostración del teorema 9.5.

Preparación del examen Putnam

134. Sea $\{x_n\}$, $n \geq 0$, una sucesión de números reales distintos de cero tal que $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que existe un número real a tal que $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

135. Sea $T_0 = 2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 6$, y, para $n \geq 3$,

$$T_n = (n + 4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n - 8)T_{n-3}.$$

Los primeros 10 términos de la sucesión son

2, 3, 6, 14, 40, 152, 784, 5 168, 40 576, 363 392.

Encuentre, con demostración, una fórmula para T_n de la forma $T_n = A_n + B_n$, donde $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ sean sucesiones muy conocidas.

Sección 9.2 Series y convergencia

- **Entender la definición de una serie infinita convergente.**
- **Usar propiedades de las series infinitas geométricas.**
- **Usar el criterio del término n-ésimo para la divergencia de una serie infinita.**

Series infinitas

Una aplicación importante de las sucesiones infinitas es la representación de "sumas infinitas". Informalmente, si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n + \cdot \cdot \cdot \qquad \text{Series infinitas.}$$

es una **serie infinita** (o simplemente una **serie**). Los números a_1, a_2, a_3, son los **términos** de la serie. En algunas series es conveniente empezar con el índice $n = 0$ (o algún otro entero). Como convenio de escritura, es común representar una serie infinita simplemente como $\Sigma\, a_n$. En tales casos, el valor inicial para el índice debe deducirse del contexto establecido.

Para encontrar la suma de una serie infinita, considere la siguiente **sucesión de sumas parciales**.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n$$

Si esta sucesión de sumas parciales converge, se dice que la serie converge y tiene la suma indicada en la definición siguiente.

SERIES INFINITAS

El estudio de las series infinitas fue considerado toda una novedad en el siglo XIV. El lógico Richard Suiseth, cuyo apodo era el Calculador, resolvió este problema.

Si durante la primera mitad de un intervalo de tiempo una variación tiene cierta intensidad, durante el siguiente cuarto la intensidad es el doble, en el siguiente octavo la intensidad en el triple, y así de forma infinita, *entonces, la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo.*

Esto es lo mismo que decir que la suma de las series infinitas

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdot \cdot \cdot + \frac{n}{2^n} + \cdot \cdot \cdot$$

es 2.

Definición de serie convergente y divergente

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la ***n*-ésima suma parcial** está dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n.$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**. El límite S se llama **suma de la serie**.

$$S = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n + \cdot \cdot \cdot$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie **diverge**.

AYUDA DE ESTUDIO A medida que se estudie este capítulo, se verá que hay dos preguntas básicas relacionadas con series infinitas. ¿Una serie converge o diverge? Si una serie converge, ¿cuál es su suma? Estas preguntas no siempre son fáciles de contestar, sobre todo la segunda.

Encontrar la suma de una serie infinita Hallar la suma de cada serie infinita. Explique su razonamiento.

a) $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdot \cdot \cdot$

b) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdot \cdot \cdot$

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdot \cdot \cdot$

d) $\frac{15}{100} + \frac{15}{10\,000} + \frac{15}{1\,000\,000} + \cdot \cdot \cdot$

TECNOLOGÍA La figura 9.5 muestra las primeras 15 sumas parciales de la serie infinita en el ejemplo 1*a*. Observe cómo los valores parecen tender hacia la recta $y = 1$.

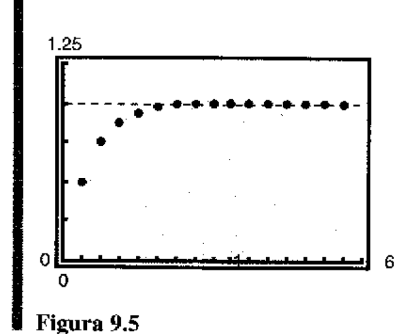


Figura 9.5

EJEMPLO 1 Serie convergente y divergente

a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

tiene las sumas parciales siguientes.

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

se sigue que la serie converge y su suma es 1.

b) La n-ésima suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

está dada por

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como el límite de S_n es 1, la serie converge y su suma es 1.

c) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

diverge porque $S_n = n$ y la sucesión de sumas parciales divergen.

NOTA Puede determinar geométricamente las sumas parciales de la serie del ejemplo 1*a* usando la figura 9.6.

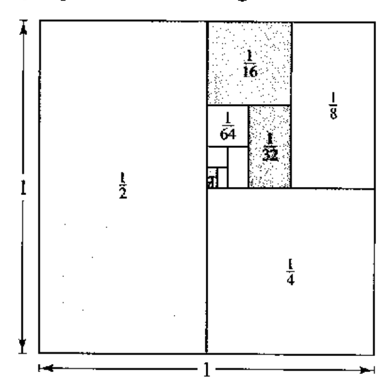


Figura 9.6

La serie en el ejemplo 1*b* es una **serie telescópica** de la forma

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots. \quad \text{Serie telescópica.}$$

Nótese que b_2 es cancelada por el segundo término, b_3 es cancelada por el tercer término, y así sucesivamente. Como la suma parcial n-ésima de esta serie es

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

se sigue que una serie telescópica convergerá si y sólo si b_n tiende a un número finito como $n \to \infty$. Es más, si la serie converge, su suma es

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más sobre las sumas parciales de series infinitas, vea el artículo "Six Ways to Sum a Series" de Dan Kalman en *The College Mathematics Journal.*

EJEMPLO 2 Expresar una serie en forma telescópica

Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$.

Solución
Usando fracciones parciales, puede escribirse

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

En esta forma telescópica, puede verse que la n-ésima suma parcial es

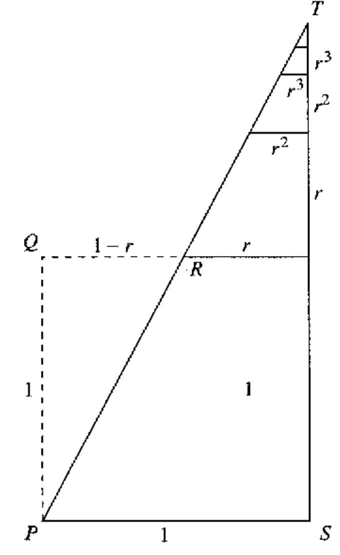
$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdot \cdot \cdot + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

Así pues, la serie converge y su suma es 1. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1.$$

EXPLORACIÓN

En "Proof Without Words" de Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens, los autores presentan el diagrama siguiente. Explique por qué la última afirmación bajo el diagrama es válida. ¿Cómo está relacionado este resultado con el teorema 9.6?



$\Delta PQR \approx \Delta TSP$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdot \cdot \cdot = \frac{1}{1-r}$$

Ejercicio tomado de "Proof Without Words" de Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens, *Mathematics Magazine*, octubre de 1988, con permiso de los autores.

Series geométricas

La serie dada en el ejemplo 1*a* es una **serie geométrica**. En general, la serie dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdot \cdot \cdot + ar^n + \cdot \cdot \cdot, \quad a \neq 0 \qquad \text{Serie geométrica.}$$

es una **serie geométrica** de razón r.

TEOREMA 9.6 Convergencia de una serie geométrica

Una serie geométrica de razón r diverge si $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1.$$

Demostración Es fácil ver que la serie diverge si $r = \pm 1$. Si $r \neq \pm 1$, entonces $S_n = a + ar + ar^2 + \cdot \cdot \cdot + ar^{n-1}$. Multiplicando por r se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdot \cdot \cdot + ar^n.$$

Restando la segunda ecuación de la primera resulta $S_n - rS_n = a - ar^n$. Por consiguiente, $S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$, y la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{a}{1-r}(1 - r^n).$$

Si $0 < |r| < 1$, se sigue que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a}{1-r}(1 - r^n)\right] = \frac{a}{1-r}\left[\lim_{n\to\infty} (1 - r^n)\right] = \frac{a}{1-r}$$

lo cual significa que la serie es *convergente* y que su suma es $a/(1 - r)$. Se deja al lector la demostración de que la serie diverge cuando $|r| > 1$.

TECNOLOGÍA Probar usando una calculadora o escribiendo un programa de computadora calcular la suma de los primeros 20 términos de la sucesión en el ejemplo 3*a*. Se debe obtener una suma de aproximadamente 5.999994.

EJEMPLO 3 Series geométricas convergentes y divergentes

a) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= 3(1) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

tiene razón $r = \frac{1}{2}$ con $a = 3$. Como $0 < |r| < 1$, la serie converge y su suma es

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(1/2)} = 6.$$

b) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$$

tiene razón de $r = \frac{3}{2}$. Como $|r| \geq 1$, la serie diverge.

La fórmula para la suma de una serie geométrica puede usarse para escribir un decimal periódico como el cociente de dos enteros, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 4 Series geométricas para un decimal periódico

Usar una serie geométrica para expresar $0.\overline{08}$ como cociente de dos enteros.

Solución El decimal $0.\overline{08}$ periódico se puede escribir

$$0.080808\ldots = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right)^n.$$

En esta serie, se tiene $a = 8/10^2$ y $r = 1/10^2$. Así que,

$$0.080808\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{8/10^2}{1-(1/10^2)} = \frac{8}{99}.$$

Pruebe dividir 8 entre 99 en una calculadora para ver que resulta $0.\overline{08}$.

La convergencia de una serie no es afectada por la eliminación de un número finito de términos iniciales de la serie. Por ejemplo, las series geométricas

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ambas convergen. Además, como la suma de la segunda serie es $a/(1-r) = 2$, se puede concluir que la suma de la primera serie es

$$S = 2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]$$
$$= 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}.$$

AYUDA DE ESTUDIO Al estudiar este capítulo es importante distinguir entre una serie infinita y una sucesión. Una sucesión es una colección ordenada de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

mientras que una serie es una suma infinita de los términos de una sucesión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Las propiedades siguientes son consecuencias directas de las propiedades correspondientes de límites de sucesiones.

TEOREMA 9.7 Propiedades de series infinitas

Si $\Sigma\, a_n = A$, $\Sigma\, b_n = B$, y c es un número real, entonces las series siguientes convergen a las sumas indicadas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

El siguiente teorema establece que si una serie converge, el límite de su término n-ésimo debe ser 0.

NOTA Asegúrese de ver que el recíproco del teorema 9.8 generalmente no es verdad. Es decir, si la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0, entonces la serie $\Sigma\, a_n$ puede converger o puede divergir.

TEOREMA 9.8 Límite del término *n*-ésimo de una serie convergente

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = L.$$

Entonces, como $S_n = S_{n-1} + a_n$ y

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$$

se sigue que

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= L + \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

lo cual implica que $\{a_n\}$ converge a 0.

El contrarrecíproco del teorema 9.8 proporciona un criterio útil para demostrar la divergencia. Este **criterio del término *n*-ésimo para la divergencia** establece que si el límite del término n-ésimo de una serie *no* converge a 0, la serie debe divergir.

TEOREMA 9.9 Criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

EJEMPLO 5 Aplicación del criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

a) En la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Así pues, el límite del término n-ésimo no es 0, y la serie diverge.

b) En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n! + 1}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n! + 1} = \frac{1}{2}.$$

Así pues, el límite del término n-ésimo no es 0, y la serie diverge.

c) En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Como el límite del término n-ésimo es 0, el criterio del término n-ésimo para la divergencia no es aplicable y no se puede dibujar ninguna conclusión sobre convergencia o divergencia. (En la próxima sección se verá que esta serie particular diverge.)

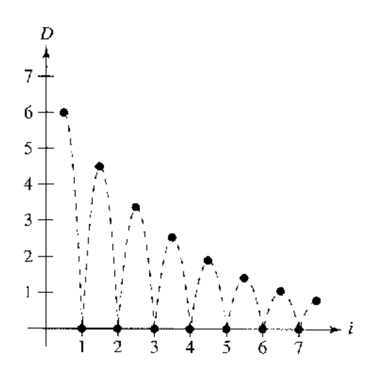
AYUDA DE ESTUDIO La serie del ejemplo 5*c* jugará un papel importante en este capítulo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdot \cdot \cdot$$

Se verá que esta serie diverge aunque el término n-ésimo tienda a 0 cuando n tiende ∞.

EJEMPLO 6 Problema de la pelota que bota

Una pelota se deja caer de una altura de 6 pies y empieza a botar, como se muestra en la figura 9.7. La altura de cada salto es de tres cuartos la altura del salto anterior. Encontrar la distancia vertical total recorrida por la pelota.



La altura de cada salto es tres cuartos la altura del salto anterior
Figura 9.7

Solución Cuando la pelota toca por primera vez el suelo, ha recorrido una distancia de $D_1 = 6$ pies. Para los saltos subsecuentes, sea D_i la distancia recorrida al subir y bajar. Por ejemplo, D_2 y D_3 son como sigue.

$$D_2 = \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Subida}} + \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Bajada}} = 12\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

$$D_3 = \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Subida}} + \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Bajada}} = 12\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

Continuando este proceso, puede determinarse que la distancia total vertical recorrida es

$$\begin{aligned}
D &= 6 + 12\left(\tfrac{3}{4}\right) + 12\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \cdot \cdot \cdot \\
&= 6 + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n+1} \\
&= 6 + 12\left(\tfrac{3}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \\
&= 6 + 9\left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) \\
&= 6 + 9(4) \\
&= 42 \text{ pies.}
\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 9.2

En los ejercicios 1 a 6, encontrar los primeros cinco términos de la sucesión de las sumas parciales.

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$

2. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \cdots$

3. $3 - \frac{9}{2} + \frac{27}{4} - \frac{81}{8} + \frac{243}{16} - \cdots$

4. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

En los ejercicios 7 a 16, verificar que la serie infinita diverge.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} 1\,000(1.055)^n$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1.03)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

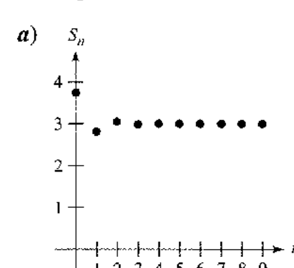
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

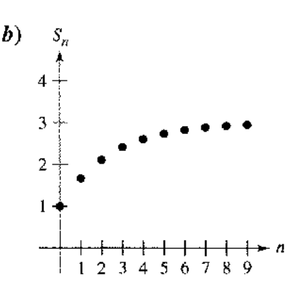
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

En los ejercicios 17 a 22, asignar la serie a la gráfica de su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).] Use la gráfica para estimar la suma de la serie. Confirme su respuesta analíticamente.

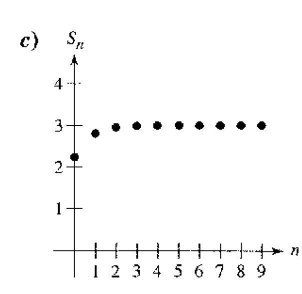
a)



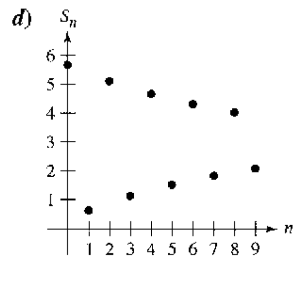
b)



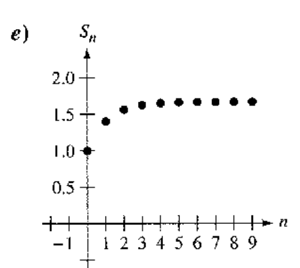
c)



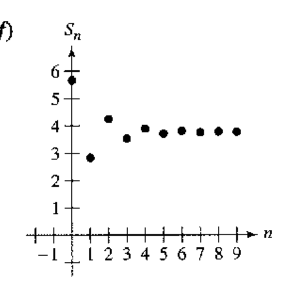
d)



e)



f)



17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

En los ejercicios 23 a 28, verificar que la serie infinita converge.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Usar fracciones parciales.)

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (Usar fracciones parciales.)

25. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n = 1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + \cdots$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} (-0.6)^n = 1 - 0.6 + 0.36 - 0.216 + \cdots$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 29 a 34, *a*) hallar la suma de la serie, *b*) usar una calculadora para encontrar la suma parcial S_n indicada y completar la tabla, *c*) usar una calculadora y representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma, y *d*) explicar la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y la tasa a la que la sucesión de sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.**

n	5	10	20	50	100
S_n					

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.9)^{n-1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} 3(0.85)^{n-1}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} 10(0.25)^{n-1}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

En los ejercicios 35 a 50, encontrar la suma de la serie convergente.

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n+1)(n+2)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} 6\left(\frac{4}{5}\right)^n$

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

42. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

43. $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$

44. $8 + 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \cdots$

45. $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots$

46. $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots$

47. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} [(0.7)^n + (0.9)^n]$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen } 1)^n$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$

En los ejercicios 51 a 56, *a*) expresar el decimal periódico como una serie geométrica y *b*) expresar su suma como el cociente de dos enteros.

51. $0.\overline{4}$

52. $0.\overline{9}$

53. $0.\overline{81}$

54. $0.\overline{01}$

55. $0.0\overline{75}$

56. $0.2\overline{15}$

En los ejercicios 57 a 72, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

63. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$

64. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

65. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.075)^n$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{100}$

67. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Desarrollo de conceptos

73. Establecer las definiciones de serie convergente y divergente.

74. Describir la diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

75. Definir una serie geométrica, establecer cuándo converge, y dar la fórmula para la suma de una serie geométrica convergente.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

76. Dé el criterio del término n-ésimo para la divergencia.

77. Sea $a_n = \frac{n+1}{n}$. Discutir la convergencia de $\{a_n\}$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

78. Explicar todas las diferencias entre las series siguientes.

a) $\sum_{n=}^{\infty} a_n$ *b*) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *c*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$

En los ejercicios 79 a 86, encontrar todos los valores de x para los cuales las series convergen. Para estos valores de x, escribir la suma de la serie como una función de x.

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$

82. $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{x-3}{4}\right)^n$

83. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

84. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

85. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)^n$

87. *a*) Anular un número finito de términos de una serie divergente. ¿La nueva serie todavía divergirá? Explique su razonamiento.

b) Agregue un número finito de términos a una serie convergente. ¿La nueva serie todavía convergerá? Explique su razonamiento.

88. ***Para pensar*** Considere la fórmula

$$\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Dados $x = -1$ y $x = 2$, ¿se puede concluir que alguna de las afirmaciones siguientes son verdaderas? Explique su razonamiento.

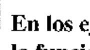
a) $\frac{1}{2} = -1 + 1 - 1 + \cdots$

b) $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) hallar la razón común a las series geométricas, *b*) escribir la función que da la suma de la serie, y *c*) usar una calculadora para representar la función y las sumas parciales S_3 y S_5. ¿Qué nota?

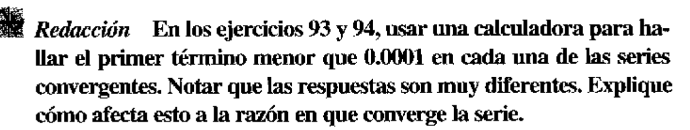
89. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

90. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots$



En los ejercicios 91 y 92, usar una calculadora para representar la función. Identicar la asíntota horizontal de la gráfica y determinar su relación con la suma de la serie.

	Función	*Series*
91.	$f(x) = 3\left[\frac{1-(0.5)^x}{1-0.5}\right]$	$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$
92.	$f(x) = 2\left[\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right]$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$



Redacción **En los ejercicios 93 y 94, usar una calculadora para hallar el primer término menor que 0.0001 en cada una de las series convergentes. Notar que las respuestas son muy diferentes. Explique cómo afecta esto a la razón en que converge la serie.**

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$ **94.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.01)^n$

95. ***Comercio*** Un fabricante de juegos electrónicos que produce un nuevo producto estima que las ventas anuales serán 8 000 unidades. Cada año 10% de las unidades que se han vendido dejan de funcionar. Así pues, 8 000 unidades estarán en uso después de un año, [8 000 + 0.9(8 000)] unidades estarán en uso después de 2 años, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?

96. ***Depreciación*** Una compañía compra una máquina por $225 000, la cual se deprecia a un ritmo o velocidad de 30% por año. Encontrar una fórmula para el valor de la máquina después de n años. ¿Cuál es su valor después de 5 años?

97. ***Efecto multiplicador*** El ingreso anual por turismo en una ciudad es de $100 millones. Aproximadamente 75% de ese ingreso se reinvierte en la ciudad, y de esa cantidad aproximadamente 75% se reinvierte en la misma ciudad, y así sucesivamente. Escriba la serie geométrica que da la cantidad total de gasto generado por los $100 millones y encuentre la suma de la serie.

98. ***Efecto del multiplicador*** Repita el ejercicio 97 si el porcentaje del ingreso que es gastado de nuevo en la ciudad decrece a 60%.

99. ***Distancia*** Una pelota se deja caer de una altura de 16 pies. Cada vez que cae desde h pies, rebota $0.81h$ pies. Encuentre la distancia total recorrida por la pelota.

100. ***Tiempo*** La pelota en el ejercicio 99 tarda los tiempos siguientes en cada caída.

$$\begin{aligned}
s_1 &= -16t^2 + 16, & s_1 &= 0 \text{ si } t = 1\\
s_2 &= -16t^2 + 16(0.81), & s_2 &= 0 \text{ si } t = 0.9\\
s_3 &= -16t^2 + 16(0.81)^2, & s_3 &= 0 \text{ si } t = (0.9)^2\\
s_4 &= -16t^2 + 16(0.81)^3, & s_4 &= 0 \text{ si } t = (0.9)^3\\
&\vdots & &\vdots\\
s_n &= -16t^2 + 16(0.81)^{n-1}, & s_n &= 0 \text{ si } t = (0.9)^{n-1}
\end{aligned}$$

Empezando con s_2, la pelota toma la misma cantidad de tiempo para botar hacia arriba que para caer, de tal modo que el tiempo total que tarda hasta quedar en reposo está dado por

$$t = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^n.$$

Encuentre este tiempo total.

Probabilidad **En los ejercicios 101 y 102, la variable aleatoria n representa el número de unidades de un producto vendidas por día en una tienda. La distribución de probabilidad de n está dada por $P(n)$. Calcular la probabilidad de que se vendan dos unidades en un día determinado [$P(2)$] y demostrar que $P(1) + P(2) + P(3) + \cdots = 1$.**

101. $P(n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **102.** $P(n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

103. ***Probabilidad*** Una moneda es lanzada repetidamente. La probabilidad de que se obtenga la primera cara en el lanzamiento n-ésimo está dada por $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donde $n \geq 1$.

a) Mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

b) El número esperado de lanzamientos requiridos hasta que la primera cara ocurra en el experimento está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

¿Es geométrica esta serie?

c) Usar un sistema algebraico de computadora para encontrar la suma en el apartado *b*).

104. ***Probabilidad*** En un experimento, tres personas lanzan una moneda, y una de ellas cae cara. Determine, para cada persona, la probabilidad que él o ella lance la primera cara. Verifique que la suma de las tres probabilidades es 1.

105. ***Área*** Los lados de un cuadrado son de 16 pulgadas de longitud. Un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original, y dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados (vea la figura). Determine el área de las regiones sombreadas *a*) si este proceso se repite cinco veces más y *b*) si este patrón de sombreado se repite infinitamente.

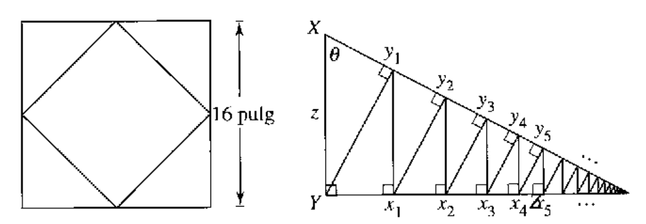


Figura para 105 **Figura para 106**

106. ***Longitud*** Un triángulo rectángulo XYZ se muestra arriba, donde $|XY| = z$ y $\angle X = \theta$. Segmentos de recta son continuamente dibujados perpendiculares al triángulo, como se muestra en la figura.

a) Hallar la longitud total de los segmentos perpendiculares $|Yy_1| + |x_1y_1| + |x_1y_2| + \cdots$ en términos de z y θ.

b) Si $z = 1$ y $\theta = \pi/6$, encuentre la longitud total de los segmentos perpendiculares.

En los ejercicios 107 a 110, usar la fórmula para la n-ésima suma parcial de una serie geométrica.

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

107. ***Valor presente*** El ganador de $1 000 000 de una lotería se le pagará $50 000 por año durante 20 años. El dinero gana 6% de interés por año. El valor presente de las ganancias son

$$\sum_{n=1}^{20} 50\,000\left(\frac{1}{1.06}\right)^n.$$

Calcular el valor presente e interpretar su significado.

108. ***Copo esférico*** Un copo esférico (mostrado abajo) es un fractal generado por computadora creado por Eric Haines. El radio de la esfera grande es 1. A la esfera grande se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{3}$. A cada una de éstas se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{9}$. Este proceso es infinitamente continuo. Demuestre que el copo esférico tiene una superficie de área infinita.

Eric Haines

109. ***Salario*** Usted va a trabajar en una compañía que paga 0.01 de dólar el primer día, 0.02 el segundo, 0.04 el tercero, y así sucesivamente. Si el salario se mantiene así, doblándose cada día, ¿cuánto habrá cobrado en total por trabajar *a*) 29 días, *b*) 30 días y *c*) 31 días?

110. ***Anualidades*** Al recibir a fin de mes su paga, un empleado invierte P dólares en un plan de pensiones. Los depósitos se hacen cada mes durante t años y la cuenta gana interés a un ritmo o tasa porcentual anual r. Si el interés es compuesto mensualmente, la cantidad A en la cuenta al final de t años es

$$A = P + P\left(1 + \frac{r}{12}\right) + \cdot \cdot \cdot + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t-1}$$
$$= P\left(\frac{12}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - 1\right].$$

Si el interés es compuesto continuo, la cantidad A en la cuenta después de t años es

$$A = P + Pe^{r/12} + Pe^{2r/12} + Pe^{(12t-1)r/12}$$
$$= \frac{P(e^{rt} - 1)}{e^{r/12} - 1}.$$

Verifique las fórmulas para las sumas dadas.

Anualidades **En los ejercicios 111 a 114, considerar que se efectúan depósitos mensuales de P dólares en una cuenta de ahorro a una tasa de interés anual r. Use los resultados del ejercicio 110 para encontrar el balance A después de t años si el interés se compone *a*) mensualmente y *b*) continuamente.**

111. $P = \$50$, $r = 3\%$, $t = 20$ años

112. $P = \$75$, $r = 5\%$, $t = 25$ años

113. $P = \$100$, $r = 4\%$, $t = 40$ años

114. $P = \$20$, $r = 6\%$, $t = 50$ años

115. ***Modelo matemático*** Las ventas anuales a_n (en millones de dólares) de los productos de Avon, Inc. de 1993 a 2002 se dan abajo como pares ordenados de la forma (n, a_n), donde n representa el año, y $n = 3$ corresponde a 1993. *(Fuente: 2002 Avon Products, Inc. Annual Report)*

(3, 3 844), (4, 4 267), (5, 4 492), (6, 4 814), (7, 5 079),
(8, 5 213), (9, 5 289), (10, 5 682), (11, 5 958), (12, 6 171)

a) Usar la función de regresión de una calculadora para encontrar un modelo de la forma

$$a_n = ce^{kn}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots, 12$$

para los datos. Gráficamente compare los puntos y el modelo.

b) Usar los datos para encontrar las ventas totales en un periodo de 10 años.

c) Aproximar las ventas totales en un periodo de 10 años usando la fórmula para la suma de una serie geométrica. Compare el resultado con el apartado *b*).

116. ***Salario*** Usted acepta un trabajo que paga un sueldo de \$40 000 por el primer año. Durante los próximos 39 años usted recibe un 4% de aumento cada año. ¿Cuál sería su compensación total sobre un periodo de 40 años?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 117 a 122, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que lo demuestre.**

117. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

118. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L + a_0$.

119. Si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{(1 - r)}$.

120. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000(n + 1)}$ diverge.

121. $0.75 = 0.749999\ldots$

122. Cada decimal con un conjunto de dígitos periódico es un número racional.

123. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede expresarse en forma telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(c - S_{n-1}) - (c - S_n)]$$

donde $S_0 = 0$ y S_n es la n-ésima suma parcial.

124. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie convergente, y sea

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdot \cdot \cdot$$

el resto de la serie después de los N primeros términos. Demostrar que $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$.

125. Encontrar dos series infinitas $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma(a_n + b_n)$ converja.

126. Dadas dos series infinitas $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma\, a_n$ converge y $\Sigma\, b_n$ diverge, demostrar que $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge.

127. Suponer que $\Sigma\, a_n$ diverge y c es una constante distinta de cero. Demostrar que $\Sigma\, ca_n$ diverge.

128. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, donde a_n es distinta de cero, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

129. La sucesión de Fibonacci se define recurrentemente mediante $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

a) Mostrar que $\frac{1}{a_{n+1}\,a_{n+3}} = \frac{1}{a_{n+1}\,a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+2}\,a_{n+3}}$.

b) Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}\,a_{n+3}} = 1$.

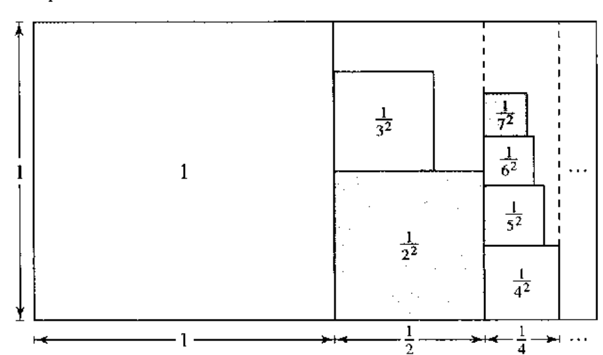
130. Encontrar los valores de x para la cual la serie infinita

$1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + \cdot \cdot \cdot$

converge. ¿Cuál es la suma cuando la serie converge?

131. Demostrar que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdot \cdot \cdot = \frac{1}{r-1}$, para $|r| > 1$.

132. ***Redacción*** La figura de abajo representa una manera informal de demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$. Explique cómo la figura implica esta conclusión.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este ejercicio, vea el artículo "Convergence with Pictures" de P.J. Rippon en *American Mathematical Monthly.*

133. ***Redacción*** Lea el artículo "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages" de Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley en *Mathematics Teacher.* Después escriba un párrafo sobre cómo una sucesión geométrica puede usarse para encontrar la cantidad total de una droga que permanece en el sistema de un paciente después de que han sido administradas n dosis iguales (en iguales intervalos de tiempo).

Representación del examen Putnam

134. Expresar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)}$ como un número racional.

135. Sea $f(n)$ la suma de los primeros n términos de la sucesión 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, . . . , dónde el término n-ésimo está dado por

$$a_n = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ (n-1)/2, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

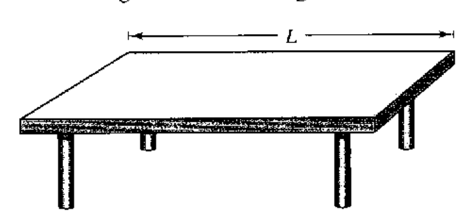
Mostrar que si x y y son enteros positivos y $x > y$, entonces $xy = f(x+y) - f(x-y)$.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition.

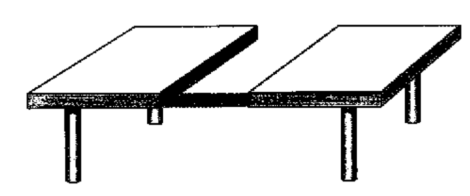
Proyecto de trabajo: La mesa que desaparece de Cantor

El procedimiento siguiente muestra cómo hacer desaparecer una mesa ¡quitando sólo la mitad de ésta!

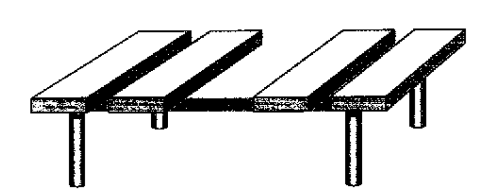
a) La mesa original tiene una longitud L.



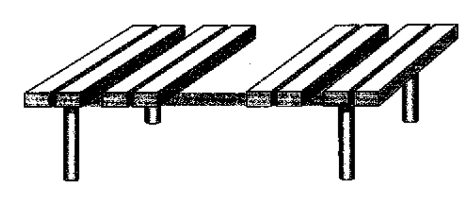
b) Eliminar $\frac{1}{4}$ de la mesa centrándose en el punto medio. Cada parte restante tiene una longitud menor de $\frac{1}{2}L$.



c) Eliminar $\frac{1}{8}$ de la mesa tomando secciones de $\frac{1}{16}L$ de longitud de la parte central de cada una de las dos piezas restantes. Ahora, se ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ de la mesa. Cada pieza restante tiene una longitud menor de $\frac{1}{4}L$.



d) Eliminar $\frac{1}{16}$ de la mesa tomando secciones de longitud $\frac{1}{64}L$ de las partes centrales de cada uno de los cuatro fragmentos restantes. Ahora, usted ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ de la mesa. Cada trozo restante tiene una longitud menor de $\frac{1}{8}L$.



Continuando este proceso ¿ocasionará que desaparezca la mesa, aunque se haya eliminado sólo la mitad? ¿Por qué?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Lea el artículo "Cantor's Disappearing Table" de Larry E. Knop en *The College Mathematics Journal.*

Sección 9.3 Criterio de la integral y series p

- **Empleo del criterio de la integral para determinar si una serie infinita converge o diverge.**
- **Uso de las propiedades de las series p y de las series armónicas.**

El criterio de la integral

En esta sección y en la siguiente, se estudiarán varios criterios de convergencia que aplican a las series con términos *positivos*.

TEOREMA 9.10 El criterio de la integral

Si f es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

o ambas convergen o ambas divergen.

Demostración Comenzamos dividiendo el intervalo $[1, n]$ en $n - 1$ subintervalos de longitud unidad o unitaria, como se muestra en la figura 9.8. Las áreas totales de los rectángulos inscritos y los rectángulos circunscritos son

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \qquad \text{Área inscrita.}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \qquad \text{Área circunscrita.}$$

El área exacta bajo la gráfica de f para $x = 1$ a $x = n$ se encuentra entre las áreas inscrita y circunscrita.

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

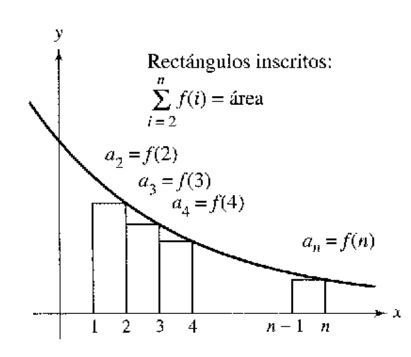
Empleando la n-ésima suma parcial $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, se puede escribir esta desigualdad como

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

Ahora, suponiendo que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge a L, se sigue que para $n \geq 1$

$$S_n - f(1) \leq L \quad \Longrightarrow \quad S_n \leq L + f(1).$$

Por consiguiente, $\{S_n\}$ es acotada y monótona, y por el teorema 9.5 converge. Por consiguiente, $\Sigma\, a_n$ converge. Para la otra dirección de la demostración, asuma que la integral impropia diverge. Entonces $\int_1^n f(x)\,dx$ tiende a infinito cuando $n \to \infty$, y la desigualdad $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\,dx$ implica que $\{S_n\}$ diverge. Así pues, $\Sigma\, a_n$ diverge.



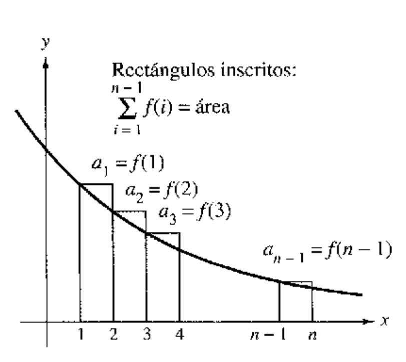


Figura 9.8

NOTA Recuerde que la convergencia o divergencia de $\Sigma\, a_n$ no se ve afectada al anular los primeros N términos. Análogamente, si las condiciones para el criterio de la integral se satisfacen para todo $x \geq N > 1$, se puede simplemente usar la integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ como criterio de convergencia o divergencia. (Esto se ilustra en el ejemplo 4.)

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de la integral

Aplique el criterio de la integral a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

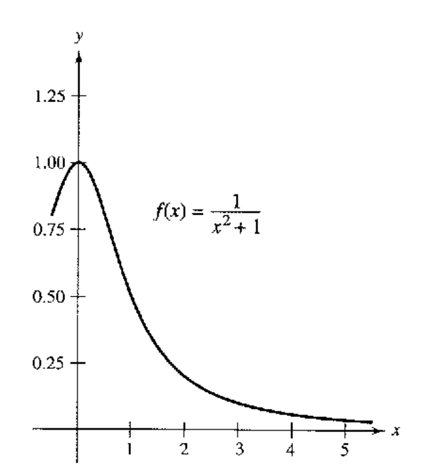
Solución La función $f(x) = x/(x^2+1)$ es positiva y continua para $x \geq 1$. Para determinar si f es decreciente, encuentre la derivada.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Así, $f'(x) < 0$ para $x > 1$ y se sigue que f satisface las condiciones del criterio de la integral. Se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^b \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(b^2+1) - \ln 2\right] \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Por tanto, la serie *diverge*.



Como la integral impropia converge, la serie infinita también converge
Figura 9.9

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la integral

Aplique el criterio de la integral a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Solución Como $f(x) = 1/(x^2+1)$ satisface las condiciones para el criterio de la integral (verificar), se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por tanto, la serie *converge* (ver figura 9.9).

TECNOLOGÍA En el ejemplo 2, el hecho de que la integral impropia converja a $\pi/4$ no implica que la serie infinita converja a $\pi/4$. Para aproximar la suma de la serie, se puede usar la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} + \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

(Ver ejercicio 60.) Entre mayor sea el valor N, mejor es la aproximación. Por ejemplo, usando $N = 200$ se obtiene $1.072 \leq \Sigma 1/(n^2+1) \leq 1.077$.

Series p y series armónicas

En el resto de esta sección se investigará un segundo tipo de serie que admite un criterio aritmético de convergencia o divergencia muy sencillo. Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \qquad \text{Serie } p.$$

es una **serie p** dónde p es una constante positiva. Para $p = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{Serie armónica.}$$

es la serie **armónica**. Una **serie armónica general** es de la forma $\Sigma 1/(an + b)$. En música, las cuerdas del mismo material, diámetro y tensión cuyas longitudes forman una serie armónica producen tonos armónicos.

El criterio de la integral es adecuado para establecer la convergencia o divergencia de las series p. Esto se muestra en la demostración del teorema 9.11.

SERIE ARMÓNICA

Pitágoras y sus discípulos prestaron minuciosa atención al desarrollo de la música como una ciencia abstracta. Esto llevó al descubrimiento de la relación entre el tono y la longitud de la cuerda vibrante. Se observó que las armonías musicales más hermosas correspondían a las proporciones más simples de números enteros. Matemáticos posteriores desarrollaron esta idea en la serie armónica donde los términos de la serie armónica corresponden a los nodos en una cuerda vibrante que produce múltiplos de la frecuencia fundamental. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es el doble de la frecuencia fundamental, $\frac{1}{3}$ es el triple de la frecuencia, y así sucesivamente.

TEOREMA 9.11 Convergencia de series p

La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

1. converge si $p > 1$, y
2. diverge si $0 < p \leq 1$.

Demostración La demostración que se sigue del teorema de la integral y del teorema 8.5 establece que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$.

EJEMPLO 3 Serie p convergente y divergente

Discuta la convergencia o divergencia de *a*) la serie armónica y *b*) la serie p con $p = 2$.

Solución

***a*)** Del teorema 9.11, se sigue que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad p = 1$$

diverge.

***b*)** Del teorema 9.11, sigue que la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \qquad p = 2$$

converge.

NOTA La suma de la serie del ejemplo 3*b* puede mostrarse que es $\pi^2/6$. (Esto fue demostrado por Leonhard Euler, pero la demostración es demasiado difícil para presentarla aquí.) Asegúrese de ver que el criterio de la integral no dice que la suma de la serie sea igual al valor de la integral. Por ejemplo, la suma de la serie en el ejemplo 3*b* es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$$

pero el valor de la integral impropia correspondiente es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

EJEMPLO 4 Análisis de la convergencia de una serie

Determine si la siguiente serie converge o diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Solución Esta serie es similar a la serie armónica divergente. Si sus términos fueran mayores que los de la serie armónica, se esperaría que fuera divergente. Sin embargo, como sus términos son menores, no se sabe qué esperar. La función $f(x) = 1/(x \ln x)$ es positiva y continua para $x \geq 2$. Para determinar si f es decreciente, primero se escribe f como $f(x) = (x \ln x)^{-1}$ y después se encuentra su derivada.

$$f'(x) = (-1)(x \ln x)^{-2}(1 + \ln x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2(\ln x)^2}$$

Así, $f'(x) < 0$ para $x > 2$ y se sigue que f satisface las condiciones para el criterio integral.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x}\, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \Big[\ln(\ln x) \Big]_2^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty$$

La serie diverge .

NOTA La serie infinita en el ejemplo 4 diverge muy lentamente. Por ejemplo, la suma de los primeros 10 términos es aproximadamente 1.6878196, y la suma de los primeros 100 términos es sólo un poco más grande: 2.3250871. La suma de los primeros 10 000 términos es aproximadamente 3.015021704. Se puede ver que aunque la serie infinita "suma hacia el infinito", lo hace muy lentamente.

Ejercicios de la sección 9.3

En los ejercicios 1 a 18, aplicar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n/2}$

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \cdots$

6. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

7. $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \cdots$

8. $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} + \frac{\ln 4}{\sqrt{4}} + \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} + \frac{\ln 6}{\sqrt{6}} + \cdots$

9. $\frac{1}{\sqrt{1}(\sqrt{1}+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} + \cdots$

10. $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{12} + \cdots + \frac{n}{n^2+3} + \cdots$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

En los ejercicios 19 y 20, aplicar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie donde k es un entero positivo.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + c}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$

En los ejercicios 21 a 24, explicar por qué el criterio de la integral no aplica a la serie.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos n$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen} n}{n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2$

En los ejercicios 25 a 28, aplicar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie p.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

En los ejercicios 29 a 36, usar el teorema 9.11 para determinar la convergencia o divergencia de la serie p.

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{5/3}}$

31. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

32. $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25} + \cdots$

33. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

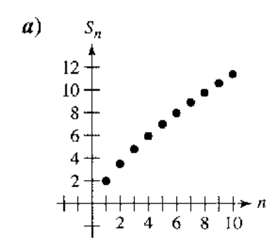
34. $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} + \cdots$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.04}}$

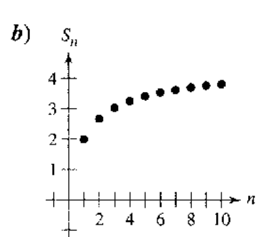
36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$

En los ejercicios 37 a 42, asignar la serie a la gráfica de la sucesión de sus sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).] Determine la convergencia o divergencia de la serie.

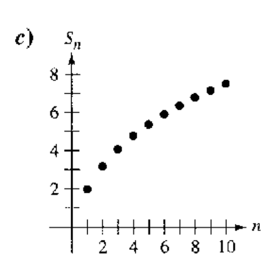
a)



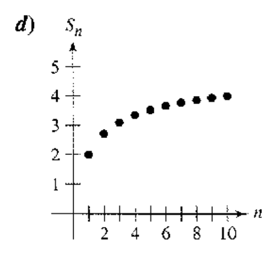
b)



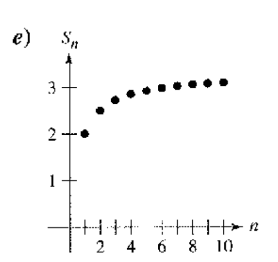
c)



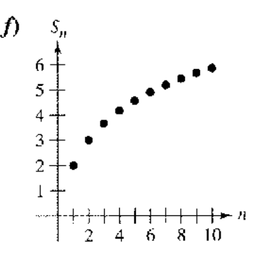
d)



e)



f)



37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{n^3}}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^{\pi}}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{n^2}}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

43. ***Análisis numérico y gráfico*** Usar una calculadora para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla. Entonces usar una calculadora para representar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales. En cada caso compare el ritmo o velocidad a la cual la sucesión de las sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.

n	5	10	20	50	100
S_n					

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{15}{4}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

44. ***Razonamiento numérico*** Como la serie armónica diverge, se sigue que para cualquier número real positivo M existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > M.$$

a) Usar una calculadora para completar la tabla.

M	2	4	6	8
N				

b) Conforme el número real M crece a incrementos iguales, ¿N crece también a incrementos iguales? Explique.

Desarrollo de conceptos

45. Enunciar el criterio de la integral y dar un ejemplo de su uso.

46. Definir una serie p y enuncie los requisitos para su convergencia.

47. Un amigo de la clase de cálculo le dice que la serie siguiente converge porque los términos son muy pequeños y se aproximan a 0 rápidamente. ¿Está su amigo en lo correcto? Explique.

$$\frac{1}{10\,000} + \frac{1}{10\,001} + \frac{1}{10\,002} + \cdots$$

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

48. En los ejercicios 37 a 42, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ para todas las series pero no todas convergen. ¿Es ésta una contradicción del teorema 9.9? Por qué algunas convergen y otras divergen? Explique.

49. Use una gráfica para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

¿Qué puede concluir sobre la convergencia o divergencia de la serie? Explique.

50. Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, tal que $a_n = f(n)$. Use una gráfica para ordenar las cantidades siguientes en orden decreciente. Explique su razonamiento.

a) $\sum_{n=2}^{7} a_n$ *b*) $\int_1^7 f(x)\,dx$ *c*) $\sum_{n=1}^{6} a_n$

En los ejercicios 51 a 54, encuentre los valores positivos de p para la cual la serie converge.

51. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ **52.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$ **54.** $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

En ejercicios 55 a 58, usar el resultado del ejercicio 51 para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

55. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ **56.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{(\ln n)^2}}$

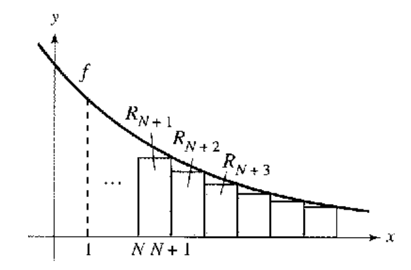
57. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ **58.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^2)}$

59. Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, tal que $a_n = f(n)$. Demostrar que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge a S, entonces el residuo $R_N = S - S_N$ está acotado por

$$0 \leq R_N \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$$



60. Mostrar que el resultado del ejercicio 59 puede escribirse como

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} a_n + \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$$

En los ejercicios 61 a 66, usar el resultado del ejercicio 59 para aproximar la suma de la serie convergente usando el número indicado de términos. Incluya una estimación del error máximo en su aproximación.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, seis términos

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$, cuatro términos

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, diez términos

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^3}$, diez términos

65. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$, cuatro términos

66. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$, cuatro términos

En los ejercicios 67 a 72, usar el resultado del ejercicio 59 para encontrar N tal que $R_N \leq 0.001$ en las series convergentes.

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ **68.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n}$ **70.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n/2}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **72.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+5}$

73. *a*) Mostrar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ converge y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

b) Comparar los primeros cinco términos de cada serie del apartado *a*).

c) Hallar $n > 3$ tal que

$$\frac{1}{n^{1.1}} < \frac{1}{n \ln n}.$$

74. Se usan diez términos para aproximar una serie p convergente. Por consiguiente, el resto es una función de p y es

$$0 \leq R_{10}(p) \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \quad p > 1.$$

a) Realizar la integración en la desigualdad.

b) Usar una calculadora para representar gráficamente la desigualdad.

c) Identificar cualquier asíntota de la función error e interpretar su significado.

75. ***Constante de Euler*** Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a) Mostrar que $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.

b) Mostrar que la sucesión $\{a_n\} = \{S_n - \ln n\}$ es acotada.

c) Mostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

d) Mostrar que a_n converge a un límite γ (llamado constante de Euler).

e) Aproximar γ usando a_{100}.

76. Encontrar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

77. Considerar la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}.$$

a) Determinar la convergencia o divergencia de la serie para $x = 1$.

b) Determinar la convergencia o divergencia de la serie para $x = 1/e$.

c) Hallar los valores positivos de x para la cual la serie converge.

78. La **función zeta de Riemann** para los números reales se define para todo x para el cual la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

converge. Encontrar el dominio de la función.

Repaso **En los ejercicios 79 a 90, determinar la convergencia o divergencia de la series.**

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

80. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

81. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$

82. $\displaystyle 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.95}}$

83. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

84. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1.075)^n$

85. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

86. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$

87. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

88. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln n$

89. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

90. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

Proyecto de trabajo: La serie armónica

La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es una de las series más importantes en este capítulo. Aunque sus términos tienden a cero cuando n aumenta,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

la serie armónica diverge. En otras palabras, aunque los términos se van haciendo cada vez más y más pequeños, la suma "es infinita".

a) Una manera de demostrar que la serie armónica diverge se atribuye a Jakob Bernoulli. Él agrupó los términos de la serie armónica como sigue:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}}_{>\frac{1}{2}} + \cdots$$

Escribir un párrafo corto que explique cómo se puede usar esta manera de agrupar los términos para mostrar que la serie armónica diverge.

b) Usar la demostración del criterio de la integral, teorema 9.10, para mostrar que

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n.$$

c) Usar el apartado *b*) para determinar cuántos términos M se necesitarían para que

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} > 50.$$

d) Mostrar que la suma del primer millón de términos de la serie armónica es menor de 15.

e) Mostrar que las desigualdades siguientes son válidas.

$$\ln \tfrac{21}{10} \leq \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \cdots + \tfrac{1}{20} \leq \ln \tfrac{20}{9}$$

$$\ln \tfrac{201}{100} \leq \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{101} + \cdots + \tfrac{1}{200} \leq \ln \tfrac{200}{99}$$

f) Usar las ideas del apartado *e*) para encontrar el límite

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{2m} \frac{1}{n}.$$

Sección 9.4 Comparación de series

- **Uso del criterio de comparación directa para determinar si una serie converge o diverge.**
- **Uso del criterio de comparación en el límite para determinar si una serie converge o diverge.**

Criterio de comparación directa

Para los criterios de convergencia desarrollados hasta ahora, los términos de la serie tienen que ser bastante simples y la serie debe tener características especiales para que los criterios de convergencia se puedan aplicar. Una ligera desviación de estas características especiales puede hacer que los criterios no sean aplicables. Por ejemplo, en los pares siguientes, la segunda serie no puede analizarse con el mismo criterio de convergencia que la primera serie aunque sean similares.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica, pero $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ no lo es.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es una serie p, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ no lo es.

3. $a_n = \frac{n}{(n^2+3)^2}$ se integra fácilmente, pero $b_n = \frac{n^2}{(n^2+3)^2}$ no.

En esta sección se estudian dos criterios adicionales para series con términos positivos. Estos dos criterios amplían la variedad de series que se pueden analizar respecto a convergencia o divergencia. Permiten *comparar* una serie que tenga términos complicados con una serie más simple cuya convergencia o divergencia es conocida.

TEOREMA 9.12 Criterio de comparación directa

Sea $0 < a_n \leq b_n$ para todo n.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración Para demostrar la primera propiedad, sea $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n.$$

Como $0 < a_n \leq b_n$, la sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ es no decreciente y acotada superiormente por L, así que debe converger. Como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se sigue que $\Sigma\, a_n$ converge. La segunda propiedad es lógicamente equivalente a la primera.

NOTA Como se ha enunciado, el criterio de comparación directa requiere que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n. Como la convergencia de una serie no depende de sus primeros términos, se podría modificar el criterio requiriendo sólo que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n mayor que algún entero N.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de comparación directa

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 3^n}.$$

Solución Esta serie se parece a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}. \qquad \text{Serie geométrica convergente.}$$

La comparación término a término da

$$a_n = \frac{1}{2 + 3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n, \quad n \geq 1.$$

Por tanto, por el criterio de la comparación directa, la serie converge.

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de comparación directa

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{n}}.$$

Solución Esta serie se parece a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}. \qquad \text{Serie } p \text{ divergente.}$$

La comparación término a término da

$$\frac{1}{2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

la cual *no satisface* los requisitos para la divergencia. (Recuerde que si la comparación término a término revela que una serie es *menor* que una serie divergente, el criterio de comparación directa no concluye nada.) Esperando que la serie dada sea divergente, se puede comparar con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad \text{Serie armónica divergente.}$$

En este caso, la comparación término a término da

$$a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{n}} = b_n, \quad n \geq 4$$

y, por el criterio de comparación directa, la serie dada diverge.

NOTA Para verificar la última desigualdad en el ejemplo 2, intente mostrar que $2 + \sqrt{n} \leq n$ cuando $n \geq 4$.

Recuerde que ambas partes del criterio de comparación directa requieren que $0 < a_n \leq b_n$. Informalmente, el criterio dice lo siguiente sobre las dos series con términos no negativos.

1. Si la serie "mayor" converge, la serie "menor" también converge.
2. Si la serie "menor" diverge, la serie "mayor" también diverge.

Criterio de comparación en el límite

A menudo una serie dada parece una serie p o una serie geométrica; sin embargo, no se puede establecer la comparación término a término necesaria para aplicar el criterio de comparación directa. Bajo estas circunstancias se puede aplicar un segundo criterio de comparación, llamado **criterio de comparación en el límite**.

> **TEOREMA 9.13 Criterio de comparación en el límite**
>
> Suponga que $a_n > 0$, $b_n > 0$, y
>
> $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$
>
> donde L es *finito y positivo*. Entonces las dos series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ o convergen ambas o divergen ambas.

NOTA Como con el criterio de comparación directa, el criterio de comparación en el límite puede modificarse para requerir sólo que a_n y b_n sean positivos para todo n mayor que algún entero N.

Demostración Como $a_n > 0$, $b_n > 0$, y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$

existe $N > 0$ tal que

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < L + 1, \quad \text{para } n \geq N.$$

Esto implica que

$$0 < a_n < (L + 1)b_n.$$

Por tanto, por el criterio de comparación directa, la convergencia de $\Sigma\, b_n$ implica la convergencia de $\Sigma\, a_n$. Similarmente, el hecho que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{L}$$

puede usarse para mostrar que la convergencia de $\Sigma\, a_n$ implica la convergencia de $\Sigma\, b_n$.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Muestre que la siguiente serie armónica general diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an + b}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Solución Por comparación con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{Serie armónica divergente.}$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(an + b)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an + b} = \frac{1}{a}.$$

Como este límite es mayor que 0, se puede concluir por el criterio de comparación en el límite que la serie dada diverge.

El criterio de comparación en el límite funciona bien para comparar una serie algebraica "complicada" con una serie p. Al elegir una serie p apropiada, se debe elegir una en la que el término n-ésimo sea de la misma magnitud que el término n-ésimo de la serie dada.

Serie dada	*Serie de comparación*	*Conclusión*
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Ambas serie convergen
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n - 2}}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	Ambas serie divergen.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 10}{4n^5 + n^3}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	Ambas serie convergen.

En otras palabras, al elegir una serie para comparación, puede despreciar todos menos las *potencias más altas de n* en el numerador y el denominador.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

Solución Despreciando todas las potencias de n menos las potencias más altas en el numerador y en el denominador, se puede comparar la serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$ Serie convergente.

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}\right)\left(\frac{n^{3/2}}{1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$$

se puede concluir por el criterio de comparación en el límite que las series dadas convergen.

EJEMPLO 5 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{4n^3 + 1}.$$

Solución Una comparación razonable será comparar con las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}.$$ Serie divergente.

Nótese que estas series divergen según el criterio del término n-ésimo. Por el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n2^n}{4n^3 + 1}\right)\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 + (1/n^3)} = \frac{1}{4}$$

se puede concluir que la serie dada diverge.

Ejercicios de la sección 9.4

1. ***Análisis gráfico*** Las figuras muestran la gráfica de los primeros 10 términos y la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, de cada serie.

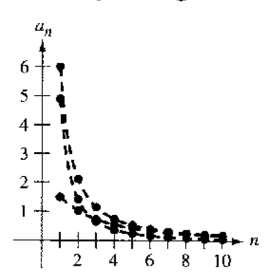
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}+3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\sqrt{n^2+0.5}}$$

a) Identifique la serie en cada figura.

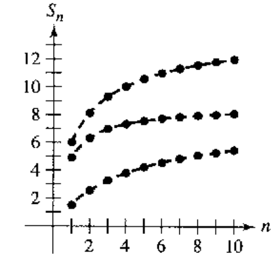
b) ¿Qué serie es una serie p? ¿Es convergente o divergente?

c) En las que no son series p, comparar las magnitudes de sus términos con los términos de la serie p. ¿Qué conclusión se obtiene acerca de la convergencia de las series?

d) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de las series y las magnitudes de sus sumas parciales.



Gráfica de términos



Gráfica de sumas parciales

2. ***Análisis gráfico*** Las figuras muestran la gráfica de los primeros 10 términos y la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, de cada serie.

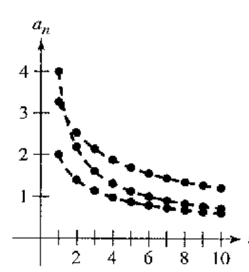
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}-0.5} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n+0.5}}$$

a) Identifique la serie en cada figura.

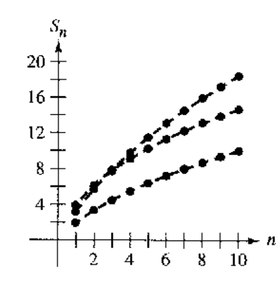
b) ¿Qué serie es una serie p? ¿Es convergente o divergente?

c) Para las que no son series p, comparar las magnitudes de sus términos con las magnitudes de los términos de la serie p. ¿Qué conclusión se saca sobre la convergencia de las series?

d) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de las series y las magnitudes de sus sumas parciales.



Gráfica de términos



Gráfica de sumas parciales

En los ejercicios 3 a 14, aplicar el criterio de comparación directa para determinar la convergencia o divergencia de las series.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5}$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt[3]{n}-1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$

En los ejercicios 15 a 28, aplicar el criterio de comparación en el límite para determinar la convergencia o divergencia de las series.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n-5}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2-4}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{n^2-2n+5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+2)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+1}, \quad k > 2$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+\sqrt{n^2+4}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

En los ejercicios 29 a 36, analizar la convergencia o divergencia, usando por lo menos una vez cada criterio. Identifique qué criterio fue usado.

***a*) Criterio del término *n*-ésimo**

***b*) Criterio de la serie geométrica**

c*) Criterio de la serie *p

***d*) Criterio de la serie telescópica**

***e*) Criterio de la integral**

***f*) Criterio de comparación directa**

***g*) Criterio de comparación en el límite**

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$

32. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{3n^2-2n-15}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

37. Aplicar el criterio de comparación en el límite con la serie armónica para mostrar que la serie $\sum a_n$ (donde $0 < a_n < a_{n-1}$) diverge si $\lim_{n\to\infty} na_n$ es finito y distinto de cero.

38. Demostrar que, si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grado j y k, respectivamente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

converge si $j < k - 1$ y diverge si $j \geq k - 1$.

En los ejercicios 39 a 42, aplicar el criterio polinómico del ejercicio 38 para determinar si la serie converge o diverge.

39. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26} + \cdots$

40. $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \cdots$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$ **42.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

En los ejercicios 43 y 44, aplicar el criterio de divergencia del ejercicio 37 para demostrar que la serie diverge.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4 + 3}$ **44.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

En los ejercicios 45 a 48, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

45. $\frac{1}{200} + \frac{1}{400} + \frac{1}{600} + \frac{1}{800} + \cdots$

46. $\frac{1}{200} + \frac{1}{210} + \frac{1}{220} + \frac{1}{230} + \cdots$

47. $\frac{1}{201} + \frac{1}{204} + \frac{1}{209} + \frac{1}{216} + \cdots$

48. $\frac{1}{201} + \frac{1}{208} + \frac{1}{227} + \frac{1}{264} + \cdots$

Desarrollo de conceptos

49. Revisar los resultados de los ejercicios 45 a 48. Explicar por qué se requiere el análisis cuidadoso para determinar la convergencia o divergencia de una serie y por qué considerar sólo las magnitudes de los términos de una serie puede ser engañoso.

50. Enunciar el criterio de comparación directa y dar un ejemplo de su uso.

51. Enunciar el criterio de comparación en el límite y dar un ejemplo de su uso.

52. Aparentemente los términos de la serie

$\frac{1}{1\,000} + \frac{1}{1\,001} + \frac{1}{1\,002} + \frac{1}{1\,003} + \cdots$

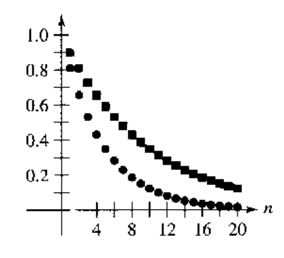
son menores que los términos correspondientes de la serie convergente

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$

Si el enunciado anterior es correcto, la primera serie converge. ¿Es esto correcto? ¿Por qué sí o por qué no? Haga una declaración sobre cómo la divergencia o convergencia de una serie se ve afectada por la inclusión o exclusión de un primer número finito de los primeros términos.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

53. La figura muestra los primeros 20 términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y los primeros 20 términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Identificar las dos series y explicar su razonamiento al hacer la elección.



54. Considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

a) Verificar que la serie converge.

b) Usar una calculadora para completar la tabla.

n	5	10	20	50	100
S_n					

c) La suma de la serie es $\pi^2/8$. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

d) Usar una calculadora para encontrar la suma de la serie

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 55 a 60, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que lo demuestre.**

55. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

56. Si $0 < a_{n+10} \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

57. Si $a_n + b_n \leq c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen. (Asuma que los términos de las tres series son positivos.)

58. Si $a_n \leq b_n + c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergen. (Asuma que los términos de las tres series son positivos.)

59. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

60. Si $0 < a_n \le b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

61. Demostrar que si las series no negativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

convergen, entonces también converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

62. Usar el resultado del ejercicio 61 para demostrar que si la serie no negativa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, entonces también converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

63. Encontrar dos series que demuestren el resultado del ejercicio 61.

64. Encontrar dos series que demuestren el resultado del ejercicio 62.

65. Suponer que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos. Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y Σb_n converge, Σa_n también converge.

66. Suponer que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos. Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y Σb_n diverge, Σa_n también diverge.

67. Usar el resultado del ejercicio 65 para mostrar que cada serie converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\pi^n}$

68. Usar el resultado del ejercicio 66 para mostrar que cada serie diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

69. Suponer que Σa_n es una serie con términos positivos. Demostrar que si Σa_n converge, entonces $\Sigma \operatorname{sen} a_n$ también converge.

70. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ converge.

Preparación del examen Putnam

71. ¿Es la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

convergente? Demuestre su afirmación.

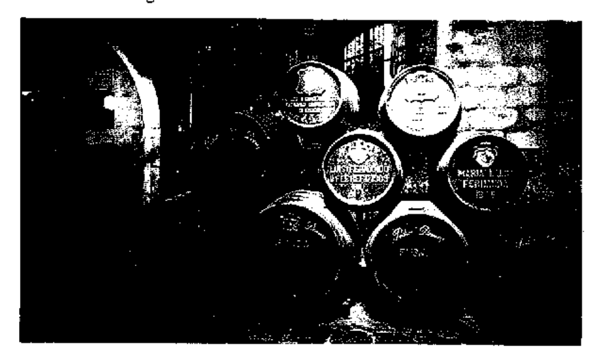
72. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales positivos, entonces también lo es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}.$$

Proyecto de trabajo: El método de la solera

La mayoría de los vinos se produce completamente de uvas cultivadas en un solo año. El jerez, sin embargo, es una mezcla compleja de vinos viejos con vinos nuevos. Esto se hace con una sucesión de barriles (llamada una solera) apilados unos encima de los otros, como se muestra en la fotografía.

Everton/The Image Works



El vino más viejo está en la hilera inferior de barriles, y el más nuevo está en hilera superior. Cada año, la mitad de cada barril en la fila inferior se embotella como jerez. Los barriles inferiores se llenan entonces con vino de los barriles de la hilera siguiente. Este proceso se repite a lo largo de la solera, con vino nuevo que se agrega a los barriles de arriba Un modelo matemático para la cantidad, por año, de vino de n años que se extrae de la solera (con k hileras) cada año es

$$f(n, k) = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad k \le n.$$

a) Considere una solera que tiene cinco hileras k, numeradas $k = 1, 2, 3, 4$ y 5. En 1990 ($n = 0$), la mitad de cada barril en la fila de arriba (fila 1) se llenó con el vino nuevo. ¿Cuánto de este vino se extrajo de la solera en 1991? ¿En 1992? ¿En 1993? . . . ¿En 2005? ¿Durante qué año(s) se extrajo de la solera la mayor cantidad del vino de 1990?

b) En el apartado *a)*, sea a_n la cantidad de vino de 1990 que es extraído de la solera en el año n. Calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Vea el artículo "Finding Vintage Concentrations in a Sherry Solera" por Rhodes Peele y John T. MacQueen en los *UMAP Modules*.

Sección 9.5 Series alternadas o alternantes

- **Uso del criterio de la serie alternada o alternante para determinar si una serie infinita converge.**
- **Uso del resto de una serie alternada o alternante para aproximar la suma de esa serie.**
- **Clasificación de una serie como absolutamente convergente o condicionalmente convergente.**
- **Reordenación de una serie infinita para obtener una suma diferente.**

Series alternadas o alternantes

Hasta ahora sólo hemos analizado series con términos positivos. En esta sección y la siguiente se estudian series que contienen términos positivos y negativos. Las series más sencillas de este tipo son las **series alternadas o alternantes** cuyos términos alternan en signo. Por ejemplo, la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

es una *serie geométrica alternante* con $r = -\frac{1}{2}$. Las series alternadas o alternantes pueden ser de dos tipos: los términos impares son negativos o los términos pares son negativos.

TEOREMA 9.14 Criterio de la serie alternada o alternante

Sea $a_n > 0$. Las series alternadas o alternantes

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

convergen si se satisfacen las siguientes dos condiciones.

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **2.** $a_{n+1} \leq a_n$, para todo n

Demostración Considere la serie alternada o alternante $\Sigma\,(-1)^{n+1}a_n$. En esta serie, la suma parcial (donde $2n$ es par)

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

todos sus términos son no negativos, y por consiguiente $\{S_{2n}\}$ es una sucesión no decreciente. Pero también se puede escribir

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

que implica que $S_{2n} \leq a_1$ para todo entero n. Así pues, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión acotada, no decreciente que converge a algún valor L. Como $S_{2n-1} - a_{2n} = S_{2n}$ y $a_{2n} \to 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$
$$= L + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L.$$

Como tanto S_{2n} como S_{2n-1} convergen al mismo límite L, se sigue que $\{S_n\}$ también converge a L. Consecuentemente, la serie alternada o alternante dada converge. ▬

NOTA La segunda condición en el criterio de la serie alternada o alternante se puede modificar para requerir sólo que $0 < a_{n+1} \leq a_n$ para todo n mayor que algún entero N.

NOTA La serie del ejemplo 1 es llamada *serie armónica alternada o alternante.* Volveremos a esta serie en el ejemplo 7.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de la serie alternada o alternante

Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Solución Note que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Así, la primera condición del teorema 9.14 es satisfecha. También note que la segunda condición del teorema 9.14 está satisfecha porque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$$

para todo n. Por consiguiente, aplicando el criterio de la serie alternada o alternante, se puede concluir que la serie converge.

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la serie alternada o alternante

Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$.

Solución Para aplicar el criterio de la serie alternada o alternante, note que, para $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{2^{n-1}}{2^n} \leq \frac{n}{n+1}$$

$$(n+1)2^{n-1} \leq n2^n$$

$$\frac{n+1}{2^n} \leq \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Así, $a_{n+1} = (n+1)/2^n \leq n/2^{n-1} = a_n$ para todo n. Además, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x-1}(\ln 2)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0.$$

Por consiguiente, por el criterio de la serie alternada o alternante, la serie converge.

NOTA En el ejemplo 3*a*, recuerde que siempre que una serie no satisface la primera condición del criterio de la serie alternada o alternante, se puede usar el criterio del término n-ésimo para la divergencia para concluir que la serie diverge.

EJEMPLO 3 Casos en que el criterio de series alternadas o alternantes no funciona

a) La serie alternada o alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$$

cumple la segunda condición del criterio de la serie alternada o alternante porque $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n. Sin embargo, no se aplica el criterio de la serie alternada o alternante, porque la serie no satisface la primera condición. De hecho, la serie diverge.

b) La serie alternada o alternante

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

satisface la primera condición porque a_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Sin embargo, no se puede aplicar el criterio de la serie alternada o alternante, porque la serie no satisface la segunda condición. Para concluir que la serie diverge, se puede argumentar que S_{2N} es igual a la N-ésima suma parcial de la serie armónica divergente. Esto implica que la sucesión de sumas parciales diverge. Así pues, la serie diverge.

El resto de una serie alternada o alternante

Para una serie alternada o alternante convergente, la suma parcial S_N puede ser una aproximación útil para la suma S de la serie. El error al usar $S \approx S_N$ es el resto $R_N = S - S_N$.

TEOREMA 9.15 Resto de una serie alternada o alternante

Si una serie alternada o alternante convergente satisface la condición $a_{n+1} \le a_n$, entonces el valor absoluto del resto R_N que se tiene al aproximar la suma S con S_N es menor (o igual) que el primer término desechado. Es decir,

$$|S - S_N| = |R_N| \le a_{N+1}.$$

Demostración La serie obtenida al eliminar los N primeros términos de la serie dada satisface las condiciones del criterio de series alternadas y tiene una suma de R_N.

$$\begin{aligned} R_N = S - S_N &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} a_n \\ &= (-1)^N a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} + (-1)^{N+2} a_{N+3} + \cdots \\ &= (-1)^N (a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \cdots) \\ |R_N| &= a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + a_{N+5} - \cdots \\ &= a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \cdots \le a_{N+1} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $|S - S_N| = |R_N| \le a_{N+1}$, lo cual prueba el teorema.

EJEMPLO 4 Cálculo aproximado de la suma de una serie alternada o alternante

Aproximar la suma de la serie siguiente por medio de sus primeros seis términos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \cdots$$

Solución La serie converge según el criterio de la serie alternada o alternante porque

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n!} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

La suma de los primeros seis términos es

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144} \approx 0.63194$$

y, por el teorema del resto de la serie alternada o alternante se tiene

$$|S - S_6| = |R_6| \le a_7 = \frac{1}{5\,040} \approx 0.0002.$$

Así, la suma de S está entre $0.63194 - 0.0002$ y $0.63194 + 0.0002$, y se concluye que

$$0.63174 \le S \le 0.63214.$$

TECNOLOGÍA Más adelante, en la sección 9.10, se podrá demostrar que la serie del ejemplo 4 converge a

$$\frac{e-1}{e} \approx 0.63212.$$

Por ahora, utilice una calculadora para obtener una aproximación a la suma de la serie. ¿Cuántos términos se necesitan para obtener una aproximación que no esté a más de 0.00001 de la suma real?

Convergencia absoluta y condicional

Ocasionalmente, una serie puede tener tanto términos positivos como negativos sin ser una serie alternada o alternante. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\, n}{n^2} = \frac{\text{sen}\, 1}{1} + \frac{\text{sen}\, 2}{4} + \frac{\text{sen}\, 3}{9} + \cdots$$

tiene términos positivos y negativos, pero no es una serie alternada o alternante. Una manera de tener alguna información sobre la convergencia de esta serie es investigar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\text{sen}\, n}{n^2}\right|.$$

Mediante comparación directa, se tiene $|\sin n| \leq 1$ para todo n, por lo que

$$\left|\frac{\text{sen}\, n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Por consiguiente, por el criterio de la comparación directa, la serie $\sum\left|\frac{\text{sen}\, n}{n^2}\right|$ converge. El siguiente teorema dice que la serie original también converge.

TEOREMA 9.16 Convergencia absoluta

Si la serie $\Sigma|a_n|$ converge, entonces la serie $\Sigma\, a_n$ también converge.

Demostración Como $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ para todo n, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

converge por la comparación con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|.$$

Además, como $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

donde las dos series de la derecha convergen. Por tanto, se sigue que $\Sigma\, a_n$ converge.

El recíproco del teorema 9.16 es falso. Por ejemplo, la **serie armónica alternada o alternante**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge de acuerdo con el citerio de la serie alternada o alternante. Sin embargo, la serie armónica diverge. Este tipo de convergencia se llama **convergencia condicional**.

Definiciones de convergencia absoluta y condicional

1. $\Sigma\, a_n$ es **absolutamente convergente** si $\Sigma\, |a_n|$ converge.
2. $\Sigma\, a_n$ es **condicionalmente convergente** si $\Sigma\, a_n$ converge pero $\Sigma\, |a_n|$ diverge.

EJEMPLO 5 Convergencia absoluta y condicional

Determinar si cada una de las series es convergente o divergente. Clasifique cada serie como absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = \frac{0!}{2^0} - \frac{1!}{2^1} + \frac{2!}{2^2} - \frac{3!}{2^3} + \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \cdots$

Solución

a) Por el criterio del término n-ésimo para la divergencia, se concluye que esta serie diverge.

b) La serie dada puede mostrarse que es convergente por el criterio de la serie alternada o alternante. Además, como la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

diverge, la serie dada es *condicionalmente* convergente.

EJEMPLO 6 Convergencia absoluta y condicional

Determinar si cada una de las series es convergente o divergente. Clasifique cada serie como absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \cdots$

Solución

a) Ésta *no* es una serie alternada o alternante. Sin embargo, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

es una serie geométrica convergente, se puede aplicar el teorema 9.16 para concluir que la serie dada es *absolutamente* convergente (y por consiguiente convergente).

b) En este caso, el criterio de la serie alternada o alternante indica que la serie dada converge. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$$

diverge por la comparación directa con los términos de la serie armónica. Por consiguiente, la serie dada es *condicionalmente* convergente.

Reordenación de series

Una suma finita como $(1 + 3 - 2 + 5 - 4)$ puede reordenarse sin cambiar el valor de la suma. Esto no es necesariamente cierto en el caso de una serie infinita. En este caso depende de que la serie sea completamente convergente (toda reordenación tiene la misma suma) o condicionalmente convergente.

EJEMPLO 7 Reordenamiento de una serie

La serie armónica alternada o alternante converge a ln 2. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2. \qquad \text{(Ver ejercicio 49, sección 9.10.)}$$

Reordenar la serie para producir una suma diferente.

Solución Considerar la reordenación siguiente.

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots\right)=\frac{1}{2}(\ln 2)$$

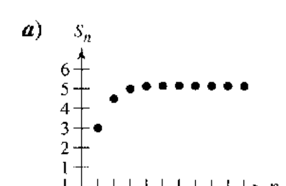
Reordenando los términos se obtiene una suma que es la mitad de la suma original.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Georg Friedrich Riemann (1826-1866) demostró que si $\Sigma\, a_n$ es condicionalmente convergente y S es cualquier número real, pueden reordenarse los términos de la serie para converger a S. Para más sobre este tema, vea el artículo "Riemann's Rearrangement Theorem" de Stewart Galanor en *Mathematics Teacher.*

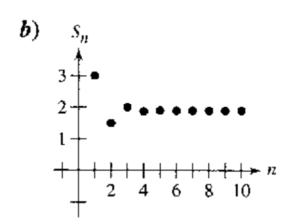
Ejercicios de la sección 9.5

En los ejercicios 1 a 6, asociar la serie con la gráfica de su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

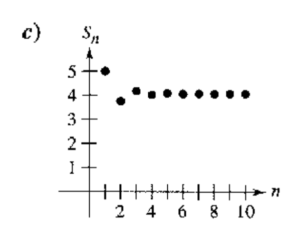
a)



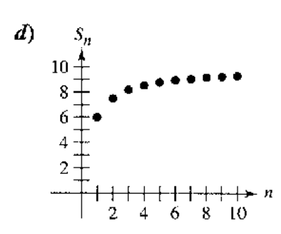
b)



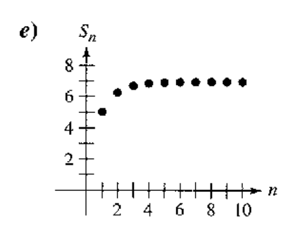
c)



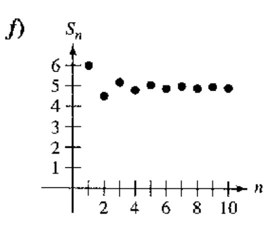
d)



e)



f)



1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}6}{n^2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3}{n!}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n2^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}10}{n2^n}$

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 7 a 10, explorar el resto de la serie alternada o alternante.**

a) **Usar una calculadora para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla.**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n										

b) **Usar una calculadora para representar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma.**

c) **¿Qué patrón existe entre el diagrama de los puntos sucesivos en el apartado *b*) y la recta horizontal que representa la suma de la serie? ¿La distancia entre los puntos sucesivos de la recta horizontal crece o decrece?**

d) **Discutir la relación entre las respuestas en el apartado *c*) y el resto de la serie alternada o alternante como se indicó en el teorema 9.15.**

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{1}{e}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=\text{sen }1$

En los ejercicios 11 a 32, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n^2}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^2+5}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\ln(n+1)}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos n\pi$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n - e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\operatorname{csch} n$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n + e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\operatorname{sech} n$

En los ejercicios 33 a 36, aproximar la suma de la serie usando los primeros seis términos. (Ver ejemplo 4.)

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3}{n^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4}{\ln(n+1)}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}2}{n!}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$

En los ejercicios 37 a 42, *a*) aplicar el teorema 9.15 para determinar el número de términos requerido para aproximar la suma de la serie convergente con un error menor de 0.001, y *b*) use una calculadora para aproximar la suma de la serie con un error menor de 0.001.

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} = \frac{1}{e}$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} 1$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} = \cos 1$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} = \ln\frac{5}{4}$

En los ejercicios 43 a 46, aplicar el teorema 9.15 para determinar el número de términos requerido para aproximar la suma de la serie con un error menor de 0.001.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3-1}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

En los ejercicios 47 a 62, determinar si la serie converge condicionalmente o absolutamente, o diverge.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(n+1)^2}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{n+10}$

53. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$

54. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} e^{-n^2}$

55. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n}{n^3-1}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1.5}}$

57. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$

58. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n+4}}$

59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\arctan n$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi/2]}{n}$

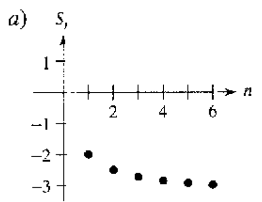
Desarrollo de conceptos

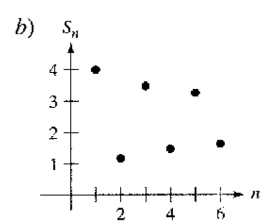
63. Definir una serie alternada o alternante y establezcer el criterio de la serie alternada o alternante.

64. Dar el resto después de N términos de una serie alternada o alternante convergente.

65. En sus propias palabras, establecer la diferencia entre convergencia absoluta y convergencia condicional de una serie alternada o alternante.

66. En las figuras se muestran las gráficas de las sucesiones de las sumas parciales de dos series. ¿Qué gráfica representa las sumas parciales de una serie alternada o alternante? Explique.





¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 67 a 70, determinar si las declaraciones son verdaderas o falsas. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

67. Si tanto $\sum a_n$ como $\sum(-a_n)$ convergen, entonces $\sum |a_n|$ converge.

68. Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum |a_n|$ diverge.

69. En la serie alternada o alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, la suma parcial S_{100} es un sobreestimado de la suma de la serie.

70. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

En los ejercicios 71 y 72, encontrar los valores de p para los cuales la serie converge.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{n^p}\right)$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{n+p}\right)$

73. Demostrar que si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Es verdadero el recíproco? Si no lo es, dé un ejemplo que demuestre su falsedad.

74. Usar el resultado del ejercicio 71 para dar un ejemplo de una serie p alternada o alternante que converja, pero cuya serie p correspondiente diverja.

75. Dar un ejemplo de una serie que demuestre la declaración del ejercicio 73.

76. Encontrar todos los valores de x para las cuales la serie $\sum(x^n/n)$ *a*) converja absolutamente y *b*) converja condicionalmente.

77. Considere la serie siguiente.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\cdots$$

a) ¿Satisface esta serie las condiciones del teorema 9.14? Explique por qué sí o por qué no.

b) ¿Converge la serie? En ese caso, ¿cuál es la suma?

78. Considere la serie siguiente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,\ a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^3}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

a) ¿Satisface esta serie las condiciones del teorema 9.14? Explique por qué sí o por qué no.

b) ¿Converge la serie? En ese caso, ¿cuál es la suma?

Repaso **En los ejercicios 79 a 88, demostrar la convergencia o divergencia e identificar el criterio usado.**

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{3/2}}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

83. $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{7}{8}\right)^n$

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2n^2+1}$

85. $\sum_{n=1}^{\infty} 100e^{-n/2}$

86. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4}{3n^2-1}$

88. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

89. El argumento siguiente $0 = 1$, es *incorrecto*. Describa el error.

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+\cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

90. El argumento siguiente, $2 = 1$, es *incorrecto*. Describa el error. Multiplique cada lado de la serie armónica alternada o alternante

$$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$$

por 2 para obtener

$$2S = 2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\cdots$$

Ahora reúna los términos con un mismo denominador (como lo indican las flechas) para obtener

$$2S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

La serie resultante es la misma con que se empezó. Así, $2S = S$ y divida cada lado por S para obtener $2 = 1$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más sobre este ejercicio, vea el artículo "Riemann's Rearrangement Theorem" de Stewart Galanor en *Mathematics Teacher*.

Preparación del examen Putnam

91. Asuma como sabido a ciencia cierta (verdadero) que la serie armónica alternada o alternante

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$

es convergente, y denota su suma por s. Reordene la serie (1) como sigue:

(2) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$

Asuma como sabido a ciencia cierta (verdadero) que la serie (2) también es convergente, y denote su suma por S. Denote s_k y S_k, la suma k-ésima parcial de la serie (1) y (2), respectivamente. Demuestre cada declaración.

i) $S_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$, *ii*) $S \neq s$

Sección 9.6 El criterio del cociente y el criterio de la raíz

- **Uso del criterio del cociente para determinar si una serie converge o diverge.**
- **Uso del criterio de la raíz para determinar si una serie converge o diverge.**
- **Revisión de los criterios de la convergencia y divergencia de una serie infinita.**

Cocientes sucesivos Una de las condiciones siguientes garantiza que una serie diverge, dos condiciones garantizan que una serie converge y una no garantiza ni que la serie converge ni que diverge. ¿Cuál es cuál? Explique su razonamiento.

a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

d) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$

El criterio del cociente

Esta sección empieza con un criterio de convergencia absoluta: el **criterio del cociente**.

TEOREMA 9.17 Criterio del cociente

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie con términos distintos de cero.

1. $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

2. $\Sigma\, a_n$ es divergente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ o $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.

3. El criterio del cociente no es concluyente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

Demostración Para demostrar la propiedad 1, asuma que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$$

y elija un R tal que $0 \le r < R < 1$. Por la definición en el límite de una sucesión, existe un $N > 0$ tal que $|a_{n+1}/a_n| < R$ para todo $n > N$. Por tanto, se pueden escribir las desigualdades siguientes.

$$\begin{aligned}
|a_{N+1}| &< |a_N|R\\
|a_{N+2}| &< |a_{N+1}|R < |a_N|R^2\\
|a_{N+3}| &< |a_{N+2}|R < |a_{N+1}|R^2 < |a_N|R^3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La serie geométrica $\Sigma\, |a_N|R^n = |a_N|R + |a_N|R^2 + \cdots + |a_N|R^n + \cdots$ converge, y así, por el criterio de la comparación directa, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{N+n}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+n}| + \cdots$$

también converge. Esto implica a su vez que la serie $\Sigma\, |a_n|$ converge, porque suprimir un número finito de términos ($n = N - 1$) no afecta la convergencia. Por consiguiente, por el teorema 9.16, la serie $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente. La demostración de la propiedad 2 es similar y se deja como ejercicio (ver ejercicio 98).

NOTA El hecho de que el criterio del cociente no sea concluyente cuando $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ puede verse comparando las dos series $\Sigma\, (1/n)$ y $\Sigma\, (1/n^2)$. La primera serie diverge y la segunda converge, pero en ambos casos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Aunque el criterio del cociente no es una panacea como criterio de convergencia, es particularmente útil para series que *convergen rápidamente*. Series que involucran factoriales o exponenciales frecuentemente son de este tipo.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio del cociente

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Solución Como $a_n = 2^n/n!$, se puede escribir lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{2^n}{n!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie converge.

AYUDA DE ESTUDIO Un poco frecuente en la aplicación del criterio del cociente es simplificar cocientes o factoriales. Así, en el ejemplo 1 note que

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio del cociente

Determinar si cada serie converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Solución

a) Esta serie converge porque el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es menor que 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)^2\left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n^2 2^{n+1}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

b) Esta serie diverge porque el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es mayor que 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= e > 1
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Un caso en que el criterio del cociente no decide

Determinar la convergencia o divergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Solución El límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es igual a 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right] \\
&= \sqrt{1}(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

NOTA El criterio del cociente también está en no concluyente para toda serie p.

Por tanto, el criterio del cociente no es concluyente. Para determinar si la serie converge se necesita recurrir a un criterio diferente. En este caso, se puede aplicar el criterio de la serie alternada. Para demostrar que $a_{n+1} \leq a_n$, sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Entonces la derivada es

$$f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Como la derivada es negativa para $x > 1$, se sabe que f es una función decreciente. También, por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1/(2\sqrt{x})}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, por el criterio de la serie alternada o alternante, la serie converge.

La serie del ejemplo 3 es *condicionalmente convergente*. Esto se sigue del hecho que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

diverge (por el criterio de comparación en el límite con $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$), pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge.

TECNOLOGÍA Una computadora o calculadora programable puede reforzar la conclusión de que la serie del ejemplo 3 converge *condicionalmente*. Sumando los primeros 100 términos de la serie, se obtiene una suma de aproximadamente –0.2. (La suma de los primeros 100 términos de la serie $\Sigma\, |a_n|$ es aproximadamente 17.)

El criterio de la raíz

El siguiente criterio para convergencia o divergencia de series es especialmente adecuado para series que involucran n-ésimas potencias. La demostración de este teorema es similar a la dada para el criterio del cociente, y se deja como ejercicio (ver ejercicio 99).

TEOREMA 9.18 El criterio de la raíz

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie.

1. $\Sigma\, a_n$ converge absolutamente si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.
2. $\Sigma\, a_n$ diverge si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.
3. El criterio de la raíz no es concluyente si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la raíz

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}.$$

Solución Se puede aplicar el criterio de la raíz como sigue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

NOTA El criterio de la raíz siempre es no concluyente para toda serie p.

Como este límite es menor que 1, se puede concluir que la serie es absolutamente convergente (y por consiguiente converge).

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre la utilidad del criterio de la raíz, vea el artículo "N! and the Root Test" de Charles C. Mumma II en *The American Mathematical Monthly*.

Para ver la utilidad del criterio de la raíz en el caso de la serie del ejemplo 4, trate de aplicar el criterio del cociente a esa serie. Al hacer esto, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{e^{2n}}{n^n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} e^2 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notar que este límite no es tan fácil de evaluar como el límite obtenido con el criterio de la raíz en el ejemplo 4.

Estrategias para analizar la convergencia de series

Hasta ahora se han estudiado 10 criterios para determinar la convergencia o divergencia de una serie infinita. (Vea el resumen en la tabla en la página 644.) La habilidad de elegir y aplicar los criterios sólo se adquiere con la práctica. Debajo se da un conjunto de pautas para elegir un criterio apropiado.

Estrategia para analizar la convergencia o divergencia de series

1. ¿Tiende a 0 el término n-ésimo? Si no es así, la serie diverge.
2. ¿Es la serie de alguno de los tipos especiales: geométrica, serie p, telescópica o alternante?
3. ¿Se puede aplicar el criterio de la integral, el de la raíz o el cociente?
4. ¿Puede compararse la serie favorable o fácilmente con uno de los tipos especiales?

En algunos casos puede haber más de un criterio aplicable. Sin embargo, el objetivo debe ser aprender a elegir el criterio más eficaz.

EJEMPLO 5 Aplicación de las pautas para analizar series

Determinar la convergencia o divergencia de cada serie.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4n+1}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

Solución

a) En esta serie, el límite del término n-ésimo no es 0 $\left(a_n \to \frac{1}{3} \text{ o } n \to \infty\right)$. Por tanto, de acuerdo al criterio del término n-ésimo, la serie diverge.

b) Esta serie es geométrica. Es más, como la razón de los términos $r = \pi/6$ es menor que 1 en el valor absoluto, puede concluirse que la serie converge.

c) Como la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se integra fácilmente, se puede usar el criterio de la integral para concluir que la serie converge.

d) El término n-ésimo de esta serie se puede compar al término n-ésimo de la serie armónica. Después de usar el criterio de comparación en el límite, se puede concluir que la serie diverge.

e) Ésta es una serie alternada o alternante cuyo término n-ésimo tiende a 0. Como $a_{n+1} \leq a_n$, se puede usar el criterio de la serie alternada o alternante para concluir que la serie converge.

f) El término n-ésimo de esta serie involucra un factorial, lo que indica que el criterio del cociente puede ser el adecuado. Después de aplicar el criterio del cociente, se puede concluir que la serie diverge.

g) El término n-ésimo de esta serie involucra una variable que se eleva a la potencia n-ésima que indica que el criterio de la raíz puede ser el adecuado. Después de aplicar el criterio de la raíz, se puede concluir que la serie converge.

Resumen de criterios para las series

Criterio	Serie	Converge	Diverge	Comentario
Término n-ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia
Series geométricas	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\lvert r\rvert < 1$	$\lvert r\rvert \geq 1$	Suma: $S = \dfrac{a}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
Series p-	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	$p > 1$	$p \leq 1$	
Series alternadas o alternantes	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		Resto: $\lvert R_N\rvert \leq a_{N+1}$
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge	Resto: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = 1$.
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = 1$.
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación en el límite ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	

Ejercicios de la sección 9.6

En los ejercicios 1 a 4, verificar la fórmula

1. $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)(n)(n-1)$

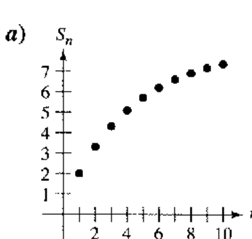
2. $\dfrac{(2k-2)!}{(2k)!} = \dfrac{1}{(2k)(2k-1)}$

3. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$

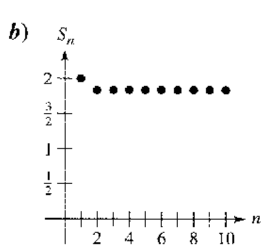
4. $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-5)} = \dfrac{2^k k!(2k-3)(2k-1)}{(2k)!}, \quad k \geq 3$

En los ejercicios 5 a 10, asocie la serie con la gráfica de su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

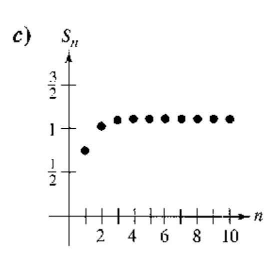
a)



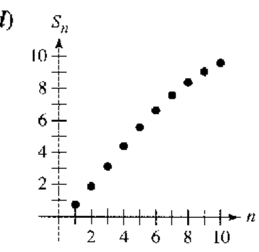
b)



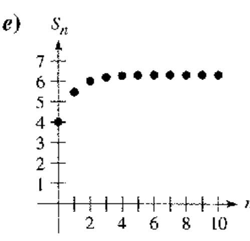
c)



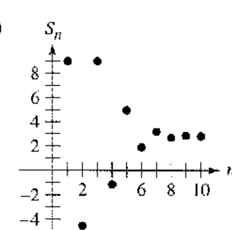
d)



e)



f)



5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{1}{n!}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{n!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}4}{(2n)!}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{5n-3}\right)^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4e^{-n}$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 11 y 12, *a*) verificar que la serie converge. *b*) Usar una calculadora para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla. *c*) Usar una calculadora para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales. *d*) Usar la tabla para estimar la suma de la serie. *e*) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y el ritmo o velocidad a la que la sucesión de las sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.**

n	5	10	15	20	25
S_n					

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{5}{8}\right)^n$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$

En los ejercicios 13 a 32, aplicar el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{2}\right)^n$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n(n+1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3/2)^n}{n^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n3^n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^5}$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

27. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+1}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$

31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

En los ejercicios 33 a 36, verificar que el criterio del cociente no es concluyente para las series *p*.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

En los ejercicios 37 a 50, aplicar el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

39. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)^n$

41. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3n}{2n+1}\right)^{3n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sqrt[n]{n}+1\right)^n$

44. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{500}\right)^n$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

49. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

En los ejercicios 51 a 68, determinar la convergencia o divergencia de la serie usando el criterio apropiado de este capítulo. Identificar el criterio aplicado.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5}{n}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\sqrt{n}}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-2}}{2^n}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3\sqrt{n^3}}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n+3}{n2^n}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4n^2-1}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$

62. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n7^n}{n!}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{n!}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n2^n}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{18^n(2n-1)n!}$

En los ejercicios 69 a 72, identificar las dos series que son idénticas.

69. *a)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n5^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n5^n}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)5^{n+1}}{(n+1)!}$

70. *a)* $\sum_{n=4}^{\infty}n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

71. *a)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$

72. *a)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)2^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$

En los ejercicios 73 y 74, escribir una serie equivalente en la que el índice de suma empiece en $n = 0$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$

74. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n-2)!}$

En los ejercicios 75 y 76, *a)* determinar el número de términos requerido para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.0001, y *b)* use una calculadora para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.0001.

75. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^k}{2^k k!}$

76. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$

En los ejercicios 77 a 82, los términos de una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ se definen por recurrencia. Determinar la convergencia o divergencia de la serie. Explicar el razonamiento.

77. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{4n-1}{3n+2}a_n$

78. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2n+1}{5n-4}a_n$

79. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{\operatorname{sen} n + 1}{\sqrt{n}}a_n$

80. $a_1 = \frac{1}{5},\ a_{n+1} = \frac{\cos n + 1}{n}a_n$

81. $a_1 = \frac{1}{3},\ a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$

82. $a_1 = \frac{1}{4},\ a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

En los ejercicios 83 a 86, aplicar el criterio del cociente o el de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

83. $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$

84. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + \cdots$

85. $\frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{(\ln 4)^4} + \frac{1}{(\ln 5)^5} + \frac{1}{(\ln 6)^6} + \cdots$

86. $1 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$

En los ejercicios 87 a 92, encontrar los valores de x para las cuales la serie converge.

87. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{x}{3}\right)^n$

88. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{4}\right)^n$

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n}$

90. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(x-1)^n$

91. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{x}{2}\right)^n$

92. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

Desarrollo de conceptos

93. Enunciar el criterio del cociente.

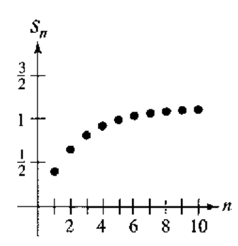
94. Enunciar el criterio de la raíz.

95. Se dice que los términos de una serie positiva parecen tender a cero rápidamente como n tiende a infinito. De hecho, $a_7 \leq 0.0001$. No habiendo otra información, ¿implica esto que la serie converge? Apoye su conclusión en ejemplos.

96. La gráfica muestra los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n.$$

Encontrar una serie tal que los términos de su sucesión de sumas parciales sean menores que los términos correspondientes de la sucesión en la figura, pero tales que la serie diverja. Explicar el razonamiento.



97. Aplicando el criterio del cociente, se determina que una serie alternada o alternamente converge. ¿Converge la serie condicional o absolutamente? Explique.

98. Demostrar la propiedad 2 del teorema 9.17.

99. Demostrar el teorema 9.18. (*Sugerencia* para la propiedad 1: Si el límite es $r < 1$, elija un número real R tal que $r < R < 1$. De acuerdo con las definiciones del límite, existe algún $N > 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < R$ para $n > N$.)

100. Mostrar que el criterio de la raíz no es concluyente para la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

101. Mostrar que el criterio del cociente y de la raíz no son concluyentes para la serie p logarítmica.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

102. Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(xn)!}$$

cuando *a*) $x = 1$, *b*) $x = 2$, *c*) $x = 3$ y *d*) x es un entero positivo.

103. Mostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

104. ***Redacción*** Lea el artículo "A Differentiation Test for Absolute Convergence" de Yaser S. Abu-Mostafa en *Mathematics Magazine*. Escribir después un párrafo que describa ese criterio. Incluir ejemplos de series que convergen y ejemplos de serie que divergen.

Preparación del examen Putnam

105. ¿Es la serie siguiente convergente o divergente?

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{7} + \frac{2!}{3^2}\left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3!}{4^3}\left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4!}{5^4}\left(\frac{19}{7}\right)^4 + \cdots$$

106. Mostrar que si la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge, entonces la serie

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \cdots$$

también converge.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition.

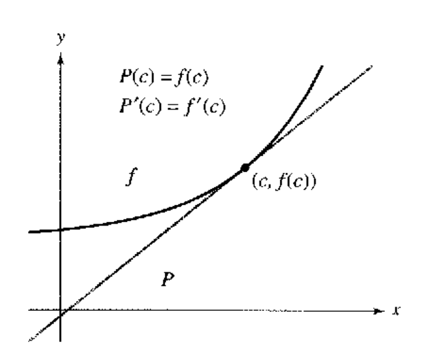
Sección 9.7 Polinomios de Taylor y aproximación

- **Encontrar aproximaciones polinómicas de las funciones elementales y compararlas con las funciones elementales.**
- **Encontrar aproximaciones mediante polinomios de Taylor y Maclaurin a funciones elementales.**
- **Emplear el resto de un polinomio de Taylor.**

Aproximaciones polinómicas a funciones elementales

El objetivo de esta sección es mostrar cómo pueden usarse las funciones polinómicas como aproximaciones a otras funciones elementales. Para encontrar una función polinómica P que aproxime otra función f, se comienza por elegir un número c en el dominio de f en el que P y t tengan el mismo valor. Es decir,

$$P(c) = f(c).$$ Las gráficas de f y P pasan por $(c, f(c))$.



Cerca de $(c, f(c))$, la gráfica de P puede usarse para aproximar la gráfica de f
Figura 9.10

Se dice que la aproximación polinómica se **expande alrededor de c** o está **centrada en c**. Geométricamente, el requisito de que $P(c) = f(c)$ significa que la gráfica de P debe pasar por el punto $(c, f(c))$. Por supuesto, hay muchos polinomios cuyas gráficas pasan por el punto $(c, f(c))$. La tarea es encontrar un polinomio cuya gráfica se parezca a la gráfica de f en la cercanía de este punto. Una manera de hacer esto es imponer el requisito adicional de que la pendiente de la función polinómica sea la misma que la pendiente de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

$$P'(c) = f'(c)$$ Las gráficas de f y P tienen la misma pendiente en $(c, f(c))$.

Con estos dos requisitos se puede obtener una aproximación lineal simple a f, como se muestra en la figura 9.10.

EJEMPLO 1 Aproximación a $f(x) = e^x$ mediante un polinomio

Dada la función $f(x) = e^x$, encontrar una función polinómica de primer grado

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

cuyo valor y pendiente en $x = 0$ coincidan con el valor y la pendiente de f.

Solución Como $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$, el valor y la pendiente de f en $x = 0$ están dados por

$$f(0) = e^0 = 1$$

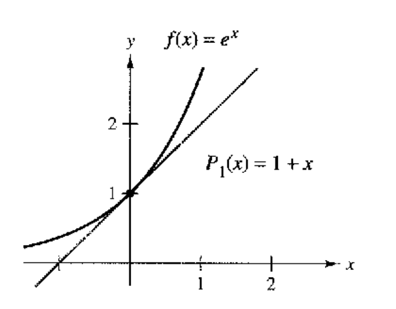
y

$$f'(0) = e^0 = 1.$$

Como $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, se puede usar la condición $P_1(0) = f(0)$ para concluir que $a_0 = 1$. Es más, como $P_1'(x) = a_1$, se puede usar la condición $P_1'(0) = f'(0)$ para concluir que $a_1 = 1$. Por consiguiente,

$$P_1(x) = 1 + x.$$

La figura 9.11 muestra las gráficas de $P_1(x) = 1 + x$ y $f(x) = e^x$.



P_1 es la aproximación polinómica de primer grado de $f(x) = e^x$
Figura 9.11

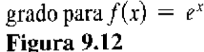
NOTA En el ejemplo 1 no es la primera vez que se usa una función lineal para aproximar otra función. El mismo procedimiento se usó como base para el método de Newton.

En la figura 9.12 se puede ver que, en los puntos cercanos a (0, 1), la gráfica de

$$P_1(x) = 1 + x \qquad \text{Aproximación de primer grado.}$$

está razonablemente cerca a la gráfica de $f(x) = e^x$. Sin embargo, al alejarse de (0, 1), las gráficas se apartan y la precisión de la aproximación disminuye. Para mejorar la aproximación, se puede imponer otro requisito todavía: que los valores de las segundas derivadas de P y f sean iguales en $x = 0$. El polinomio de menor grado, P_2, que satisface los tres requisitos, $P_2(0) = f(0)$, $P_2'(0) = f'(0)$ y $P_2''(0) = f''(0)$, puede mostrarse que es

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \qquad \text{Aproximación de segundo grado.}$$



P_2 es la aproximación polinómica de segundo grado para $f(x) = e^x$
Figura 9.12

Es más, en la figura 9.12 se puede ver que P_2 es una mejor aproximación que P_1. Si se continúa con este patrón, requiriendo que los valores de $P_n(x)$ y de sus primeras n coincidan con las de $f(x) = e^x$ en $x = 0$, se obtiene lo siguiente.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \qquad \text{Aproximación de } n\text{-ésimo grado.}$$
$$\approx e^x$$

EJEMPLO 2 Aproximación a $f(x) = e^x$ mediante un polinomio de tercer grado

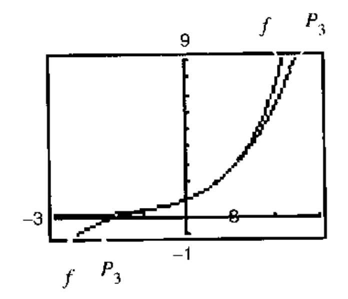
Construir una tabla que compare los valores del polinomio

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \qquad \text{Aproximación de tercer grado.}$$

con $f(x) = e^x$ para varios valores de x cercanos a 0.

Solución Usando una calculadora o una computadora, se pueden obtener los resultados mostrados en la tabla. Note que para $x = 0$, las dos funciones tienen el mismo valor, pero al alejarse x del valor 0, la precisión de la aproximación polinómica $P_3(x)$ disminuye.

x	-1.0	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	1.0
e^x	0.3679	0.81873	0.904837	1	1.105171	1.22140	2.7183
$P_3(x)$	0.3333	0.81867	0.904833	1	1.105167	1.22133	2.6667



P_3 es la aproximación polinómica de tercer grado para $f(x) = e^x$
Figura 9.13

TECNOLOGÍA Puede usarse una calculadora para comparar la gráfica del polinomio de aproximación con la gráfica de la función f. Por ejemplo, en la figura 9.13 la gráfica de

$$P_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 \qquad \text{Aproximación de tercer grado.}$$

se compara con la gráfica de $f(x) = e^x$. Si se tiene acceso a una calculadora, se puede tratar de comparar las gráficas de

$$P_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 \qquad \text{Aproximación de cuarto grado.}$$
$$P_5(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 \qquad \text{Aproximación de quinto grado.}$$
$$P_6(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{1}{720}x^6 \qquad \text{Aproximación de sexto grado.}$$

con la gráfica de f. ¿Qué se nota?

BROOK TAYLOR (1685-1731)

Aunque Taylor no fue el primero en buscar aproximaciones polinómicas para funciones trascendentes, su trabajo, publicado en 1715, fue una de las primeras obras acerca de la materia.

Polinomios de Taylor y de Maclaurin

La aproximación polinómica de $f(x) = e^x$ dada en el ejemplo 2 estaba centrada en $c = 0$. Para aproximaciones centradas en un valor arbitrario de c, es conveniente escribir el polinomio en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdot \cdot \cdot + a_n(x - c)^n.$$

En esta forma, las derivadas sucesivas dan como resultado

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + na_n(x - c)^{n-1} \\ P_n''(x) &= 2a_2 + 2(3a_3)(x - c) + \cdot \cdot \cdot + n(n - 1)a_n(x - c)^{n-2} \\ P_n'''(x) &= 2(3a_3) + \cdot \cdot \cdot + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - c)^{n-3} \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x) &= n(n - 1)(n - 2) \cdot \cdot \cdot (2)(1)a_n. \end{aligned}$$

Sea $x = c$, obteniendo entonces

$$P_n(c) = a_0, \quad P_n'(c) = a_1, \quad P_n''(c) = 2a_2, \quad . \; . \; . \; , \quad P_n^{(n)}(c) = n!a_n$$

y como el valor de f y sus primeras n derivadas debe coincidir con el valor de P_n y sus primeras n derivadas en $x = c$, se sigue que

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad \frac{f''(c)}{2!} = a_2, \quad . \; . \; . \; , \quad \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n.$$

Con estos coeficientes se puede obtener la definición siguiente de **polinomios de Taylor**, en honor al matemático inglés Brook Taylor, y **polinomios de Maclaurin**, en honor al matemático inglés Colin Maclaurin (1698-1746).

NOTA Los polinomios de Maclaurin son tipos especiales de polinomios de Taylor en los que $c = 0$.

Definiciones del polinomio de Taylor y de Maclaurin de grado *n*

Si f tiene n derivadas en c, entonces el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

se llama **polinomio de Taylor de grado n para f en el punto c**. Si $c = 0$, entonces

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

también se llama **polinomio de Maclaurin de grado n para f**.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver cómo usar series para obtener otras aproximaciones para e, vea el artículo "Novel Series-based Approximations to e" de John Knox y Harlan J. Brothers en *The Collage Mathematics Journal*.

EJEMPLO 3 Un polinomio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

Encuentre el polinomio de Maclaurin de grado n para $f(x) = e^x$.

Solución De la discusión en la página 649, el polinomio de Maclaurin de grado n para

$f(x) = e^x$ está dado por

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n!}x^n.$$

EJEMPLO 4 Encontrar polinomios de Taylor para ln x

Encontrar los polinomios de Taylor P_0, P_1, P_2, P_3 y P_4 para $f(x) = \ln x$ centrado en $c = 1$.

Solución Desarrollando respecto a $c = 1$ se obtiene lo siguiente.

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{x^3} \qquad f'''(1) = \frac{2!}{1^3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -\frac{3!}{1^4} = -6$$

Por consiguiente, los polinomios de Taylor son como sigue.

$$P_0(x) = f(1) = 0$$

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = (x-1)$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

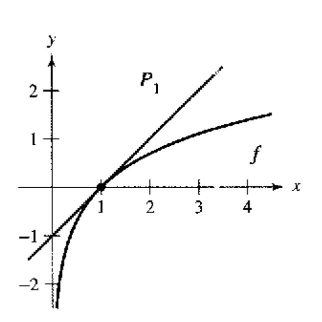
$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

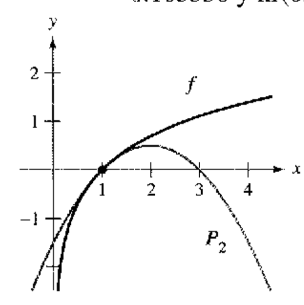
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

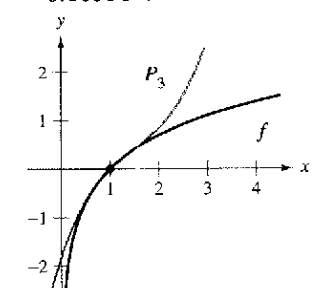
$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

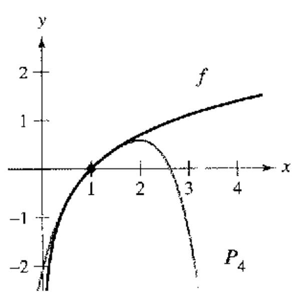
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

La figura 9.14 compara las gráficas de P_1, P_2, P_3 y P_4 con la gráfica de $f(x) = \ln x$. Note que cerca de $x = 1$ las gráficas son casi indistinguibles. Por ejemplo, $P_4(0.9) \approx -0.105358$ y $\ln(0.9) \approx -0.105361$.









Cuando n aumenta, la gráfica de P_n se convierte en una mejor aproximación de la gráfica de $f(x) = \ln x$ cerca de $x = 1$

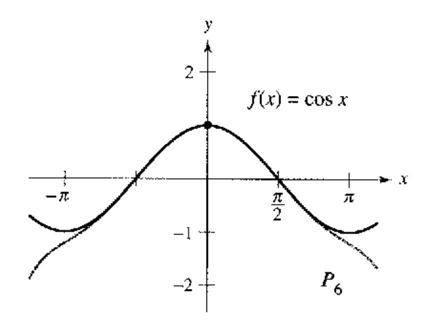
Figura 9.14

EJEMPLO 5 Encontrar los polinomios de Maclaurin para cos *x*

Encontrar los polinomios de Maclaurin P_0, P_2, P_4 y P_6 para $f(x) = \cos x$. Use $P_6(x)$ para aproximar el valor de $\cos(0.1)$.

Solución Desarrollando respecto de $c = 0$ se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0 \end{aligned}$$



En la cercanía de $(0, 1)$, la gráfica de P_6 puede usarse para aproximar la gráfica de $f(x) = \cos x$.
Figura 9.15

A través de repetida derivación puede verse que el patrón $1, 0, -1, 0$ se repite y se obtienen los polinomios de Maclaurin siguientes.

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2,$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4, \quad P_6(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

Usando $P_6(x)$, se obtiene la aproximación $\cos(0.1) \approx 0.995004165$, que coincide con el valor de la calculadora a nueve decimales. En la figura 9.15 se comparan las gráficas de $f(x) = \cos x$ y P_6.

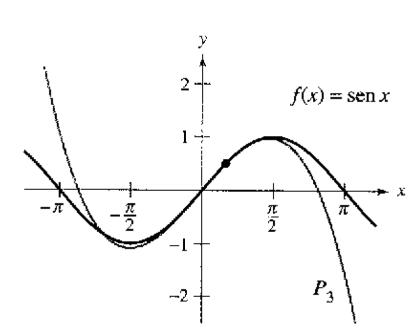
Note que en el ejemplo 5 los polinomios de Maclaurin para el cos x sólo tienen potencias pares de x. Similarmente, los polinomios de Maclaurin para sen x sólo tienen potencias impares de x (ver ejercicio 17). Esto generalmente no es verdad para los polinomios de Taylor para sen x y cos x desarrollados respecto de $c \neq 0$, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Encontrar un polinomio de Taylor para sen *x*

Encontrar el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, desarrollado respecto de $c = \pi/6$.

Solución Desarrollando respecto de $c = \pi/6$ se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



En la cercanía de $(\pi/6, 1/2)$, la gráfica de P_3 puede usarse para aproximar la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$
Figura 9.16

Así, el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, desarrollado respecto a $c = \pi/6$, es

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

La figura 9.16 compara las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y P_3.

Los polinomios de Taylor y de Maclaurin pueden usarse para aproximar el valor de una función en un punto específico. Por ejemplo, para aproximar el valor de ln(1.1), se pueden usar los polinomios de Taylor para $f(x) = \ln x$ desarrollados respecto de $c = 1$, como se muestra en el ejemplo 4, o se pueden usar los polinomios de Maclaurin, como se muestra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Aproximación por polinomios de Maclaurin

Usar un polinomio de Maclaurin para aproximar el valor de ln(1.1).

Solución Como 1.1 está más cerca a 1 que de 0, se deben considerar polinomios de Maclaurin para la función $g(x) = \ln(1 + x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1 + x) & g(0) &= \ln(1 + 0) = 0 \\ g'(x) &= (1 + x)^{-1} & g'(0) &= (1 + 0)^{-1} = 1 \\ g''(x) &= -(1 + x)^{-2} & g''(0) &= -(1 + 0)^{-2} = -1 \\ g'''(x) &= 2(1 + x)^{-3} & g'''(0) &= 2(1 + 0)^{-3} = 2 \\ g^{(4)}(x) &= -6(1 + x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= -6(1 + 0)^{-4} = -6 \end{aligned}$$

Notar que se obtienen los mismos coeficientes que en el ejemplo 4. Por consiguiente, el polinomio de Maclaurin de cuarto grado para $g(x) = \ln(1 + x)$ es

$$\begin{aligned} P_4(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\ln(1.1) = \ln(1 + 0.1) \approx P_4(0.1) \approx 0.0953083.$$

Verificar que el polinomio de Taylor de cuarto grado (del ejemplo 4), evaluado en $x = 1.1$, da el mismo resultado.

n	$P_n(0.1)$
1	0.1000000
2	0.0950000
3	0.0953333
4	0.0953083

La tabla a la izquierda ilustra la precisión de la aproximación del polinomio de Taylor al valor que da la calculadora para ln(1.1). Se puede ver que conforme n crece, $P_n(0.1)$ tiende al valor de la calculadora que es 0.0953102.

Por otro lado, la siguiente tabla ilustra que conforme se aleja uno del punto de desarrollo (o de expansión) $c = 1$, la precisión de la aproximación disminuye.

Aproximación de ln(1 + x) mediante un polinomio de Taylor de cuarto grado

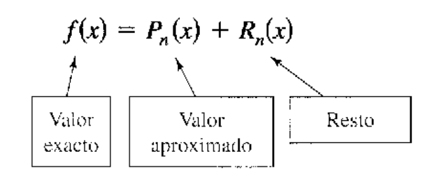
x	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\ln(1 + x)$	0	0.0953102	0.4054651	0.5596158	0.6931472
$P_4(x)$	0	0.0953083	0.4010417	0.5302734	0.5833333

Estas dos tablas ilustran dos puntos muy importantes sobre la precisión de los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) para su uso en aproximaciones.

1. La aproximación es normalmente mejor en los valores de x cercanos a c que en valores alejados de c.
2. La aproximación es generalmente entre mayor es el grado de los polinomios de Taylor (o de Maclaurin).

Resto de un polinomio de Taylor

Una técnica de aproximación es de poco valor sin alguna idea de su precisión. Para medir la precisión de una aproximación al valor de una función $f(x)$ mediante un polinomio de Taylor $P_n(x)$, se puede usar el concepto de **resto** $R_n(x)$, definido como sigue.



Así, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. El valor absoluto de $R_n(x)$ se llama **error** de la aproximación. Es decir,

$$\text{Error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

El siguiente teorema da un procedimiento general para estimar el resto de un polinomio de Taylor. Este importante teorema es conocido como el **teorema de Taylor**, y el resto dado en el teorema se llama **fórmula del resto de Lagrange**. (La demostración del teorema es larga, y se da en el apéndice A.)

TEOREMA 9.19 Teorema de Taylor

Si una función f es derivable hasta el orden $n + 1$ en un intervalo I contiene a c, entonces, para toda x en I, existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

NOTA Una consecuencia útil del teorema de Taylor es que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - c|^{n+1}}{(n + 1)!} \text{ máx } |f^{(n+1)}(z)|$$

donde máx$|f^{(n+1)}(z)|$ es el valor máximo de $f^{(n+1)}(z)$ entre x y c.

Para $n = 0$, el teorema de Taylor establece que si f es derivable en un intervalo I conteniendo c, entonces, para cada x en I, existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(z)(x - c) \qquad \text{o} \qquad f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

¿Reconoce este caso especial del teorema de Taylor? (Es el teorema del valor medio.)

Al aplicar el teorema de Taylor, no se debe esperar poder encontrar el valor exacto de z. (Si se pudiera hacer esto, no sería necesaria una aproximación.) Más bien, se trata de encontrar estas $f^{(n+1)}(z)$ a partir de las cuales se puede decir qué tan grande es el resto $R_n(x)$.

EJEMPLO 8 Determinar la precisión de una aproximación

El polinomio de Maclaurin de tercer grado para sen x está dado por

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Usar el teorema de Taylor para aproximar sen (0.1) mediante $P_3(0.1)$ y determinar la precisión de la aproximación.

Solución Aplicando el teorema de Taylor, se tiene

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$$

donde $0 < z < 0.1$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} \approx 0.1 - 0.000167 = 0.099833.$$

Como $f^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z$, se sigue que el error $|R_3(0.1)|$ puede acotarse como sigue.

$$0 < R_3(0.1) = \frac{\operatorname{sen} z}{4!}(0.1)^4 < \frac{0.0001}{4!} \approx 0.000004$$

Esto implica que

$$0.099833 < \operatorname{sen}(0.1) = 0.099833 + R_3(x) < 0.099833 + 0.000004$$
$$0.099833 < \operatorname{sen}(0.1) < 0.099837.$$

NOTA Intente verificar los resultados obtenidos en los ejemplos 8 y 9 usando una calculadora. En el ejemplo 8, se obtiene

$$\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.0998334.$$

En el ejemplo 9, se obtiene

$$P_3(1.2) \approx 0.1827$$

y

$$\ln(1.2) \approx 0.1823.$$

EJEMPLO 9 Aproximar un valor con una precisión determinada

Determine el grado del polinomio de Taylor $P_n(x)$ desarrollado respecto de $c = 1$ que debe usarse para aproximar $\ln(1.2)$ de manera que el error sea menor que 0.001.

Solución Siguiendo el modelo del ejemplo 4, se puede ver que la derivada de orden $(n + 1)$de $f(x) = \ln x$ está dada por

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Usando el teorema de Taylor, se sabe que el error $|R_n(1.2)|$ está dado por

$$|R_n(1.2)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1.2 - 1)^{n+1}\right| = \frac{n!}{z^{n+1}}\left[\frac{1}{(n+1)!}\right](0.2)^{n+1}$$
$$= \frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)}$$

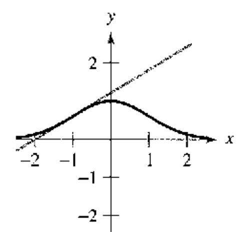
donde $1 < z < 1.2$. En este intervalo, $(0.2)^{n+1}/[z^{n+1}(n + 1)]$ es menor que $(0.2)^{n+1}/(n + 1)$. Así pues, se busca un valor de n tal que

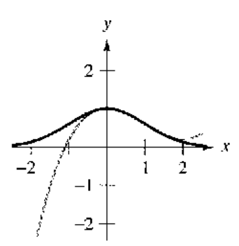
$$\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 0.001 \implies 1\,000 < (n+1)5^{n+1}.$$

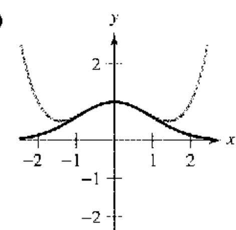
Por ensayo y error, puede determinarse que el menor valor de n que satisface esta desigualdad es $n = 3$. Por tanto, se necesita el polinomio de Taylor de tercer grado para lograr la precisión deseada al aproximar $\ln(1.2)$.

Ejercicios de la sección 9.7

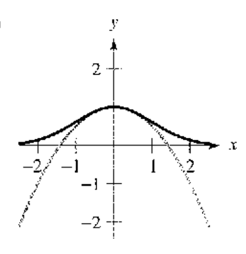
En los ejercicios 1 a 4, asociar la aproximación polinómica de Taylor para la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ con la gráfica correcta. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]







d)



1. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

2. $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

3. $g(x) = e^{-1/2}[(x + 1) + 1]$

4. $g(x) = e^{-1/2}\left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 - (x - 1) + 1\right]$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar una función polinómica de primer grado P_1 cuyo valor y pendiente coincidan con el valor y pendiente de f en $x = c$. Usar una calculadora para representar gráficamante f y P_1. ¿Cómo se le llama a P_1?

5. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad c = 1$

6. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}, \quad c = 8$

7. $f(x) = \sec x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

8. $f(x) = \tan x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

Análisis gráfico y numérico **En los ejercicios 9 y 10, usar una calculadora para representar graficamente f y su aproximación polinómica de segundo grado P_2 en $x = c$. Completar la tabla que compara los valores de f y P_2.**

9. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad c = 1$

$P_2(x) = 4 - 2(x - 1) + \frac{3}{2}(x - 1)^2$

x	0	0.8	0.9	1	1.1	1.2	2
$f(x)$							
$P_2(x)$							

10. $f(x) = \sec x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

$P_2(x) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2$

x	−2.15	0.585	0.685	$\frac{\pi}{4}$	0.885	0.985	1.785
$f(x)$							
$P_2(x)$							

11. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = \cos x$ y sus polinomios de Maclaurin P_2, P_4 y P_6 (ver ejemplo 5).

a) Usar una calculadora para representar gráficamente f y las aproximaciones polinómicas indicadas.

b) Evaluar y comparar los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2, 4$ y 6.

c) Usar los resultados del apartado *b*) para hacer una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

12. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = x^2e^x$.

a) Encontrar los polinomios de Maclaurin P_2, P_3 y P_4 para f.

b) Usar una calculadora para representar f, P_2, P_3 y P_4.

c) Evaluar y comparar los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2, 3$ y 4.

d) Usar los resultados del apartado *c*) para hacer una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

En los ejercicios 13 a 24, encontrar el polinomio de Maclaurin de grado n para la función.

13. $f(x) = e^{x}, \quad n = 3$

14. $f(x) = e^{-x}, \quad n = 5$

15. $f(x) = e^{2x}, \quad n = 4$

16. $f(x) = e^{3x}, \quad n = 4$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad n = 5$

18. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x, \quad n = 3$

19. $f(x) = xe^x, \quad n = 4$

20. $f(x) = x^2e^{-x}, \quad n = 4$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad n = 4$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad n = 4$

23. $f(x) = \sec x, \quad n = 2$

24. $f(x) = \tan x, \quad n = 3$

En los ejercicios 25 a 30, encontrar el polinomio de Taylor de grado n centrado en c.

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad n = 4, \quad c = 1$

26. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}, \quad n = 4, \quad c = 2$

27. $f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 4, \quad c = 1$

28. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad n = 3, \quad c = 8$

29. $f(x) = \ln x, \quad n = 4, \quad c = 1$

30. $f(x) = x^2 \cos x, \quad n = 2, \quad c = \pi$

En los ejercicios 31 y 32, usar un sistema de álgebra por computadora para encontrar los polinomios de Taylor indicados para la función f. Representar gráficamente la función y los polinomios de Taylor.

31. $f(x) = \tan x$

a) $n = 3, \quad c = 0$

b) $n = 3, \quad c = \pi/4$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

a) $n = 4, \quad c = 0$

b) $n = 4, \quad c = 1$

33. ***Aproximaciones numéricas y gráficas***

a) Usar los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para completar la tabla.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\operatorname{sen} x$	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$P_1(x)$					
$P_3(x)$					
$P_5(x)$					

b) Usar una calculadora para representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ y los polinomios de Maclaurin en el apartado *a*).

c) Describir el cambio en la precisión de una aproximación polinómica conforme aumenta la distancia al punto en el que se centra el polinomio.

34. ***Aproximaciones numéricas y gráficas***

a) Usar los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$, y $P_4(x)$ para $f(x) = \ln x$ centrados en $c = 1$ para completar la tabla.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\ln x$	0	0.2231	0.4055	0.5596	0.6931
$P_1(x)$					
$P_2(x)$					
$P_4(x)$					

b) Usar una calculadora para representar gráficamente $f(x) = \ln x$ y los polinomios de Taylor en el apartado *a*).

c) Describir el cambio en la precisión de aproximaciones polinómicas conforme crece el grado.

Aproximaciones numéricas y gráficas **En los ejercicios 35 y 36, *a*) encontrar el polinomio de Maclaurin $P_3(x)$ para $f(x)$, *b*) completar la tabla para $f(x)$ y $P_3(x)$, y *c*) dibujar las gráficas de $f(x)$ y $P_3(x)$ en el mismo eje de coordenadas.**

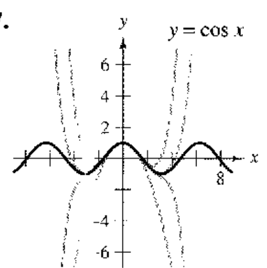
x	−0.75	−0.50	−0.25	0	0.25	0.50	0.75
$f(x)$							
$P_3(x)$							

35. $f(x) = \arcsen x$

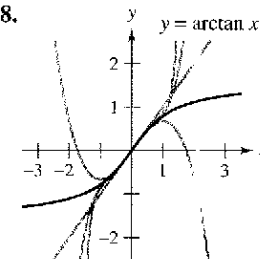
36. $f(x) = \arctan x$

En los ejercicios 37 a 40, la gráfica de $y = f(x)$ se muestra con cuatro de sus polinomios de Maclaurin. Identificar los polinomios de Maclaurin y usar una calculadora para confirmar sus resultados.

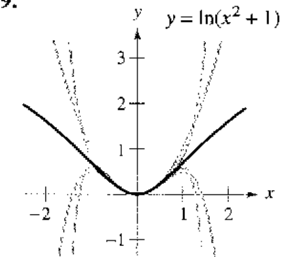
37.



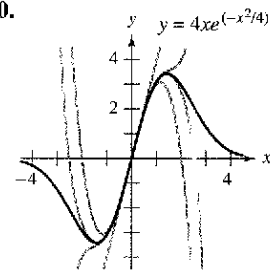
38.



39.



40.



En los ejercicios 41 a 44, aproximar la función al valor dado de x, usando el polinomio encontrado en el ejercicio indicado.

41. $f(x) = e^{-x}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)$, ejercicio 13

42. $f(x) = x^2e^{-x}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right)$, ejercicio 20

43. $f(x) = \ln x, \quad f(1.2)$, ejercicio 29

44. $f(x) = x^2\cos x, \quad f\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$, ejercicio 30

En los ejercicios 45 a 48, usar el teorema de Taylor para obtener una cota superior para el error de la aproximación. Después calcular el valor exacto del error.

45. $\cos(0.3) \approx 1 - \dfrac{(0.3)^2}{2!} + \dfrac{(0.3)^4}{4!}$

46. $e \approx 1 + 1 + \dfrac{1^2}{2!} + \dfrac{1^3}{3!} + \dfrac{1^4}{4!} + \dfrac{1^5}{5!}$

47. $\arcsen(0.4) \approx 0.4 + \dfrac{(0.4)^3}{2 \cdot 3}$

48. $\arctan(0.4) \approx 0.4 - \dfrac{(0.4)^3}{3}$

En los ejercicios 49 a 52, determinar el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función en el valor indicado de x sea menor que 0.001.

49. $\operatorname{sen}(0.3)$

50. $\cos(0.1)$

51. $e^{0.6}$

52. $e^{0.3}$

En los ejercicios 53 a 56, determinar el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función en el valor indicado de x sea menor que 0.0001. Usar un sistema de álgebra por computadora para obtener y evaluar las derivadas requeridas.

53. $f(x) = \ln(x + 1)$, aproximación $f(0.5)$.

54. $f(x) = \cos(\pi x^2)$, aproximación $f(0.6)$.

55. $f(x) = e^{-\pi x}$, aproximación $f(1.3)$.

56. $f(x) = e^{-x}$, aproximación $f(1)$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar los valores de x para los cuales la función pueda reemplazarse por el polinomio de Taylor si el error no puede ser mayor que 0.001.

57. $f(x) = e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$, $\quad x < 0$

58. $f(x) = \operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$

59. $f(x) = \cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$

60. $f(x) = e^{-2x} \approx 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3$

Desarrollo de conceptos

61. Una función elemental se aproxima por un polinomio. En sus propias palabras, describir qué significa decir que el polinomio se *desarrolla respecto a c* o *centrado en c*.

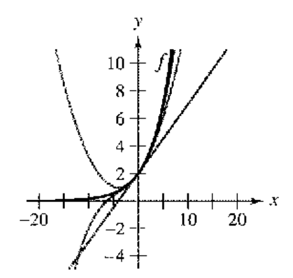
62. Cuando una función elemental f es aproximada por un polinomio de segundo grado P_2 centrada en c, ¿qué se sabe sobre f y P_2 en c? Explicar el razonamiento.

63. Enumerar la definición de un polinomio de Taylor grado n para f centrado en c.

64. Describir la precisión del polinomio de Taylor grado n para f centrado en c conforme aumenta la distancia entre c y x.

65. En general, ¿cómo cambia la precisión de un polinomio de Taylor cuando el grado del polinomio aumenta? Explicar el razonamiento.

66. Las gráficas muestran aproximaciones polinómicas de primero, segundo y tercero grado de P_1, P_2 y P_3 para una función f. Etiquete las gráficas de P_1, P_2 y P_3.



67. ***Comparación de los polinomios de Maclaurin***

a) Comparar los polinomios de Maclaurin de grado 4 y grado 5, respectivamente, para las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$. ¿Cuál es la relación entre ellos?

b) Usar el resultado en el apartado *a)* y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para encontrar un polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función $g(x) = x \operatorname{sen} x$.

c) Usar el resultado en el apartado *a)* y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para encontrar un polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $g(x) = (\operatorname{sen} x)/x$.

68. ***Derivación de los polinomios de Maclaurin***

a) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ y comparar el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $g(x) = \cos x$.

b) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 6 para $f(x) = \cos x$ y comparar el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $g(x) = \operatorname{sen} x$.

c) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $f(x) = e^x$. Describir la relación entre las dos series.

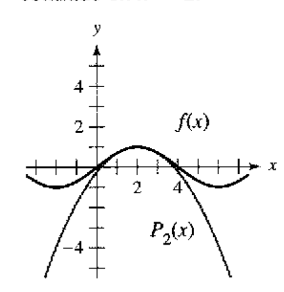
69. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

y el polinomio de Taylor de segundo grado

$$P_2(x) = 1 - \frac{\pi^2}{32}(x - 2)^2$$

centrado en $x = 2$.



a) Usar la simetría de la gráfica de f para escribir el polinomio de Taylor de segundo grado para f centrado en $x = -2$.

b) Usar una traslación horizontal del resultado en el apartado *a)* para encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado para f centrado en $x = 6$.

c) ¿Es posible usar una traslación horizontal del resultado en el apartado *a)* para escribir el polinomio de Taylor de segundo grado para f centrado en $x = 4$? Explique su razonamiento.

70. Demostrar que si f es una función impar, entonces su polinomio de Maclaurin de grado n contiene sólo términos con potencias impares de x.

71. Demostrar que si f es una función par, entonces su polinomio de Maclaurin de grado n contiene sólo términos con potencias pares de x.

72. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n para f en c. Demostrar que $P_n(c) = f(c)$ y $P^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$ para $1 \le k \le n$. (Ver ejercicios 9 y 10.)

73. ***Redacción*** La demostración en el ejercicio 72 garantiza que el polinomio de Taylor y sus derivadas coinciden con la función y sus derivadas en $x = c$. Usar las gráficas y tablas de los ejercicios 33 a 36 para discutir qué pasa con la precisión del polinomio de Taylor cuando uno se aleja de $x = c$.

Sección 9.8 Series de potencias

- Comprender la definición de una serie de potencias.
- Calcular el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Determinar la convergencia en los puntos terminales de una serie de potencias.
- Derivar e integrar una serie de potencias.

EXPLORACIÓN

Razonamiento gráfico Usar una calculadora para aproximar la gráfica de cada serie de potencias cerca de $x = 0$. (Usar los primeros términos de cada serie.) Cada serie representa una función muy conocida. ¿Cuál es la función?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

Series de potencias

En la sección 9.7, se presentó el concepto de aproximación de las funciones por medio de polinomios de Taylor. Por ejemplo, la función $f(x) = e^x$ puede ser *aproximada* por sus polinomios de Maclaurin como sigue.

$$e^x \approx 1 + x \qquad \text{Polinomio de grado 1.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad \text{Polinomio de grado 2.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \qquad \text{Polinomio de grado 3.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \qquad \text{Polinomio de grado 4.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{Polinomio de grado 5.}$$

En esa sección, se vio que la aproximación es tanto mejor cuanto mayor es el grado del polinomio.

En ésta y las próximas dos secciones se verá que varios tipos importantes de funciones, incluyendo

$$f(x) = e^x$$

pueden ser representadas *exactamente* por medio de una serie infinita llamada **serie de potencias**. Por ejemplo, la representación de serie de potencias para e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Para cada número real x puede mostrarse que la serie infinita a la derecha converge al número e^x. Sin embargo, antes de hacer esto se tratan algunos resultados preliminares relacionados con series de potencias, empezando con la definición siguiente.

Definición de series de potencias

Si x es una variable, entonces una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

se llama **serie de potencias**. De manera más general, una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

se llama **serie de potencias centrada en *c***, donde c es una constante.

NOTA Para simplificar la notación para series de potencias, se establece que $(x - c)^0 = 1$, aun cuando $x = c$.

EJEMPLO 1 Series de potencias

a) La serie de potencias siguiente está centrada en 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

b) La serie de potencias siguiente está centrada en -1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + \cdots$$

c) La serie de potencias siguiente está centrada en 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

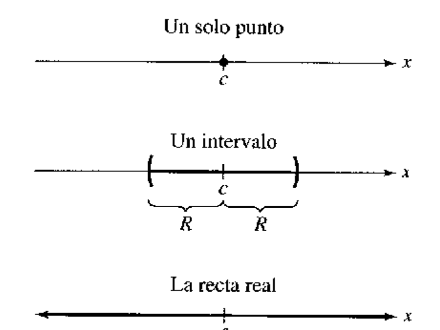
Radio e intervalo de convergencia

Una serie de potencias en x puede verse como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

donde el *dominio de f* es el conjunto de todas las x para la que la serie de potencias converge. La determinación del dominio de una serie de potencias es la preocupación primaria en esta sección. Claro está que, cada serie de potencias converge en su centro c porque

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n \\ &= a_0(1) + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ &= a_0. \end{aligned}$$



El dominio de una serie de potencias tiene sólo tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c, o toda la recta real
Figura 9.17

Así, c siempre queda en el dominio de f. El importante teorema siguiente establece que el dominio de una serie de potencias puede tomar tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c, o toda la recta real, como se muestra en la figura 9.17. Una demostración se da en el apéndice A.

TEOREMA 9.20 Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias centrada en c, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera.

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $|x - c| < R$, y diverge para $|x - c| > R$.
3. La serie converge absolutamente para todo x.

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie sólo converge en c, el radio de convergencia es $R = 0$, y si la serie converge para todo x, el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie de potencias converge es el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

AYUDA DE ESTUDIO Para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias, aplicar el criterio del cociente, como se demuestra en los ejemplos 2, 3 y 4.

EJEMPLO 2 Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución Para $x = 0$, se obtiene

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!0^n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Para cualquier valor fijo de x tal que $|x| > 0$, sea $u_n = n!x^n$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Por consiguiente, por el criterio del cociente, la serie diverge para $|x| > 0$ y sólo converge en su centro, 0. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 0$.

EJEMPLO 3 Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n.$$

Solución Para $x \neq 2$, sea $u_n = 3(x-2)^n$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |x-2| \\ &= |x-2|.\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si $|x-2| < 1$ y diverge si $|x-2| > 1$. Por consiguiente, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

EJEMPLO 4 Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

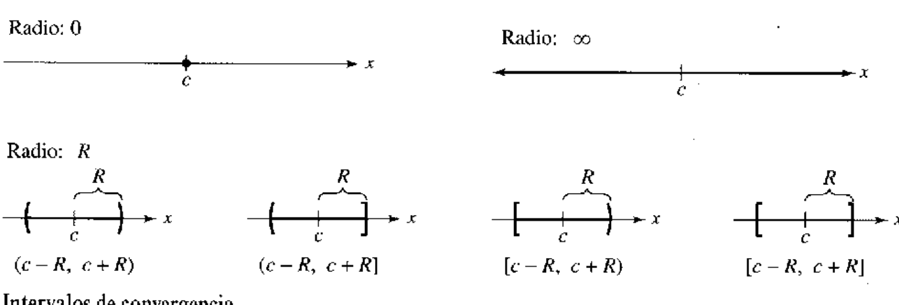
Solución Para $u_n = (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}.\end{aligned}$$

Para cualquier valor *fijo* x, este límite es 0. Por el criterio del cociente, la serie converge para todo x. Por consiguiente, el radio de convergencia es $R = \infty$.

Convergencia en los puntos terminales

Note que para una serie de potencias cuyo radio de convergencia es un número finito R, el teorema 9.20 no dice nada sobre la convergencia en los puntos *terminales* del intervalo de convergencia. Cada punto terminal debe analizarse separadamente respecto a convergencia o divergencia. Como resultado, el intervalo de convergencia de una serie de potencias puede tomar cualquiera de las seis formas mostradas en la figura 9.18.



Intervalos de convergencia
Figura 9.18

EJEMPLO 5 Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Solución Haciendo $u_n = x^n/n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\dfrac{x^n}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{n+1}\right| \\
&= |x|.
\end{aligned}$$

Por tanto, por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = 1$. Y como la serie es centrada en 0, converge en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, este intervalo no es necesariamente el *intervalo de convergencia*. Para determinar el intervalo se debe analizar la convergencia en cada uno de sus puntos terminales. Cuando $x = 1$, se obtiene la serie armónica *divergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots. \qquad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

Cuando $x = -1$, se obtiene la serie armónica alternada o alternante convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Por tanto, el intervalo de convergencia para la serie es $[-1, 1)$, como se muestra en la figura 9.19.

Intervalo: $[-1, 1)$
Radio: $R = 1$

-1 $c = 0$ 1 x

Figura 9.19

EJEMPLO 6 Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$.

Solución Haciendo $u_n = (-1)^n(x+1)^n/2^n$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(x+1)}{2^{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{x+1}{2}\right|.$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si $|(x+1)/2| < 1$ o $|x+1| < 2$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 2$. Como la serie está centrada en $x = -1$, converge en el intervalo $(-3, 1)$. Además, en los puntos terminales se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{Diverge cuando } x = -3$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

ambos divergen. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-3, 1)$, como se muestra en la figura 9.20.

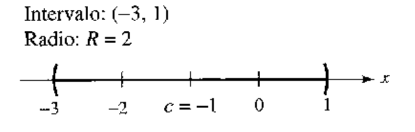


Figura 9.20

EJEMPLO 7 Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Solución Haciendo $u_n = x^n/n^2$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2x}{(n+1)^2}\right| = |x|.$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1$. Como la serie es centrada en $x = 0$, converge en el intervalo $(-1, 1)$. Cuando $x = 1$, se obtiene la serie p convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = 1$$

Cuando $x = -1$, se obtiene la serie alternada convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Por consiguiente, el intervalo de convergencia para la serie dada es $[-1, 1]$.

JAMES GREGORY (1638-1675)

Uno de los primeros matemáticos que trabajaron con series de potencias fue el escocés James Gregory. Él desarrolló un método de series de potencias para interpolar valores en una tabla, método que usó después Brook Taylor en el desarrollo de los polinomios de Taylor y las series de Taylor.

Derivación e integración de series de potencias

La representación de funciones mediante series de potencias ha jugado un papel importante en el desarrollo del cálculo. De hecho, mucho del trabajo de Newton con derivación e integración fue realizado en el contexto de las series de potencias especialmente su trabajo con funciones algebraicas complicadas y con funciones trascendentes. Euler, Lagrange, Leibniz y Bernoullis usaron ampliamente las series de potencias en cálculo.

Una vez que se ha definido una función con una serie de potencias, es natural preguntarse cómo se pueden determinar las características de la función. ¿Es continua? ¿Derivable? El teorema 9.21, el cual se establece sin la demostración, contesta estas preguntas.

TEOREMA 9.21 Propiedades de las funciones definidas mediante series de potencias

Si la función dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \\ &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \end{aligned}$$

tiene un radio de convergencia de $R > 0$, entonces, en el intervalo $(c - R, c + R)$, f es derivable (y por consiguiente continua). Además, la derivada y la primitiva o antiderivada de f son como sigue.

1. $$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} \\ &= C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots \end{aligned}$$

El *radio de convergencia* de la serie obtenida mediante la derivación o integración de una serie de potencias es el mismo que el de la serie de potencias original. Sin embargo, el *intervalo de convergencia* puede diferir como resultado del comportamiento en los puntos terminales.

El teorema 9.21 establece que, en muchos aspectos, una función definida mediante una serie de potencias se comporta como un polinomio. Es continua en su intervalo de convergencia, y tanto su derivada como su antiderivada o primitiva pueden ser determinadas derivando e integrando cada término de la serie de potencias dada. Por ejemplo, la derivada de la serie de potencias

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (2)\frac{x}{2} + (3)\frac{x^2}{3!} + (4)\frac{x^3}{4!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Nótese que $f'(x) = f(x)$. ¿Reconoce esta función?

EJEMPLO 8 Intervalos de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$

Considerar la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Calcular los intervalos de convergencia para cada una de las siguientes expresiones.

a) $\int f(x)\,dx$ *b)* $f(x)$ *c)* $f'(x)$

Solución Por el teorema 9.21, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= C + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdots. \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, se puede demostrar que cada serie tiene un radio de convergencia $R = 1$. Considerando el intervalo $(-1, 1)$, se tiene lo siguiente.

a) Para $\int f(x)\,dx$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1].$$

converge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $[-1, 1]$. Ver figura 9.21*a*.

b) Para $f(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1).$$

converge para $x = -1$ y diverge para $x = 1$. Por tanto, su intervalo de convergencia es $[-1, 1)$. Ver figura 9.21*b*.

c) Para $f'(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).$$

diverge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Ver figura 9.21*c*.

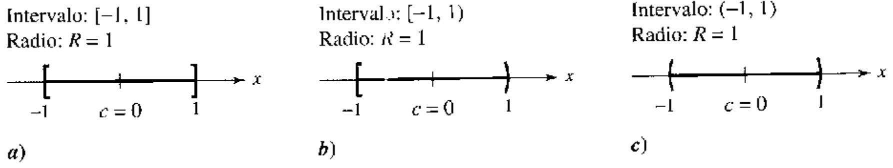


Figura 9.21

En el ejemplo 8 parece que de las tres series, la de la derivada, $f'(x)$, es la que tiene menor posibilidad de converger en los puntos terminales. De hecho, puede mostrarse que si la serie de $f'(x)$ converge en los puntos terminales $x = c \pm R$, la serie de $f(x)$ también converge en ellos.

Ejercicios de la sección 9.8

En los ejercicios 1 a 4, establecer dónde está centrada la serie de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

En los ejercicios 5 a 10, hallar el radio de convergencia de la serie de potencias.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n}}{n!}$

En los ejercicios 11 a 34, hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegúrese de incluir un análisis de la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(2n)!}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{2}\right)^n$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{4^n}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!(x-4)^n}{3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n2^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n-1}}$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-2x)^{n-1}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)x^n}{n!}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}\right] x^{2n+1}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)(x-3)^n}{4^n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

En los ejercicios 35 y 36, hallar el radio de convergencia de la serie de potencias, donde $c > 0$ y k es un entero positivo.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}$

36. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$

En los ejercicios 37 a 40, hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegúrese de incluir un análisis de la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n, \quad k > 0$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-c)^n}{nc^n}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)x^n}{n!}, \quad k \geq 1$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-c)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

En los ejercicios 41 a 44, escribir una serie equivalente en la que el índice para la suma empiece en $n = 1$.

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

42. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

44. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

En los ejercicios 45 a 48, calcular los intervalos de convergencia de *a)* $f(x)$, *b)* $f'(x)$, *c)* $f''(x)$ y *d)* $\int f(x)\,dx$. Incluya una verificación para la convergencia en los puntos terminales del intervalo.

45. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

46. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$

47. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$

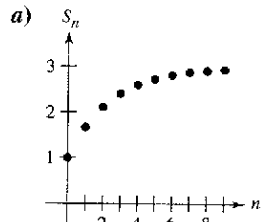
48. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n}$

Redacción **En los ejercicios 49 a 52, relacionar la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie**

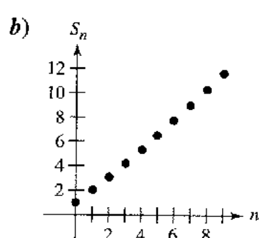
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

con el valor indicado de la función. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).] Explique cómo hizo su opción.

a)

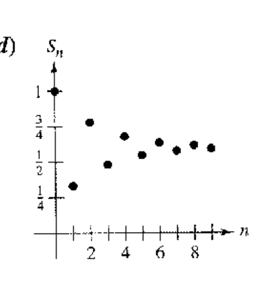


b)



c)

d)



49. $g(1)$

50. $g(2)$

51. $g(3.1)$

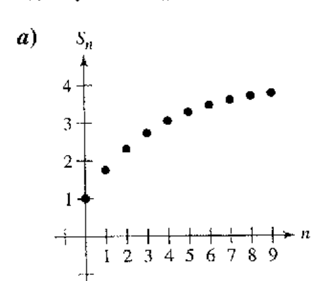
52. $g(-2)$

Redacción **En los ejercicios 53 a 56, relacionar la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie**

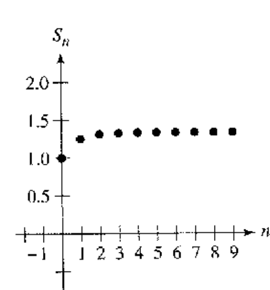
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

con el valor indicado de la función. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).] Explique cómo hizo su opción.

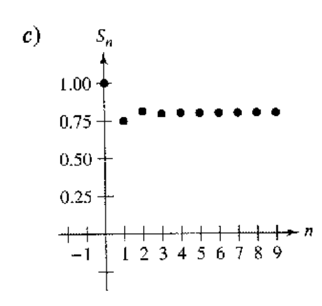
a)



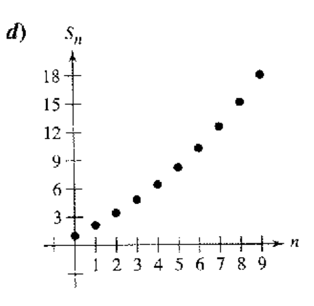
b)



c)



d)



53. $g\left(\frac{1}{8}\right)$

54. $g\left(-\frac{1}{8}\right)$

55. $g\left(\frac{9}{16}\right)$

56. $g\left(\frac{3}{8}\right)$

Desarrollo de conceptos

57. Definir una serie de potencias centrada en c.

58. Describir el radio de convergencia de una serie de potencias. Describir el intervalo de convergencia de una serie de potencias.

59. Describir las tres formas básicas del dominio de una serie de potencias.

Desarrollo de conceptos *(continuación)*

60. Describir cómo derivar e integrar una serie de potencias con un radio de convergencia R. ¿Tendrán las series resultantes de las operaciones de derivación e integración un radio de convergencia diferente? Explique.

61. Dé ejemplos que demuestren que la convergencia de una serie de potencias en los puntos terminales de su intervalo de convergencia puede ser condicional o absoluta. Explique su razonamiento.

62. Escriba una serie de potencias que tenga el intervalo de la convergencia indicado. Explique su razonamiento.

a) $(-2, 2)$ *b*) $(-1, 1]$ *c*) $(-1, 0)$ *d*) $[-2, 6)$

63. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

a) Hallar los intervalos de convergencia de f y g.

b) Mostrar que $f'(x) = g(x)$.

c) Mostrar que $g'(x) = -f(x)$.

d) Identificar las funciones f y g.

64. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

a) Hallar el intervalo de convergencia de f.

b) Demostrar que $f'(x) = f(x)$.

c) Demostrar que $f(0) = 1$.

d) Identificar las funciones f.

En los ejercicios 65 a 70, demostrar que la función representada por la serie de potencias es una solución de la ecuación diferencial.

65. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' + y = 0$

66. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $y'' + y = 0$

67. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' - y = 0$

68. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $y'' - y = 0$

69. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $y'' - xy' - y = 0$

70. $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$, $y'' + x^2 y = 0$

71. ***Función de Bessel*** La función de Bessel de orden 0 es

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

a) Mostrar que la serie converge para todo x.

b) Mostrar que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_0'' + x J_0' + x^2 J_0 = 0$.

c) Usar una calculadora para representar el polinomio constituido por los primeros cuatro términos de J_0.

d) Aproximar $\int_0^1 J_0\, dx$ a una precisión de dos decimales.

72. ***Función de Bessel*** La función de Bessel de orden 1 es

$$J_1(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+1}\, k!(k+1)!}.$$

a) Demostrar que la serie converge para todo x.

b) Demostrar que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_1'' + xJ_1' + (x^2 - 1)J_1 = 0$.

c) Usar una calculadora para representar el polinomio constituido por los primeros cuatro términos de J_1.

d) Mostrar que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

En los ejercicios 73 a 76, la serie representa una función muy conocida. Usar un sistema de álgebra por computadora para representar gráficamente la suma parcial S_{10} e identificar la función a partir de la gráfica.

73. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

74. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

75. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1$

76. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1$

77. ***Investigación*** En el ejercicio 11 se encontró que el intervalo de convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ es $(-2, 2)$.

a) Hallar la suma de la serie cuando $x = \frac{3}{4}$. Usar una calculadora para representar gráficamente los primeros seis términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal que representan la suma de la serie.

b) Repita el apartado *a*) para $x = -\frac{3}{4}$.

c) Escribir un párrafo corto comparando el ritmo o velocidad de convergencia de las sumas parciales con la suma de la serie en los apartados *a*) y *b*). ¿Cómo difieren las graficas de las sumas parciales cuando convergen hacia la suma de la serie?

d) Dado cualquier número real positivo M, existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{2}\right)^n > M.$$

Usar una calculadora para completar la tabla.

M	10	100	1000	10,000
N				

78. ***Investigación*** El intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

a) Hallar la suma de la serie cuando $x = \frac{1}{6}$. Usar una calculadora para representar gráficamente los primeros seis términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal que representan la suma de la serie.

b) Repitir el apartado *a*) con $x = -\frac{1}{6}$.

c) Escribir un párrafo corto comparando el ritmo o velocidad de convergencia de las sumas parciales con la suma de la serie en los apartados *a*) y *b*). ¿Cómo difieren las gráficas de las sumas parciales cuando convergen hacia la suma de la serie?

d) Dado cualquier número real positivo M, existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^{N} \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^n > M.$$

Usar una calculadora para completar la tabla.

M	10	100	1000	10,000
N				

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 79 a 82, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre su falsedad.**

79. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces también converge para $x = -2$.

80. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces también converge para $x = -1$.

81. Si el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $(-1, 1)$, entonces el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ es $(0, 2)$.

82. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 2$, entonces,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

83. Demuestre que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!(n+q)!} x^n$$

tiene un radio de convergencia de $R = \infty$ si p y q son enteros positivos.

84. Sea $g(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$, donde los coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para $n \ge 0$.

a) Hallar el intervalo de convergencia de la serie.

b) Hallar una fórmula explícita para $g(x)$.

85. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+3} = c_n$ para $n \ge 0$.

a) Hallar el intervalo de convergencia de la serie.

b) Hallar una fórmula explícita para $f(x)$.

86. Demostrar que si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tiene un radio de convergencia de R, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ tiene un radio de convergencia de $\sqrt{R}$.

87. Para $n > 0$, sea $R > 0$ y $c_n > 0$. Demuestre que si el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ es $(x_0 - R_3 x_0 + R]$, entonces la serie converge condicionalmente en $x_0 + R$.

Sección 9.9 Representación de funciones en series de potencias

- **Hallar una serie geométrica de potencias que representa una función.**
- **Construir una serie de potencias aplicando operaciones de series.**

JOSEPH FOURIER (1768-1830)

Parte de las contribuciones acerca de la representación de funciones mediante series de potencias se deben al matemático francés Joseph Fourier. El trabajo de Fourier es importante en la historia del cálculo, en parte porque obligó a matemáticos del siglo XVIII a cuestionar el estrecho concepto de función que prevalecía entonces. Cauchy y Dirichlet fueron motivados por el trabajo de Fourier sobre series, y en 1837 Dirichlet publicó la definición general de una función que se usa actualmente.

Series geométricas de potencias

En esta sección y en la próxima, se estudiarán varias técnicas para hallar una serie de potencias que represente una función dada.

Considerar la función dada por $f(x) = 1/(1 - x)$. La forma de f se parece mucho a la suma de una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

En otros términos, si se toma $a = 1$ y $r = x$, una representación de $1/(1 - x)$, en forma de una serie de potencias centrada en 0, es

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.\end{aligned}$$

Naturalmente, esta serie representa $f(x) = 1/(1 - x)$ sólo en el intervalo $(-1, 1)$, mientras que f está definida para todo $x \neq 1$, como se muestra en la figura 9.22. Para representar f en otro intervalo, se debe desarrollar otra serie diferente. Por ejemplo, para obtener la serie de potencias centrada en -1, se podría escribir

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{2 - (x + 1)} = \frac{1/2}{1 - [(x + 1)/2]} = \frac{a}{1 - r}$$

lo cual implica que $a = \frac{1}{2}$ y $r = (x + 1)/2$. Así, para $|x + 1| < 2$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x + 1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(x + 1)}{2} + \frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(x + 1)^3}{8} + \cdots\right], \quad |x + 1| < 2\end{aligned}$$

la cual converge en el intervalo $(-3, 1)$.

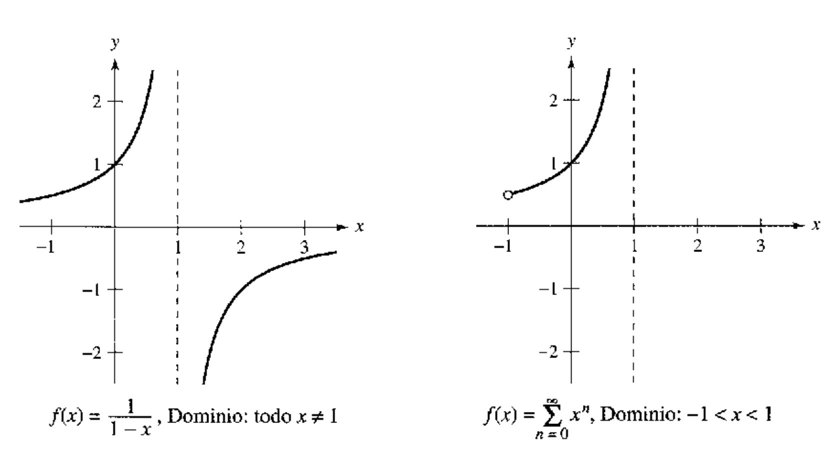


Figura 9.22

EJEMPLO 1 Hallar una serie geométrica de potencias centrada en 0

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$, centrada en 0.

Solución Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1 - r)$ se obtiene

$$\frac{4}{2+x} = \frac{2}{1-(-x/2)} = \frac{a}{1-r}$$

lo cual implica que $a = 2$ y $r = -x/2$. Por tanto, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\begin{aligned}\frac{4}{x+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= 2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdot \cdot \cdot\right).\end{aligned}$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

lo cual implica que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

Otra manera de determinar una serie de potencias para una función racional como la del ejemplo 1 es usar la división larga. Por ejemplo, dividiendo $2 + x$ en 4, se obtiene el resultado mostrado a la izquierda.

División larga

$$\begin{array}{r} 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdot \cdot \cdot \\ 2 + x\,\overline{)\,4 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{4 + 2x} \qquad\qquad\quad \\ -2x \qquad\qquad\quad \\ \underline{-2x - x^2} \qquad\quad \\ x^2 \qquad\quad \\ \underline{x^2 + \frac{1}{2}x^3} \\ -\frac{1}{2}x^3 \\ \underline{-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4} \end{array}$$

EJEMPLO 2 Hallar una serie geométrica de potencias centrada en 1

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, centrada en 1.

Solución Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1 - r)$ se obtiene

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(-x+1)} = \frac{a}{1-r}$$

lo cual implica que $a = 1$ y $r = 1 - x = -(x - 1)$. Por tanto, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdot \cdot \cdot .\end{aligned}$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$|x - 1| < 1$$

lo cual implica que el intervalo de convergencia es $(0, 2)$.

Operaciones con series de potencias

La versatilidad de las series geométricas de potencias se mostrará más adelante en esta sección, después de una discusión acerca de las operaciones con series de potencias. Estas operaciones, usadas con la derivación y la integración, proporcionan un medio para desarrollar series de potencias para una gran variedad de funciones elementales. (Por simplicidad, las propiedades siguientes se enuncian para una serie centrada en 0.)

Operaciones con series de potencias

Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$.

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

3. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$

Las operaciones descritas pueden modificar el intervalo de convergencia de la serie resultante. Por ejemplo, en la suma siguiente, el intervalo de convergencia de la suma es la intersección de los intervalos de convergencia de las dos series originales.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(-1,\,1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n}_{\cap\ (-2,\,2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)x^n}_{=\ (-1,\,1)}$$

EJEMPLO 3 Suma de dos series de potencias

Hallar una serie de potencias, centrada en 0, para $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-1}$.

Solución Usando las fracciones parciales, se puede escribir $f(x)$ como

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Sumando las dos series geométricas de potencias

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

y

$$\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

se obtiene la serie de potencias siguiente.

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1]x^n = 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 - \cdots$$

El intervalo de convergencia para esta serie de potencias es $(-1, 1)$.

EJEMPLO 4 Hallar una serie de potencias mediante integración

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \ln x$, centrada en 1.

Solución Por el ejemplo 2, se sabe que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

Intervalo de convergencia: $(0, 2)$.

Integrando esta serie se obtiene

$$\ln x = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$
$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Haciendo $x = 1$, se concluye, $C = 0$. Por consiguiente,

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots.$$

Intervalo de convergencia: $(0, 2]$.

Note que la serie converge en $x = 2$. Esto es consistente con la observación hecha en la sección precedente de que la integración de una serie de potencias puede alterar la convergencia en los puntos terminales del intervalo de convergencia.

TECNOLOGÍA En la sección 9.7, el polinomio de Taylor de cuarto grado para la función logarítmica natural

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

fue usado para aproximar $\ln(1.1)$.

$$\ln(1.1) \approx (0.1) - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4$$
$$\approx 0.0953083$$

Se sabe ahora por el ejemplo 4 que este polinomio representa los primeros cuatro términos de la serie de potencias para $\ln x$. Es más, usando el resto de la serie alternada o alternante, puede determinarse que el error en esta aproximación es menor que

$$|R_4| \le |a_5|$$
$$= \frac{1}{5}(0.1)^5$$
$$= 0.000002.$$

En los siglos XVII y XVIII, se calcularon tablas matemáticas para los logaritmos y para valores de otras funciones transcendentes. Tales técnicas numéricas están lejos de ser obsoletas, porque es precisamente con estos medios que las modernas calculadoras están programadas para evaluar funciones transcendentes.

The Granger Collection

SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Las series que pueden usarse para aproximar π ha interesado a matemáticos durante los últimos 300 años. Una serie interesante para aproximar $1/\pi$ la descubrió el matemático hindú Srinivasa Ramanujan en 1914 (ver ejercicio 64). Cada término sucesivo de la serie de Ramanujan agrega aproximadamente ocho dígitos más al valor de $1/\pi$. Para más información sobre el trabajo de Ramanujan, ver el artículo "Ramanujan and Pi" de Jonathan M. Borwein y Peter B. Borwein en *Scientific American*.

EJEMPLO 5 Hallar una serie de potencias mediante integración

Hallar una serie de potencias para $g(x) = \arctan x$, centrado en 0.

Solución Como $D_x[\arctan x] = 1/(1 + x^2)$, puede usarse la serie

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).$$

Sustituyendo x^2 para x se obtiene

$$f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Por último, integrando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + C \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && \text{Sea } x = 0, \text{ entonces } C = 0. \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots. && \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).
\end{aligned}$$

Puede mostrarse que la serie de potencias desarrollada para $\arctan x$ en el ejemplo 5 también converge (a $\arctan x$) para $x = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $x = 1$, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\arctan 1 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, esta serie (desarrollada por James Gregory en 1671) no proporciona una manera práctica de aproximar π debido a que converge tan lentamente que se necesitarían cientos de términos para obtener una precisión razonable. El ejemplo 6 muestra cómo usar *dos* series diferentes de arctangente para obtener una aproximación muy buena de π usando unos cuantos términos. Esta aproximación fue desarrollada por John Machin en 1706.

EJEMPLO 6 Aproximación a π mediante una serie

Usar la identidad trigonométrica

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

para aproximar el número π [ver ejercicio 50*b*].

Solución Al usar sólo cinco términos de cada una de las series para el $\arctan(1/5)$ y $\arctan(1/239)$, se obtiene

$$4\left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}\right) \approx 3.1415926$$

lo cual coincide con el valor exacto de π con un error menor que 0.0000001.

Ejercicios de la sección 9.9

En los ejercicios 1 a 4, calcular una serie geométrica de potencias para la función, centrada en 0, *a*) mediante la técnica mostrada en los ejemplos 1 y 2, y *b*) mediante la división larga.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$
2. $f(x) = \dfrac{4}{5 - x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

En los ejercicios 5 a 16, hallar una serie de potencias para la función, centrada en *c*, y determinar el intervalo de convergencia.

5. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}, \quad c = 5$
6. $f(x) = \dfrac{4}{5 - x}, \quad c = -2$
7. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}, \quad c = 0$
8. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}, \quad c = 2$
9. $g(x) = \dfrac{1}{2x - 5}, \quad c = -3$
10. $h(x) = \dfrac{1}{2x - 5}, \quad c = 0$
11. $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}, \quad c = 0$
12. $f(x) = \dfrac{4}{3x + 2}, \quad c = 2$
13. $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 + x - 2}, \quad c = 0$
14. $g(x) = \dfrac{4x - 7}{2x^2 + 3x - 2}, \quad c = 0$
15. $f(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}, \quad c = 0$
16. $f(x) = \dfrac{4}{4 + x^2}, \quad c = 0$

En los ejercicios 17 a 26, usar la serie de potencias

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para determinar una serie de potencias, centrada en 0, para la función. Identificar el intervalo de convergencia.

17. $h(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x}$
18. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2(1 + x)} - \dfrac{1}{2(1 - x)}$
19. $f(x) = -\dfrac{1}{(x + 1)^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x + 1}\right]$
20. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^3} = \dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{1}{x + 1}\right]$
21. $f(x) = \ln(x + 1) = \displaystyle\int \dfrac{1}{x + 1}\, dx$
22. $f(x) = \ln(1 - x^2) = \displaystyle\int \dfrac{1}{1 + x}\, dx - \int \dfrac{1}{1 - x}\, dx$
23. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
24. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
25. $h(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 1}$
26. $f(x) = \arctan 2x$

Análisis gráfico y numérico **En los ejercicios 27 y 28, sea**

$$S_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}.$$

Usar una calculadora para confirmar gráficamente la desigualdad. Después completar la tabla para confirmar numéricamente la desigualdad.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
S_n						
$\ln(x + 1)$						
S_{n+1}						

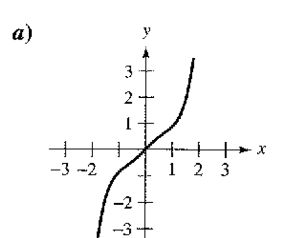
27. $S_2 \leq \ln(x + 1) \leq S_3$
28. $S_4 \leq \ln(x + 1) \leq S_5$

En los ejercicios 29 y 30, *a*) representar gráficamente varias sumas parciales de la serie, *b*) hallar la suma de la serie y su radio de convergencia, *c*) usar 50 términos de la serie para aproximar la suma cuando $x = 0.5$, y *d*) determinar qué representa la aproximación y qué tan buena es.

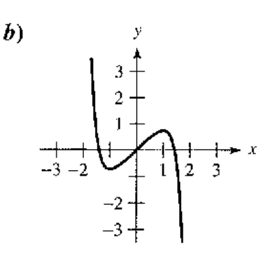
29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x - 1)^n}{n}$
30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

En los ejercicios 31 a 34, relacionar la aproximación polinómica de la función $f(x) = \arctan x$ con la gráfica correcta. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]

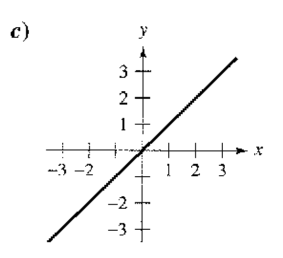
a)



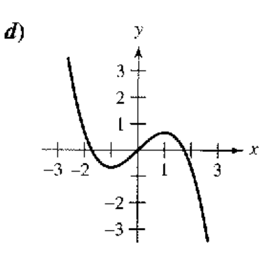
b)



c)



d)



31. $g(x) = x$
32. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$
33. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$
34. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}$

En los ejercicios 35 a 38, usar la serie para $f(x) = \arctan x$ para aproximar el valor, usando $R_N \leq 0.001$.

35. $\arctan \frac{1}{4}$

36. $\int_0^{3/4} \arctan x^2\, dx$

37. $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x^2}{x}\, dx$

38. $\int_0^{1/2} x^2 \arctan x\, dx$

En los ejercicios 39 a 42, usar la serie de potencias

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x| < 1.$$

Hallar la representación por medio de una serie de la función y determinar su intervalo de convergencia.

39. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

40. $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

41. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

42. $f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}$

43. ***Probabilidad*** Una moneda se lanza repetidamente. La probabilidad que la primera cara ocurra en la n-ésima lanzada es $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Cuando este juego se repite muchas veces, el número medio de lanzadas requerido hasta que la primera cara ocurra es

$$E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n).$$

(Este valor se llama *valor esperado de n*.) Usar los resultados de los ejercicios 39 a 42 para encontrar $E(n)$. ¿Es la respuesta lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

44. Usar los resultados de los ejercicios 39 a 42 para encontrar la suma de cada serie.

a) $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *b)* $\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{9}{10}\right)^n$

Redacción **En los ejercicios 45 a 48, explicar cómo usar la serie geométrica**

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

para hallar la serie para la función. No calcular la serie.

45. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

46. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

47. $f(x) = \frac{5}{1+x}$

48. $f(x) = \ln(1-x)$

49. Demostrar que $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ para $xy \neq 1$ siempre que el valor del lado izquierdo de la ecuación esté entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

50. Usar el resultado del ejercicio 49 para verificar cada identidad.

a) $\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

b) $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

[*Sugerencia:* Usar el ejercicio 49 dos veces para encontrar $4 \arctan \frac{1}{5}$. Después usar el apartado *a*).]

En los ejercicios 51 y 52, *a*) verificar la ecuación dada, y *b*) usar la ecuación y la serie para el arctangente para aproximar π para una precisión de dos decimales.

51. $2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

52. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

En los ejercicios 53 a 58, calcular la suma de la serie convergente usando una función muy conocida. Identificar la función y explicar cómo se obtuvo la suma.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n n}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n n}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{5^n n}$

56. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

57. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$

Desarrollo de conceptos

59. Usar los resultados de los ejercicios 31 a 34 para dar un argumento geométrico del por qué las series para la aproximación de $f(x) = \arctan x$ tienen sólo potencias impares de x.

60. Usar los resultados de los ejercicios 31 a 34 para hacer una conjetura sobre los grados de las series para la aproximación de $f(x) = \arctan x$ que tienen extremos relativos.

61. Una de las series en los ejercicios 53 a 58 converge a su suma a un ritmo mucho menor que las otras cinco series. ¿Cuál es? Explicar por qué esta serie converge tan lentamente. Usar una calculadora para ilustrar el ritmo o velocidad de convergencia.

62. El radio de convergencia de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es 3. ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$? Explicar el razonamiento.

63. Las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergen para $|x+1| < 4$. ¿Qué se puede concluir acerca de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$? Explicar el razonamiento.

64. Usar una calculadora para demostrar que

$$\frac{\sqrt{8}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)396^{4n}} = \frac{1}{\pi}.$$

(*Nota:* Esta serie la descubrió el matemático hindú Srinivasa Ramanujan en 1914.)

En los ejercicios 65 y 66, hallar la suma de la serie.

65. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$

66. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$

Sección 9.10 Series de Taylor y de Maclaurin

- **Hallar una serie de Taylor o de Maclaurin para una función.**
- **Hallar una serie binomial.**
- **Usar una lista básica de series de Taylor para hallar otras series de Taylor.**

COLIN MACLAURIN (1698-1746)

Se acredita el desarrollo de las series de potencias para representar funciones al trabajo combinado de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Gregory, Newton, John y James Bernoulli, Leibniz, Euler, Lagrange, Wallis y Fourier contribuyeron a este trabajo. Sin embargo, los dos nombres más comúnmente asociados con las series de potencias son Brook Taylor (1685-1731) y Colin Maclaurin.

Series de Taylor y de Maclaurin

En la sección 9.9, se obtuvieron series de potencias para varias funciones usando series geométricas con derivación o integración término-por-término. En esta sección se estudia un procedimiento *general* para obtener la serie de potencias para una función que tiene derivadas de todos los órdenes. El teorema siguiente da la forma que debe tomar *toda* serie de potencias convergente.

TEOREMA 9.22 Forma de una serie de potencias convergente

Si f se representa por una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, a_n(x-c)^n$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene c, entonces $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots.$$

Demostración Suponer que la serie de potencias $\Sigma\, a_n(x-c)^n$ tiene un radio de convergencia R. Entonces, por el teorema 9.21, se sabe que la n-ésima derivada de f existe para $|x-c| < R$, y mediante derivación sucesiva se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \cdots\\
f^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots\\
f^{(2)}(x) &= 2a_2 + 3!a_3(x-c) + 4 \cdot 3a_4(x-c)^2 + \cdots\\
f^{(3)}(x) &= 3!a_3 + 4!a_4(x-c) + \cdots\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-c) + \cdots
\end{aligned}$$

Evaluando cada una de estas derivadas en $x = c$ se ve que

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(c) &= 0!a_0\\
f^{(1)}(c) &= 1!a_1\\
f^{(2)}(c) &= 2!a_2\\
f^{(3)}(c) &= 3!a_3
\end{aligned}$$

y, en general, $f^{(n)}(c) = n!a_n$. Despejando a_n, se encuentra que los coeficientes de las series de potencias que representan a $f(x)$ son

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

NOTA Asegúrese de entender el teorema 9.22. Éste dice que *si una serie de potencias converge a* $f(x)$, la serie debe ser una serie de Taylor. El teorema *no* dice que toda serie formada con los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ converge a $f(x)$.

Nótese que los coeficientes de la serie de potencias en el teorema 9.22 son precisamente los coeficientes de los polinomios de Taylor para $f(x)$ en c como se definió en la sección 9.7. Por esta razón, la serie se llama **serie de Taylor** para $f(x)$ en c.

Definición de las series de Taylor y de Maclaurin

Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

se llama **serie de Taylor para $f(x)$ en c**. Además, si $c = 0$, entonces la serie es **serie de Maclaurin para f**.

Si se conoce el patrón para los coeficientes de los polinomios de Taylor para una función, se puede desarrollar fácilmente el patrón para formar la serie de Taylor correspondiente. Por ejemplo, en el ejemplo 4 de la sección 9.7, se encuentra que el polinomio de Taylor de cuarto grado para $\ln x$, centrado en 1, es

$$P_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4.$$

A partir de este patrón se puede obtener la serie de Taylor para $\ln x$ centrada en $c = 1$,

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \cdots.$$

EJEMPLO 1 Construcción de una serie de potencias

Aplicar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ para formar la serie de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

y determinar el intervalo de convergencia.

Solución La derivación sucesiva de $f(x)$ da

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. El patrón se repite después de la tercera derivada. Por tanto, la serie de potencias es como sigue.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots\\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= 0 + (1)x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6\\
&\quad + \frac{(-1)}{7!}x^7 + \cdots\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente puede concluirse que esta serie converge para todo x.

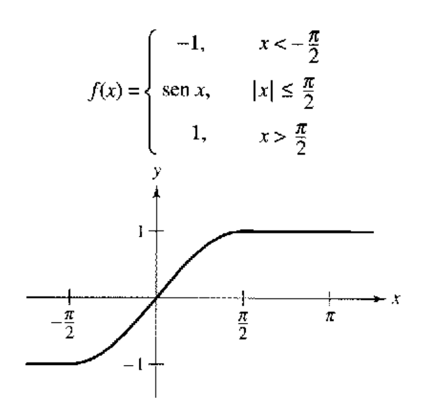


Figura 9.23

Notar que en el ejemplo 1 no se puede concluir que la serie de potencias converja a sen x para todo x. Simplemente se puede concluir que la serie de potencias converge a alguna función, pero no se sabe con seguridad a qué función. Esto es un punto sutil, pero importante, en relación con las series de Taylor o de Maclaurin. Para persuadir que la serie

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdot \cdot \cdot$$

podría converger a otra función que no fuera f, recordar que las derivadas se evalúan en un solo punto. Puede pasar fácilmente que otra función coincida con los valores de $f^{(n)}(x)$ en $x = c$ y discrepe en otros valores de x. Por ejemplo, si se forma la serie de potencias (centrada en 0) para la función mostrada en la figura 9.23, se obtiene la misma serie que en el ejemplo 1. Se sabe que la serie converge para todo x, pero obviamente no puede converger tanto hacia $f(x)$ como hacia sen x para todo x.

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I centrado en c. La serie de Taylor para f no puede converger para algún x en I. O, aun cuando converja, puede no tener $f(x)$ como su suma. No obstante, el teorema 9.19 dice que para cada n,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Notar que en esta fórmula del resto el valor particular de z que hace la fórmula del residuo verdadero depende de los valores de x y n. Si $R_n \to 0$, entonces el teorema siguiente dice que la serie de Taylor para f realmente converge en $f(x)$ para todo x en I.

TEOREMA 9.23 Convergencia de las series de Taylor

Si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ para todo x en el intervalo I, entonces la serie de Taylor para f converge y es igual a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Demostración Para una serie de Taylor, la n-ésima suma parcial coincide con el n-ésimo polinomio de Taylor. Es decir, $S_n(x) = P_n(x)$. Además, como

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] \\ &= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x). \end{aligned}$$

Así, para un x dado, la serie de Taylor (la sucesión de sumas parciales) converge a $f(x)$ si y sólo si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

NOTA En otras palabras, el teorema 9.23 dice que una serie de potencias formado con los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ converge a la función de la que se derivó precisamente en aquellos valores en los que el resto tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

En el ejemplo 1, derivamos la serie de potencias de la función del seno y también concluimos que la serie converge a alguna función en toda la recta real. En el ejemplo 2 veremos que la serie realmente converge para sen x. La observación clave es que aunque el valor de z no es conocido, es posible obtener una cota superior para $|f^{(n+1)}(z)|$.

EJEMPLO 2 Una serie de Maclaurin convergente

Mostrar que la serie de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$ converge para sen x para todo x.

Solución Usando el resultado del ejemplo 1, se necesita demostrar que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

es verdad para todo x. Como

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \operatorname{sen} x$$

o

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x$$

se sabe que $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ para todo número real z. Por consiguiente, para cualquier x fijo, se puede aplicar el teorema de Taylor (teorema 9.19) para concluir que

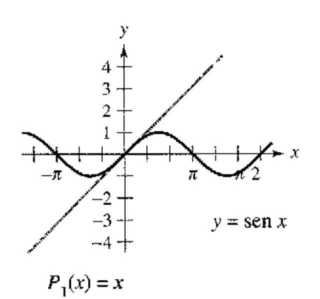
$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

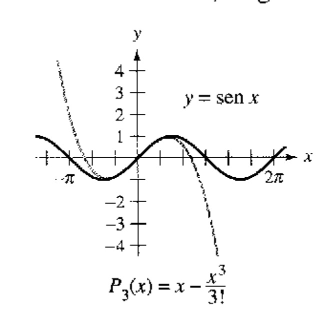
De la discusión en la sección 9.1 respecto de los ritmos relativos de convergencia de sucesiones exponenciales y factoriales, se sigue que para un x fijo

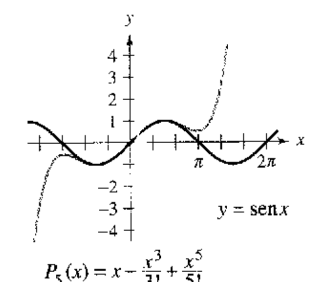
$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

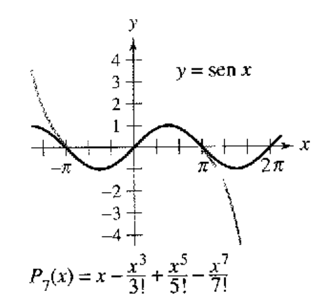
Por último, por el teorema del encaje o del emparedado, se sigue que para todo x, $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, por el teorema 9.23, la serie de Maclaurin para sen x converge a sen x para todo x.

La figura 9.24 ilustra visualmente la convergencia de la serie de Maclaurin para sen x comparando las gráficas del polinomio de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$, y $P_7(x)$ con la gráfica de la función seno. Notar que a medida que el grado del polinomio aumenta, su gráfica se parece más a la de la función seno.









Conforme n aumenta, la gráfica de P_n se parece más a la de la función seno.
Figura 9.24

Las pasos para encontrar una serie de Taylor para $f(x)$ en c se resumen a continuación.

Pasos para encontrar una serie de Taylor

1. Derivar $f(x)$ varias veces y evaluar cada derivada en c.

$$f(c), f'(c), f''(c), f'''(c), \cdot\cdot\cdot, f^{(n)}(c), \cdot\cdot\cdot$$

Intentar reconocer un patrón en estos números.

2. Usar la sucesión desarrollada en el primer paso para formar los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$, y determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias resultante

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdot\cdot\cdot.$$

3. Dentro de este intervalo de convergencia, determinar si la serie converge o no a $f(x)$.

La determinación directa de los coeficientes de Taylor o de Maclaurin usando derivación sucesiva puede ser difícil, y el siguiente ejemplo ilustra una manera más sencilla para encontrar los coeficientes de manera indirecta usando los coeficientes de una serie de Taylor o de Maclaurin comocida.

EJEMPLO 3 Serie de Maclaurin para una función compuesta

Encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

Solución Para encontrar los coeficientes directamente para esta serie de Maclaurin, deben calcularse derivadas sucesivas de $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Calculando solamente las dos primeras,

$$f'(x) = 2x\cos x^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = -4x^2 \operatorname{sen} x^2 + 2\cos x^2$$

puede verse que esta tarea sería bastante embarazosa. Afortunadamente hay una alternativa. Primero considerar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ encontrada en el ejemplo 1.

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sen} x \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdot\cdot\cdot \end{aligned}$$

Ahora, como $\operatorname{sen} x^2 = g(x^2)$, puede sustituirse x para x^2 en la serie para sen x y obtener

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x^2 &= g(x^2) \\ &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdot\cdot\cdot. \end{aligned}$$

Asegurarse de entender el punto ilustrado en el ejemplo 3. Como el cálculo directo de los coeficientes de Taylor o de Maclaurin puede ser tedioso, la manera más práctica de encontrar una serie de Taylor o de Maclaurin es desarrollar series de potencias para una *lista básica* de funciones elementales. A partir de esta lista puede determinarse la serie de potencias para otras funciones mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, derivación, integración o composición con series de potencias conocidas.

Series binomiales

Antes de presentar la lista básica de funciones elementales, construir una serie más para una función de la forma $f(x) = (1 + x)^k$. Esto produce la **serie binomial.**

EJEMPLO 4 Serie binomial

Hallar la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$ y determinar su radio de convergencia. Asumir que k no es un entero positivo.

Solución Mediante derivación sucesiva, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1\\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k\\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1)\\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2)\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= k\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

la cual produce la serie

$$1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{k(k-1)\cdot\cdot\cdot(k-n+1)x^n}{n!} + \cdot\cdot\cdot .$$

Como $a_{n+1}/a_n \to 1$, puede aplicarse el criterio del cociente para concluir que el radio de convergencia es $R = 1$. Por tanto, la serie converge a alguna función en el intervalo $(-1, 1)$.

Note que el ejemplo 4 muestra que la serie de Taylor para $(1 + x)^k$ converge a alguna función en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, el ejemplo no muestra que la serie realmente converge a $(1 + x)^k$. Para hacer esto, podría mostrarse que el resto $R_n(x)$ converge a 0, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 5 Hallar una serie binomial

Hallar la serie de potencias para $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$.

Solución Usando la serie binomial

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \cdot\cdot\cdot$$

se hace $k = \frac{1}{3}$ y se escribe

$$(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2 2!} + \frac{2\cdot 5x^3}{3^3 3!} - \frac{2\cdot 5\cdot 8x^4}{3^4 4!} + \cdot\cdot\cdot$$

la cual converge para $-1 \le x \le 1$

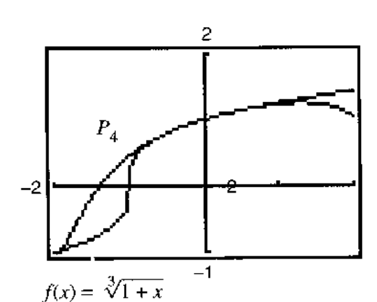


Figura 9.25

TECNOLOGÍA Usar una calculadora para confirmar el resultado del ejemplo 5. Cuando grafique las funciones

$$f(x) = (1 + x)^{1/3} \quad \text{y} \quad P_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$$

en la misma pantalla, debe obtener el resultado mostrado en la figura 9.25.

Obtención de la serie de Taylor de una lista básica

La lista siguiente proporciona las series de potencias para varias funciones elementales con los intervalos de convergencia correspondientes.

Series de potencias para funciones elementales

Función	*Intervalo de convergencia*
$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots$	$0 < x < 2$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \cdots$	$0 < x \leq 2$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \leq x \leq 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \cdots$	$-1 < x < 1$*

* *La convergencia a $x = \pm 1$ depende del valor de k.*

NOTA La serie binomial es válida para los valores no enteros de k. Pero, si k es un entero positivo, la serie binomial se reduce a un simple desarrollo binomial.

EJEMPLO 6 Obtención de una serie de potencias a partir de la lista básica

Hallar la serie de potencias para $f(x) = \cos\sqrt{x}$.

Solución Usando la serie de potencias

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

puede reemplazarse x por $\sqrt{x}$ para obtener la serie

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \cdots.$$

Esta serie converge para todo x en el dominio de $\cos\sqrt{x}$, es decir, para $x \geq 0$.

Las series de potencias pueden multiplicarse y dividirse como los polinomios. Después de encontrar los primeros términos del producto (o cociente), se puede reconocer un patrón.

EJEMPLO 7 Multiplicación y división de series de potencias

Hallar los primeros tres términos distintos de cero de cada una de las series de Maclaurin.

a) $e^x \arctan x$ *b)* $\tan x$

Solución

a) Al usar las series de Maclaurin para e^x y $\arctan x$ de la tabla, se tiene

$$e^x \arctan x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right).$$

Multiplicar estas expresiones y reunir los términos como se haría al multiplicar polinomios.

$$\begin{array}{l}
1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\
\underline{x \qquad - \frac{1}{3}x^3 \qquad + \frac{1}{5}x^5 - \cdots} \\
x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots \\
\qquad - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 - \cdots \\
\underline{\qquad\qquad + \frac{1}{5}x^5 + \cdots} \\
x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots
\end{array}$$

Así, $e^x \arctan x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$.

b) Al usar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de la tabla, se tiene

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}.$$

Dividir usando la división larga.

$$\begin{array}{r}
x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots \;\big)\; x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
\underline{x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots} \\
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
\underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots} \\
\frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}$$

Así, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$.

EJEMPLO 8 Una serie de potencias para $\operatorname{sen}^2 x$

Hallar la serie de potencias para $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Solución Reescribir $\operatorname{sen}^2 x$ como sigue.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Ahora, usar la serie para el $\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdot \cdot \cdot$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \cdot \cdot \cdot$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdot \cdot \cdot$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdot \cdot \cdot$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdot \cdot \cdot$$

Esta serie converge para $-\infty < x < \infty$.

Como se mencionó en la sección precedente, las series de potencias pueden usarse para obtener tablas de valores de funciones transcendentes. También son útiles para estimar los valores de integrales definidas para las que no pueden encontrarse las antiderivadas o primitivas. El ejemplo siguiente demuestra este uso.

EJEMPLO 9 Aproximación de una integral definida mediante una serie de potencias

Usar una serie de potencias para aproximar

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con un error menor que 0.01.

Solución Sustituyendo x por $-x^2$ en la serie para e^x se obtiene lo siguiente.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdot \cdot \cdot$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdot \cdot \cdot\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdot \cdot \cdot$$

Sumando los primeros cuatro términos, se tiene

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0.74$$

lo cual, por el criterio de la serie alternada o alternante, tiene un error menor que $\frac{1}{216} \approx 0.005$.

Ejercicios de la sección 9.10

En los ejercicios 1 a 10, usar la definición para encontrar la serie de Taylor (centrada en c) para la función.

1. $f(x) = e^{2x}, \quad c = 0$
2. $f(x) = e^{3x}, \quad c = 0$
3. $f(x) = \cos x, \quad c = \frac{\pi}{4}$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad c = \frac{\pi}{4}$
5. $f(x) = \ln x, \quad c = 1$
6. $f(x) = e^{x}, \quad c = 1$
7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad c = 0$
8. $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad c = 0$
9. $f(x) = \sec x, \quad c = 0$ (primeros tres términos distintos de cero)
10. $f(x) = \tan x, \quad c = 0$ (primeros tres términos distintos de cero)

En los ejercicios 11 a 14, demostrar que la serie de Maclaurin para la función converge a la función para todo x.

11. $f(x) = \cos x$
12. $f(x) = e^{-2x}$
13. $f(x) = \operatorname{senh} x$
14. $f(x) = \cosh x$

En los ejercicios 15 a 20, usar la serie binomial para encontrar la serie de Maclaurin para la función.

15. $f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$
16. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$
17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$
18. $f(x) = \sqrt[4]{1 + x}$
19. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
20. $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$

En los ejercicios 21 a 30, encontrar la serie de Maclaurin para la función. (Usar la tabla de series de potencias para las funciones elementales.)

21. $f(x) = e^{x^2/2}$
22. $g(x) = e^{-3x}$
23. $g(x) = \operatorname{sen} 3x$
24. $f(x) = \cos 4x$
25. $f(x) = \cos x^{3/2}$
26. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x^3$
27. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x$
28. $f(x) = e^x + e^{-x} = 2 \cosh x$
29. $f(x) = \cos^2 x$
30. $f(x) = \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$\left(\textit{Sugerencia:}\ \text{Integrar la serie para } \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.\right)$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar la serie de Maclaurin para la función. (Ver ejemplo 7.)

31. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
32. $h(x) = x \cos x$
33. $g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
34. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 35 y 36, usar una serie de potencias y el hecho de que $i^2 = -1$ para verificar la fórmula.

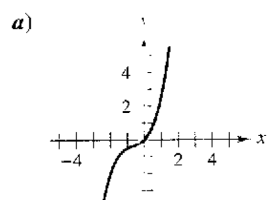
35. $g(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \operatorname{sen} x$
36. $g(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$

En los ejercicios 37 a 42, encontrar los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función, multiplicando o dividiendo las series de potencias apropiadas. Usar la tabla de series de potencias para las funciones elementales. Usar una calculadora para representar gráficamente la función y su aproximación polinómica correspondiente.

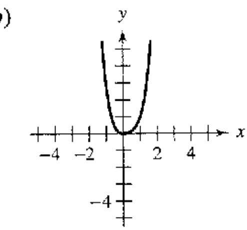
37. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$
38. $g(x) = e^x \cos x$
39. $h(x) = \cos x \ln(1 + x)$
40. $f(x) = e^x \ln(1 + x)$
41. $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x}$
42. $f(x) = \frac{e^x}{1 + x}$

En los ejercicios 43 a 46, relacionar el polinomio con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).] Obtener el factor común de cada polinomio e identificar la función aproximada por el polinomio de Taylor restante.

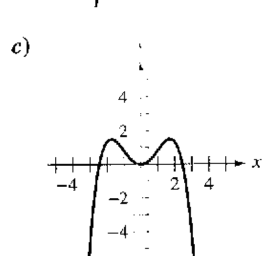
a)



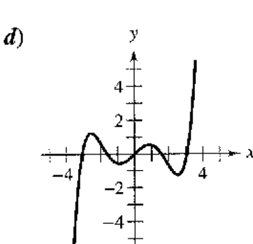
b)



c)



d)



43. $y = x^2 - \frac{x^4}{3!}$
44. $y = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!}$
45. $y = x + x^2 + \frac{x^3}{2!}$
46. $y = x^2 - x^3 + x^4$

En los ejercicios 47 y 48, encontrar una serie de Maclaurin para $f(x)$.

47. $f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1)\, dt$

48. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt$

En los ejercicios 49 a 52, verificar la suma. Entonces usar una calculadora para aproximar la suma con un error menor que 0.0001.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)!}\right] = \text{sen } 1$

51. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{e-1}{e}$

En los ejercicios 53 y 54, usar la representación en series de la función f para encontrar $\lim_{x \to 0} f(x)$ (si existe).

53. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

54. $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

En los ejercicios 55 a 58, usar una serie de potencias para aproximar el valor de la integral con un error menor que 0.0001. (En los ejercicios 55 y 56, asumir que el integrando se define como 1 cuando $x = 0$.)

55. $\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$

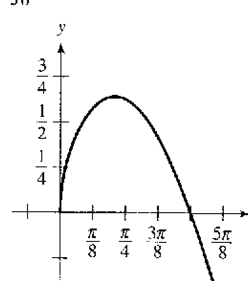
56. $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx$

57. $\int_{0.1}^{0.3} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

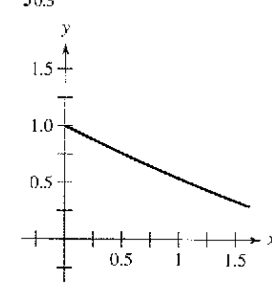
58. $\int_0^{1/4} x \ln(x + 1)\, dx$

Área **En los ejercicios 59 y 60, usar una serie de potencias para aproximar el área de la región. Usar una calculadora para verificar el resultado.**

59. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos x\, dx$

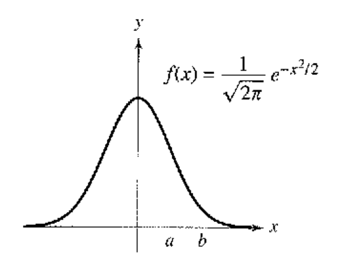


60. $\int_{0.5}^{1} \cos \sqrt{x}\, dx$



Probabilidad **En los ejercicios 61 y 62, aproximar la probabilidad normal con un error menor que 0.0001, donde la probabilidad está dada por**

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$



61. $P(0 < x < 1)$

62. $P(1 < x < 2)$

En los ejercicios 63 a 66, usar un sistema de álgebra por computadora para encontrar el polinomio de Taylor de quinto grado (centrado en c) para la función. Representar gráficamente la función y el polinomio. Usar la gráfica para determinar el intervalo más grande en que el polinomio es una aproximación razonable de la función.

63. $f(x) = x \cos 2x, \quad c = 0$

64. $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2} \ln(1 + x), \quad c = 0$

65. $g(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad c = 1$

66. $h(x) = \sqrt[3]{x} \arctan x, \quad c = 1$

Desarrollo de conceptos

67. Enunciar los pasos para encontrar una serie de Taylor.

68. Si f es una función par, ¿qué debe ser verdad acerca de los coeficientes a_n en la serie de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n?$$

Explicar el razonamiento.

69. Explicar cómo usar la serie

$$g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para encontrar la serie para cada función. No hallar la serie.

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$

70. Definir la serie binomial. ¿Cuál es su radio de convergencia?

71. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil disparado desde el suelo sigue la trayectoria dada por

$$y = \left(\tan\theta - \frac{g}{kv_0\cos\theta}\right)x - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0\cos\theta}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo de proyección, g es la aceleración debida a la gravedad y k es el factor de retardo causado por la resistencia del aire. Usando la representación de series de potencias

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdot\cdot\cdot, \quad -1 < x < 1$$

verificar que la trayectoria se puede reescribir como

$$y = (\tan\theta)x + \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{kgx^3}{3v_0^3\cos^3\theta} + \frac{k^2gx^4}{4v_0^4\cos^4\theta} + \cdot\cdot\cdot.$$

72. ***Movimiento de un proyectil*** Usar el resultado del ejercicio 71 para determinar la serie para la trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo con un ángulo de $\theta = 60°$, una velocidad inicial de $v_0 = 64$ pies por segundo y un factor de retardo $k = \frac{1}{16}$.

73. ***Investigación*** Considerar la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Dibujar una gráfica de la función.

b) Usar la forma alternativa de la definición de la derivada (sección 2.1) y la regla de L'Hôpital para mostrar que $f'(0) = 0$. [Continuando este proceso, puede mostrarse que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > 1$.]

c) Usando el resultado en el apartado *b*), encontrar la serie de Maclaurin para f. ¿Converge la serie a f?

74. ***Investigación***

a) Hallar la serie de potencias centrada en 0 para la función

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}.$$

b) Usar una calculadora para representar gráficamente f y el polinomio de Taylor de grado ocho $P_8(x)$ para f.

c) Completar la tabla, donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2+1)}{t^2}\,dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x P_8(t)\,dt.$$

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
$F(x)$						
$G(x)$						

d) Describir la relación entre las gráficas de f y P_8 y los resultados dados en la tabla en el apartado *c*).

75. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ para todo x real.

76. Encontrar la serie de Maclaurin para

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

y determinar su radio de convergencia. Usar los primeros cuatro términos de la serie para aproximar ln 3.

En los ejercicios 77 a 80, evaluar el coeficiente binomial usando la fórmula

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\cdot\cdot\cdot(k-n+1)}{n!}$$

donde k es un número real, n es un entero positivo, y

$$\binom{k}{0} = 1.$$

77. $\dbinom{5}{3}$

78. $\dbinom{-2}{2}$

79. $\dbinom{0.5}{4}$

80. $\dbinom{-1/3}{5}$

81. Escribir la serie de potencias para $(1+x)^k$ en términos de los coeficientes binomiales.

82. Demostrar que e es irracional. [*Sugerencia:* Asumir que $e = p/q$ es racional (p y q son enteros) y considerar

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{n!} + \cdot\cdot\cdot.]$$

83. Mostrar que la serie de Maclaurin para la función

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

es

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci con $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 3$.

(*Sugerencia:* Escribir

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot\cdot\cdot$$

y multiplicar cada lado de esta ecuación por $1 - x - x^2$.)

Preparación del examen Putnam

84. Asumir que $|f(x)| \leq 1$ y $|f''(x)| \leq 1$ para todo x en un intervalo de longitud por lo menos 2. Mostrar que $|f'(x)| \leq 2$ en el intervalo.

Ejercicios de repaso para el capítulo 9

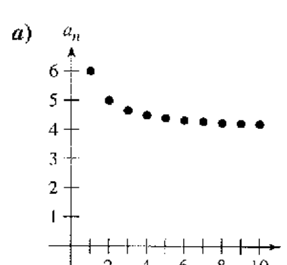
En los ejercicios 1 y 2, escribir una expresión para el término n-ésimo de la sucesión.

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

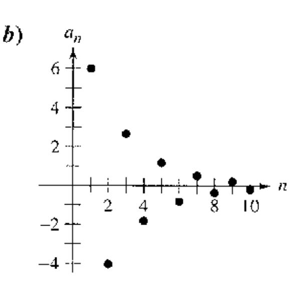
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots$

En los ejercicios 3 a 6, relacionar la sucesión con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]

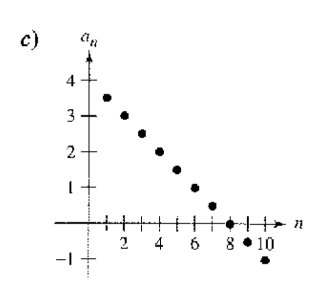
a)



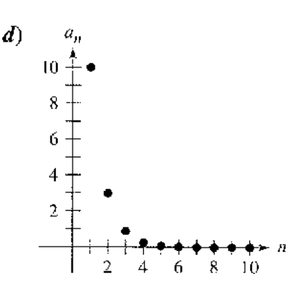
b)



c)



d)



3. $a_n = 4 + \frac{2}{n}$

4. $a_n = 4 - \frac{1}{2}n$

5. $a_n = 10(0.3)^{n-1}$

6. $a_n = 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

En los ejercicios 7 y 8, usar una calculadora para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión. Usar la gráfica para hacer una inferencia acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión. Verificar su inferencia analíticamente y, si la sucesión converge, encontrar su límite.

7. $a_n = \frac{5n + 2}{n}$

8. $a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$

En los ejercicios 9 a 16, determinar la convergencia o divergencia de la sucesión con el término n-ésimo dado. Si la sucesión converge, encontrar su límite. (*b* y *c* son números reales positivos.)

9. $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$

10. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

11. $a_n = \frac{n^3}{n^2 + 1}$

12. $a_n = \frac{n}{\ln n}$

13. $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$

14. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

15. $a_n = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

16. $a_n = (b^n + c^n)^{1/n}$

17. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de \$5 000 en una cuenta que gana 5% de interés compuesto trimestral. El balance en la cuenta después de n trimestres es

$$A_n = 5\,000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

a) Calcular los primeros ocho términos de la sucesión $\{A_n\}$.

b) Hallar el balance de la cuenta después de 10 años calculando el término 40 de la sucesión.

18. ***Depreciación*** Una compañía compra una nueva máquina por \$120 000. Durante los siguientes 5 años la máquina perderá valor a un ritmo o velocidad de 30% por año. (Es decir, al final de cada año, el valor perdido será 70% de lo que era al principio del año.)

a) Hallar una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión que da el valor V de la máquina en t años después de que fue comprado.

b) Hallar el valor perdido de la máquina después de 5 años.

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 19 a 22, *a*) usar una calculadora para encontrar la suma parcial indicada S_k y completar la tabla, y *b*) usar una calculadora para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales.**

k	5	10	15	20	25
S_k					

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

En los ejercicios 23 a 26, determinar la convergencia o divergencia de las series.

23. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.82)^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.82)^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n}$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{3n + 2}$

En los ejercicios 27 a 30, encontrar la suma de la serie convergente.

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

En los ejercicios 31 y 32, *a*) escribir el decimal periódico como una serie geométrica, y *b*) escribir su suma como el cociente de dos enteros.

31. $0.\overline{09}$ **32.** $0.\overline{923076}$

33. ***Distancia*** Una pelota se deja caer de una altura de 8 metros. Cada vez que se deja caer h metros rebota hasta una altura de $0.7h$. Encontrar la distancia total recorrida por la pelota.

34. ***Salario*** Se tiene un trabajo en el que gana el primer año un sueldo de \$32 000. Durante los siguientes 39 años, se recibirá 5.5% de aumento cada año. ¿Cuál sería su compensación total en un periodo de 40 años?

35. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de \$200 al final de cada mes durante 2 años en una cuenta que paga 6% de interés compuesto continuo. Determinar el saldo de la cuenta al final de 2 años.

36. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de \$100 al final de cada mes durante 10 años en una cuenta que paga 3.5% mensual compuesto. Determinar el equilibrio en la cuenta al final de 10 años.

En los ejercicios 37 a 40, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$ **38.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$ **40.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n}\right)$

En los ejercicios 41 a 44, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n}}$ **42.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ **44.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 5}$

En los ejercicios 45 a 48, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

45. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 3}$ **46.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

47. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n-3}$ **48.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n^3}{n}$

En los ejercicios 49 a 52, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

Análisis gráfico y analítico **En los ejercicios 53 y 54, *a*) verificar que la serie converge, *b*) usar una calculadora para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla, *c*) usar una calculadora para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, y *d*) usar la tabla para estimar la suma de la serie.**

n	5	10	15	20	25
S_n					

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$ **54.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^3 + 5}$

55. ***Redacción*** Usar una calculadora para completar la tabla para *a*) $p = 2$ y *b*) $p = 5$. Escribir un párrafo corto describiendo y comparando los datos en la tabla.

N	5	10	20	30	40
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$					
$\displaystyle\int_N^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$					

56. ***Redacción*** Se dice que los términos de una serie positiva parecen tender a cero muy lentamente cuando n tiende a infinito. (De hecho, $a_{75} = 0.7$.) Si no se da otra información, ¿se puede concluir que la serie diverge? Apoyar la respuesta con un ejemplo

En los ejercicios 57 y 58, encuentrar el polinomio de Taylor de tercer grado centrado en *c*.

57. $f(x) = e^{-x/2}, \quad c = 0$

58. $f(x) = \tan x, \quad c = -\dfrac{\pi}{4}$

En los ejercicios 59 a 62, usar un polinomio de Taylor para aproximar la función con un error menor que 0.001.

59. sen 95° **60.** cos(0.75)

61. ln(1.75) **62.** $e^{-0.25}$

63. Un polinomio de Taylor centrado en 0 se usará para aproximar la función coseno. Encontrar el grado del polinomio requerido para obtener la exactitud deseada en cada intervalo.

Error máximo	*Intervalo*
a) 0.001	$[-0.5, 0.5]$
b) 0.001	$[-1, 1]$
c) 0.0001	$[-0.5, 0.5]$
d) 0.0001	$[-2, 2]$

64. Usar una calculadora para representar gráficamente la función coseno y los polinomios de Taylor del ejercicio 63.

En los ejercicios 65 a 70, encontrar el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegúrese de incluir una verificación para la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

65. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{10}\right)^n$

66. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

67. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{(n+1)^2}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n}$

69. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$

70. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$

En los ejercicios 71 y 72, demostrar que la función representada por la serie de potencias es una solución de la ecuación diferencial.

71. $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$
$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

72. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{2^n n!}$
$y'' + 3xy' + 3y = 0$

En los ejercicios 73 y 74, encontrar una serie geométrica de potencias centrada en 0 para la función.

73. $g(x) = \frac{2}{3-x}$

74. $h(x) = \frac{3}{2+x}$

75. Encontrar una serie de potencias para la derivada de la función del ejercicio 73.

76. Encontrar una serie de potencias para la integral de la función del ejercicio 74.

En los ejercicios 77 y 78, encontrar una función representada por la serie y dar el dominio de la función.

77. $1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 + \cdots$

78. $8 - 2(x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{8}(x-3)^3 + \cdots$

En los ejercicios 79 a 86, encontrar la serie de potencias para la función centrada en c.

79. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad c = \frac{3\pi}{4}$

80. $f(x) = \cos x, \quad c = -\frac{\pi}{4}$

81. $f(x) = 3^x, \quad c = 0$

82. $f(x) = \csc x, \quad c = \frac{\pi}{2}$
(primeros tres términos)

83. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad c = -1$

84. $f(x) = \sqrt{x}, \quad c = 4$

85. $g(x) = \sqrt[5]{1+x}, \quad c = 0$

86. $h(x) = \frac{1}{(1+x)^3}, \quad c = 0$

En los ejercicios 87 a 92, encontrar la suma de las series convergentes utilizando una función muy conocida. Identificar la función y explicar cómo se obtuvo la suma.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n n}$

88. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^n n}$

89. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$

90. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n!}$

91. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{3^{2n} (2n)!}$

92. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1} (2n+1)!}$

93. ***Redacción*** Una de las series en los ejercicios 41 y 49 converge a su suma a un ritmo o velocidad más lento que la otra serie. ¿Cuál es? Explique por qué esta serie converge tan despacio. Usar una calculadora para ilustrar el ritmo o velocidad de convergencia.

94. Usar la serie binomial para encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

95. ***Construyendo series de Maclaurin*** Determinar los primeros cuatro términos de la serie de Maclaurin para e^{2x}

a) usando la definición de la serie de Maclaurin y la fórmula para el coeficiente del término n-ésimo, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

b) reemplazando x por $2x$ en la serie para e^x.

c) multiplicando la serie para e^x por ella misma, ya que $e^{2x} = e^x \cdot e^x$.

96. ***Construyendo series de Maclaurin*** Seguir el patrón del ejercicio 95 para encontrar los primeros cuatro términos de la serie para sen $2x$. (*Sugerencia:* sen $2x = 2$ sen x cos x.)

En los ejercicios 97 a 100, encontrar la representación mediante una serie de la función definida por la integral.

97. $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

98. $\int_0^x \cos \frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$

99. $\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t}\, dt$

100. $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$

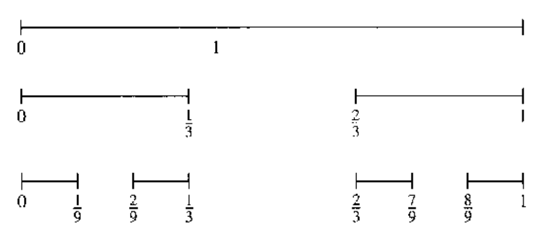
En los ejercicios 101 y 102, usar una serie de potencias para encontrar el límite (si existe). Verificar el resultado usando la regla de L'Hôpital.

101. $\lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

102. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

SP Solución de problemas

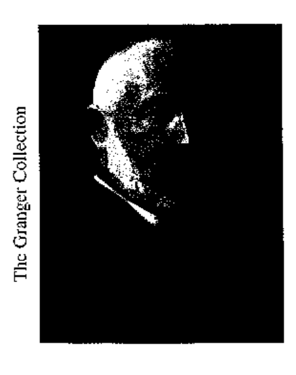
1. El conunto de Cantor (Georg Cantor, 1845-1918) es un subconjunto del intervalo de la unidad $[0, 1]$. Para construir el conjunto Cantor, primero eliminar el tercio central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ del intervalo, dejando dos segmentos de la recta. En el segundo paso, elimine el tercio central de cada uno de los dos segmentos restantes, dejando cuatro segmentos de recta. Continúe con este procedimiento indefinidamente, como se muestra en la figura. El conjunto de Cantor consiste en todos los números que quedan en el intervalo unidad $[0, 1]$.



   a) Hallar la longitud total de todos los segmentos de la recta eliminados.

   b) Dar tres números que están en el conjunto de Cantor.

   c) Sea C_n la longitud total de los segmentos de la recta restantes después de n pasos. Encontrar $\lim_{n\to\infty} C_n$.



The Granger Collection

GEORG CANTOR (1845-1918)

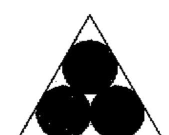
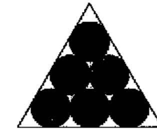
Matemático alemán conocido por su trabajo en el desarrollo de la teoría de conjuntos que es la base del análisis matemático moderno. Esta teoría se extiende al concepto de números infinitos (o transfinitos).

2. Puede demostrarse que

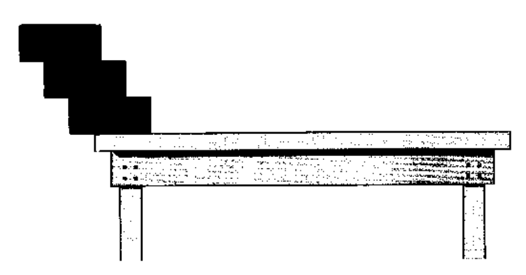
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ [ver ejemplo 3}b\text{), sección 9.3].}$$

   Usar este hecho para demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. Sea T un triángulo equilátero con lados de longitud 1. Sea a_n el número de círculos que pueden empacarse en n hileras dentro del triángulo. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, y $a_3 = 6$, como se muestra en la figura. Sea A_n el área combinada de los a_n círculos. Encontrar $\lim_{n\to\infty} A_n$.

4. Se apilan bloques idénticos de una unidad de longitud sobre el borde de una mesa. El centro de gravedad del bloque superior debe quedar sobre el bloque debajo de él, el centro de gravedad de los dos bloques superiores debe quedar sobre el bloque debajo de ellos, y así sucesivamente (ver la figura).



   a) Si hay tres bloques, demostrar que es posible apilarlos de manera que el borde izquierdo del bloque superior se encuentre $\frac{11}{12}$ unidades más allá del borde de la mesa.

   b) ¿Es posible apilar los bloques de manera que el borde derecho del bloque superior se encuentre más allá del borde de la mesa?

   c) ¿Qué tan lejos de la mesa pueden apilarse los bloques?

5. *a*) Considerar la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + \cdots$$

   en la que los coeficientes $a_n = 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$ son periódicos con periodo $p = 3$. Hallar el radio de convergencia y la suma de esta serie de potencias.

   b) Considerar una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   en la cual los coeficientes son periódicos, $(a_{n+p} = a_p)$ y $a_n > 0$. Hallar el radio de convergencia y la suma de esta serie de potencias.

6. ¿Para qué valor de las constantes positivas a y b converge la serie siguiente absolutamente? ¿Para qué valores converge condicionalmente?

$$a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{a}{5} - \frac{b}{6} + \frac{a}{7} - \frac{b}{8} + \cdots$$

7. *a*) Hallar una serie de potencias para la función

$$f(x) = xe^x$$

   centrada en 0. Usar esta representación para encontrar la suma de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$$

   b) Derivar la serie de potencias para $f(x) = xe^x$. Usar el resultado para encontrar la suma de la serie infinita

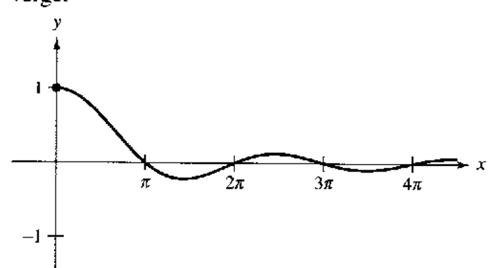
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

8. Hallar $f^{(12)}(0)$ si $f(x) = e^{x^2}$. (*Sugerencia:* No calcular las derivadas.)

9. La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

se muestra debajo. Usar el criterio de la serie alternada o alternante para demostrar que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge.



10. *a*) Demostrar que $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$ converge si y sólo si $p > 1$.

b) Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^2)}.$$

11. *a*) Considerar la siguiente sucesión de números definida recursiva o recurrentemente.

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = \sqrt{3}$$
$$a_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$$

Escribir las aproximaciones decimales de los primeros seis términos de esta sucesión. Demostrar que la sucesión converge y encontrar su límite.

b) Considerar la siguiente sucesión recursivamente definida por $a_1 = \sqrt{a}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, donde $a > 2$.

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a + \sqrt{a}},\ \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ldots$$

Demostrar que esta sucesión converge y encuentra su límite.

12. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos que satisfacen $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L < \frac{1}{r}$, $r > 0$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ converge.

13. Considerar la serie infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$.

a) Hallar los primeros cinco términos de la sucesión de sumas parciales.

b) Demostrar que el criterio del cociente no es concluyente para esta serie.

c) Usar el criterio de la raíz para probar la convergencia o divergencia de esta serie.

14. Obtener cada identidad usando la serie geométrica apropiada.

a) $\dfrac{1}{0.99} = 1.01010101\ldots$ *b*) $\dfrac{1}{0.98} = 1.0204081632\ldots$

15. Considerar una población idealizada con la característica de que cada miembro de la población produce una descendiente al final de cada periodo. Cada miembro tiene un ciclo de vida de tres periodos y la población empieza con 10 miembros recién nacidos. La tabla siguiente muestra la población durante los primeros cinco periodos.

Clasificación por edades	**Periodo**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
0–1	10	10	20	40	70
1–2		10	10	20	40
2–3			10	10	20
Total	10	20	40	70	130

La sucesión para la población total tiene la propiedad de que

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \qquad n > 3.$$

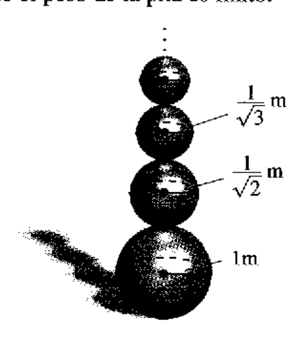
Encontrar la población total durante cada uno de los próximos cinco periodos.

16. Imagine que se está apilando un número infinito de esferas de radios decrecientes, una encima de otra, como se muestra en la figura. Los radios de las esferas son de 1 metro, $1/\sqrt{2}$ metros, $1/\sqrt{3}$ metros, etc. Las esferas están hechas de un material que pesa 1 newton por metro cúbico.

a) ¿Qué tan alta es esta pila infinita de esferas?

b) ¿Cuál es el área de la superficie total de todas las esferas en la pila?

c) Mostrar que el peso de la pila es finito.

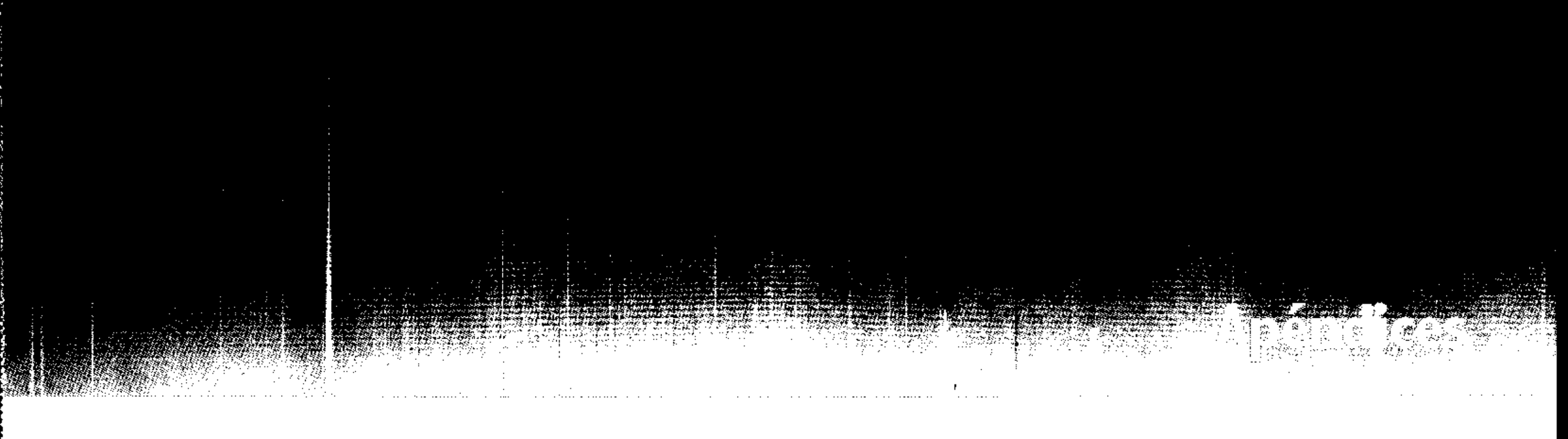


17. *a*) Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

b) Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2n} - \operatorname{sen} \frac{1}{2n+1} \right).$$



Apéndices

A Demostración de algunos teoremas

TEOREMA 1.2 Propiedades de los límites (propiedades 2, 3, 4 y 5) (página 59)

Sean b y c números reales, sea n un número entero positivo y f y g funciones con los siguientes límites:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. Producto: $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = LK$

4. Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencia: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$

Demostración Para demostrar la propiedad 2, se elige $\varepsilon > 0$. Puesto que $\varepsilon/2 > 0$, se sabe que existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Se sabe también que existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta_2$ implica que $|g(x) - K| < \varepsilon/2$. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2; entonces, $0 < |x - c| < \delta$ implica:

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad del triángulo se deduce que:

$$|[f(x) + g(x)] - (L + K)| \le |f(x) - L| + |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que implica que:

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + K = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).$$

La demostración de que:

$$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = L - K$$

es semejante.

Para demostrar la propiedad 3, dado que

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

se puede escribir

$$f(x)g(x) = [f(x) - L][g(x) - K] + [Lg(x) + Kf(x)] - LK.$$

Como que el límite de $f(x)$ es L y el límite de $g(x)$ es K, se tiene

$$\lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} [g(x) - K] = 0.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L - 0| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |g(x) - K - 0| < \varepsilon$$

lo cual implica que

$$|[f(x) - L][g(x) - K] - 0| = |f(x) - L|\,|g(x) - K| < \varepsilon\varepsilon < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to c} [f(x) - L][g(x) - K] = 0.$$

Además, por la propiedad 1, se tiene:

$$\lim_{x\to c} Lg(x) = LK \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} Kf(x) = KL.$$

Por último, por la propiedad 2, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)g(x) &= \lim_{x\to c}[f(x) - L][g(x) - K] + \lim_{x\to c} Lg(x) + \lim_{x\to c} Kf(x) - \lim_{x\to c} LK\\ &= 0 + LK + KL - LK\\ &= LK.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 4, obsérvese que basta demostrar que:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{K}.$$

Entonces se puede emplear la propiedad 3 para escribir:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{K}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to c} g(x) = K$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_1, \text{ entonces } |g(x) - K| < \frac{|K|}{2}$$

lo cual implica que

$$|K| = |g(x) + [|K| - g(x)]| \le |g(x)| + ||K| - g(x)| < |g(x)| + \frac{|K|}{2}.$$

Esto es, si $0 < |x - c| < \delta_1$,

$$\frac{|K|}{2} < |g(x)| \quad \text{o} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|K|}.$$

De manera semejante, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - K| < \frac{|K|^2}{2}\varepsilon.$$

Sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Si $0 < |x - c| < \delta$, se tiene

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{K}\right| = \left|\frac{K - g(x)}{g(x)K}\right| = \frac{1}{|K|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}\,|K - g(x)| < \frac{1}{|K|} \cdot \frac{2}{|K|}\,\frac{|K|^2}{2}\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{K}$.

Por último, la propiedad 5 se obtiene por inducción matemática empleando la propiedad 3.

TEOREMA 1.4 Límite de una función radical (página 60)

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}.$$

Demostración Considérese el caso en que $c > 0$ y n es un entero positivo. Para un $\varepsilon > 0$ dado, se necesita encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

lo que equivale a decir

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad -\delta < x - c < \delta.$$

Supóngase que $\varepsilon < \sqrt[n]{c}$, lo cual implica que $0 < \sqrt[n]{c} - \varepsilon < \sqrt[n]{c}$. Sea ahora δ el menor de los dos números.

$$c - \left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n \quad \text{y} \quad \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n - c$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
-\delta < x - c &< \delta \\
-\left[c - \left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n\right] < x - c &< \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n - c \\
\left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n - c < x - c &< \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n - c \\
\left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n < x &< \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n \\
\sqrt[n]{c} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} &< \sqrt[n]{c} + \varepsilon \\
-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c} &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

TEOREMA 1.5 Límite de una función compuesta (página 61)

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

Demostración Para todo $\varepsilon > 0$ dado, hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como el límite de $f(x)$ cuando $x \to L$ es $f(L)$, se sabe que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |u - L| < \delta_1.$$

Además, como el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$ es L, se sabe que existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Por último, haciendo $u = g(x)$, se tiene

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

TEOREMA 1.7 Funciones que coinciden todos los puntos salvo en uno (página 62)

Sean c un número real y sea $f(x) = g(x)$ para todos los valores de $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x).$$

Demostración Sea L el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ en los intervalos abiertos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$, y

$$|g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en el intervalo abierto, se sigue que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Por tanto, el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ es también L.

TEOREMA 1.8 Teorema del encaje o del emparedado (página 65)

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los valores x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y es igual a L.

Demostración Para $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 2$ tales que

$$|h(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta_1$$

y

$$|g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta_2.$$

Como $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c, existe $\delta_3 > 0$ tal que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para $0 < |x - c| < \delta_3$. Sea δ el menor de δ_1, δ_2 y δ_3. Entonces, si $0 < |x - c| < \delta$, se sigue que $|h(x) - L| < \varepsilon$ y $|g(x) - L| < \varepsilon$, lo cual implica que

$$-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \quad \text{y} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$
$$L - \varepsilon < h(x) \quad \text{y} \quad g(x) < L + \varepsilon.$$

Ahora bien, como $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, se sigue que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, lo cual implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

TEOREMA 1.14 Asíntotas verticales (página 85)

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en intervalo, entonces la gráfica de la función dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

Demostración Considérese el caso en el que $f(c) > 0$ y existe una $b > c$ tal que $c < x < b$ implica que $g(x) > 0$. Entonces, para $M > 0$ se elige un δ_1 tal que

$$0 < x - c < \delta_1 \quad \text{implica que} \quad \frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}$$

y un δ_2 tal que

$$0 < x - c < \delta_2 \quad \text{implica que} \quad 0 < g(x) < \frac{f(c)}{2M}.$$

Ahora sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Entonces deducir que

$$0 < x - c < \delta \quad \text{implica que} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(c)}{2}\left[\frac{2M}{f(c)}\right] = M.$$

Por tanto se sigue que

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

y la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de h.

Fórmula alternativa para la derivada (página 101)

La derivada de f en c está dada por

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

siempre que este límite exista.

Demostración La derivada de f en c está dada por

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Sea $x = c + \Delta x$. Entonces $x \to c$ a medida que $\Delta x \to 0$. Por tanto, sustituyendo $c + \Delta x$ por x se tiene:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

TEOREMA 2.10 Regla de la cadena (página 131)

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y si $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o lo que es equivalente,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

Demostración En la sección 2.4 se hizo $h(x) = f(g(x))$ y se utilizó la fórmula alternativa de la derivada para demostrar que $h'(c) = f'(g(c))\, g'(c)$, siempre que $g(x) \neq g(c)$ para todos los valores de x distintos de c. Ahora se da una demostración más general. Se empieza por considerar la derivada de f.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para un valor fijo de x, se define una función η tal que

$$\eta(\Delta x) = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x), & \Delta x \neq 0. \end{cases}$$

Como el límite de $\eta(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$ no depende del valor de $\eta(0)$, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = 0$$

y se puede concluir que η es continua en 0. Además, dado que $\Delta y = 0$ cuando $\Delta x = 0$, la ecuación:

$$\Delta y = \Delta x \eta(\Delta x) + \Delta x f'(x)$$

es válida ya sea que Δx sea o no cero. Ahora, haciendo $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$, se puede usar la continuidad de g para concluir que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \to 0} [g(x + \Delta x) - g(x)] = 0$$

lo que implica

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = 0.$$

Por último,

$$\Delta y = \Delta u \eta(\Delta u) + \Delta u f'(u) \to \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \eta(\Delta u) + \frac{\Delta u}{\Delta x} f'(u), \quad \Delta x \neq 0$$

y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u)\right] + \frac{du}{dx} f'(u) &= \frac{dy}{dx}(0) + \frac{du}{dx} f'(u) \\ &= \frac{du}{dx} f'(u) \\ &= \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}. \end{aligned}$$

Interpretación de la concavidad (página 190)

1. Sea f derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia arriba* en I, entonces su gráfica queda *por encima* de todas sus rectas tangentes en I.
2. Sea f derivable en el intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia abajo* en I, entonces su gráfica queda *por abajo* de todas sus rectas tangentes en I.

Demostración Supóngase que f es cóncava hacia arriba en $I = (a, b)$. Entonces f' es creciente en (a, b) Sea c un punto dentro del intervalo $I = (a, b)$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en la c dada es:

$$g(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Si x está en el intervalo abierto (c, b), la distancia dirigida que va del punto $(x, f(x))$ (en la gráfica de f) al punto $(x, g(x))$ (en la recta tangente) está dada por:

$$\begin{aligned} d &= f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)] \\ &= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c). \end{aligned}$$

Además, por el teorema del valor medio, existe un número z en (c, x) tal que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} d &= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) \\ &= f'(z)(x - c) - f'(c)(x - c) \\ &= [f'(z) - f'(c)](x - c). \end{aligned}$$

El factor $(x - c)$ es positivo, porque $c < x$. Además, puesto que f' es creciente, el factor $[f'(z) - f'(c)]$ también es positivo. Por consiguiente, $d > 0$ y se concluye que la gráfica de f está por encima de la recta tangente. Si x está en el intervalo abierto (a, c), se puede aplicar un argumento similar. Con esto queda demostrado el primer enunciado; la demostración del segundo enunciado es semejante.

TEOREMA 3.10 Límites en el infinito (página 199)

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r está definida para $x < 0$, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0$.

Demostración Se empieza por demostrar que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Si $\varepsilon > 0$, sea $M = 1/\varepsilon$. Entonces, para $x > M$ se tiene:

$$x > M = \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{x} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Por tanto, empleando la definición de límite en el infinito, se concluye que el límite de $1/x$, cuando $x \to \infty$ es 0. Ahora, usando este resultado, y haciendo $r = m/n$, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} &= \lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^{m/n}} \\
&= c\left[\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^m\right] \\
&= c\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m \\
&= c\left(\sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}\right)^m \\
&= c\left(\sqrt[n]{0}\right)^m \\
&= 0
\end{aligned}$$

La demostración de la segunda parte del teorema es similar.

TEOREMA 4.2 Fórmulas de suma empleando la notación sigma (página 260)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Demostración La propiedad 1 es inmediata. Si se suma n veces el número c, se obtiene la suma cn.

Para demostrar la propiedad 2, se escribe la suma en orden creciente y en orden decreciente, y se suman los términos correspondientes de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

n términos

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La propiedad 3 se demuestra por inducción matemática. En primer lugar, para $n = 1$ es verdadera, ya que:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Suponiendo ahora que el resultado es verdadero para $n = k$, se comprueba que también es verdadero para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) \\ &= \frac{k+1}{6}[(2k+3)(k+2)] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}\end{aligned}$$

La propiedad 4 se puede demostrar también mediante inducción empleando un argumento semejante.

TEOREMA 4.8 Conservación de desigualdades (página 278)

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces:

$$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todas las x en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demostración Para demostrar la propiedad 1 supóngase que ocurre lo contrario, que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = I < 0.$$

Entonces, sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n < = b$ una partición de $[a, b]$ y sea

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

una suma de Riemann. Como $f(x) \geq 0$, se sigue que $R \geq 0$. Ahora, para $\|\Delta\|$ suficientemente pequeña, se tiene $|R - I| < -I/2$, lo cual implica que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = R < I - \frac{I}{2} < 0$$

lo que no es posible. De esta contradicción se concluye que:

$$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx.$$

Para demostrar la propiedad 2 del teorema, obsérvese que $f(x) \leq g(x)$ implica que $g(x) - f(x) \geq 0$. Por tanto se puede aplicar la propiedad 1 para concluir que:

$$0 \leq \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$
$$0 \leq \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx$$
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Propiedades de la función logaritmo natural (página 323)

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

Demostración Para empezar, se muestra que $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$. Por el teorema del valor medio para las integrales, se sabe que:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{c}(2 - 1) = \frac{1}{c}$$

donde c está en $[1, 2]$. Esto implica que

$$1 \leq c \leq 2$$
$$1 \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{2}$$
$$1 \geq \ln 2 \geq \frac{1}{2}.$$

Ahora sea N un número positivo (grande). Como $\ln x$ es creciente, se sigue que si $x > 2^{2N}$, entonces:

$$\ln x > \ln 2^{2N} = 2N \ln 2.$$

Sin embargo, puesto que $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$, se sigue que

$$\ln x > 2N \ln 2 \geq 2N\left(\frac{1}{2}\right) = N.$$

Esto verifica el segundo límite. Para verificar el primero, sea $z = 1/x$. Entonces, $z \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, y se puede escribir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \ln x &= \lim_{x \to 0^+} \left(-\ln \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{z \to \infty} (-\ln z) \\ &= -\lim_{z \to \infty} \ln z \\ &= -\infty \end{aligned}$$

TEOREMA 5.8 Continuidad y derivabilidad de las funciones inversas (página 345)

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si existe la función inversa de f, son ciertas las siguientes afirmaciones:

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

Demostración Para demostrar la propiedad 1, se muestra en primer lugar, que si f es continua en I y tiene inversa, entonces f es estrictamente monótona en I. Supóngase que f no es estrictamente monótona. En tal caso, existen en I números x_1, x_2, y x_3 tales que $x_1 < x_2 < x_3$, pero $f(x_2)$ no está entre $f(x_1)$ y $f(x_3)$. Sin pérdida de la generalidad, supóngase que $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Por el teorema del valor intermedio, existe x_0 entre x_1 y x_3 tal que $f(x_0) = f(x_3)$. Así, f no es inyectiva y no puede tener inversa. Por tanto, f debe ser estrictamente monótona.

Puesto que f es continua, el teorema del valor intermedio implica que el conjunto de valores de f

$$\{f(x): x \in I\}$$

forma un intervalo J. Suponer que a es un punto interior de J. De acuerdo con el argumento anterior, $f^{-1}(a)$ es un punto interior de I. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que:

$$I_1 = (f^{-1}(a) - \varepsilon_1, f^{-1}(a) + \varepsilon_1) \subseteq I.$$

Como f es estrictamente monótona en I_1, el conjunto de valores $\{f(x): x \in I_1\}$ forma un intervalo $J_1 \subseteq J$. Sea $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq J_1$. Por último, si

$$|y - a| < \delta, \text{ entonces } |f^{-1}(y) - f^{-1}(a)| < \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Por tanto, f^{-1} es continua en a. Una demostración similar puede darse en el caso en que a sea un punto terminal.

Para demostrar la propiedad 2, sean y_1 y y_2 elementos en el dominio de f^{-1}, con $y_1 < y_2$. Entonces, en el dominio de f existen x_1 y x_2 tales que

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2).$$

Como f es creciente, $f(x_1) < f(x_2)$ exactamente cuando $x_1 < x_2$. Por consiguiente:

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

lo cual implica que f^{-1} es creciente (la propiedad 3 se demuestra de manera similar).

Por último, para demostrar la propiedad 4, considérese el límite

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{y \to a} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(a)}{y - a}$$

donde a está en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}(a) = c$. Puesto que f es derivable en c, f es continua en c, y entonces f^{-1} es continua en a. Por tanto, $y \to a$ implica que $x \to c$, y se tiene:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(a) &= \lim_{x \to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)} \\
&= \frac{1}{\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}} \\
&= \frac{1}{f'(c)}.
\end{aligned}$$

Por tanto, existe $(f^{-1})'(a)$ y f^{-1} es derivable en $f(c)$.

TEOREMA 5.9 Derivada de una función inversa (página 345)

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable en todo x en la que $f'(g(x)) \neq 0$. Además:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

Demostración De la demostración del teorema 5.8, haciendo que $a = x$, se sabe que g es derivable. Empleando la regla de la cadena, se derivan ambos miembros de la ecuación $x = f(g(x))$ para obtener:

$$1 = f'(g(x)) \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Puesto que $f'(g(x)) \neq 0$, se puede dividir entre esa cantidad, para obtener:

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

TEOREMA 5.15 Un límite que involucra al número e (página 364)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 1}{x}\right)^x = e$$

Demostración Sea $y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Aplicando el logaritmo natural en ambos lados, se tiene:

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right].$$

Puesto que la función logaritmo natural es continua, se puede escribir

$$\ln y = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\ln[1+(1/x)]}{1/x}\right\}.$$

Haciendo $x = \dfrac{1}{t}$, se tiene

$$\begin{aligned}\ln y &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)-\ln 1}{t}\\ &= \frac{d}{dx}\ln x \ \text{ en } x = 1\\ &= \frac{1}{x} \ \text{ en } x = 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Por último, como $\ln y = 1$ se sabe que $y = e$, y se puede concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

TEOREMA 8.3 Teorema general del valor medio (página 568)

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) y continuas en $[a, b]$, y si además $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), entonces existe algún punto c en (a, b) tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Demostración Se puede suponer que $g(a) \neq g(b)$, ya que de otra manera, por el teorema de Rolle se sigue que $g'(x) = 0$ para algún x en (a, b). Ahora, se define $h(x)$ como:

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]g(x).$$

Entonces:

$$h(a) = f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

y

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]g(b) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

y, por el teorema de Rolle existe un punto c en (a, b) tal que

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$$

lo cual implica que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

TEOREMA 8.4 Regla de L'Hôpital (página 568)

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, excepto posiblemente en la misma c. Supóngase que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente en la propia c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada 0/0, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista (o sea infinito). Este resultado también es válido si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce cualquiera de las formas indeterminadas ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$.

Se puede utilizar el teorema del valor medio generalizado para demostrar la regla de L'Hôpital. Sólo se da la demostración de uno de los varios casos de esta regla, dejando los demás casos en los que $x \to c^-$ y $x \to c$ como ejercicio para el lector.

Demostración Considérese el caso en el que:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} g(x) = 0.$$

Se definen las siguientes funciones:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ 0, & x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c \\ 0, & x = c \end{cases}.$$

Para todo x, $c < x < b$, F y G son derivables en $(c, x]$ y continuas en $[c, x]$. Se puede aplicar el teorema del valor medio generalizado, para concluir que en (c, x) existe un número z tal que:

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{G'(z)} &= \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} \\ &= \frac{F(x)}{G(x)} \\ &= \frac{f'(z)}{g'(z)} \\ &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Por último, si se hace que x tienda a c por la derecha, $x \to c^+$, se tiene que $z \to c^+$, ya que $c < z < x$, y

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} \\ &= \lim_{z \to c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} \\ &= \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

TEOREMA 9.19 Teorema de Taylor (página 654)

Si una función f es derivable hasta el orden $n + 1$ en un intervalo I que incluye a c, entonces, para todo x en I existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Demostración Para determinar $R_n(x)$, se fija x en I $(x \neq c)$ y se escribe

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor para $f(x)$. Sea ahora g una función de t definida por:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - R_n(x)\frac{(x - t)^{n+1}}{(x - c)^{n+1}}.$$

La razón por la que se define g de esta manera es que la derivación con respecto a t tiene un efecto telescópico. Por ejemplo, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[-f(t) - f'(t)(x - t)] &= -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x - t)\\ &= -f''(t)(x - t).\end{aligned}$$

El resultado es que la derivada $g'(t)$ se simplifica a

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + (n + 1)R_n(x)\frac{(x - t)^n}{(x - c)^{n+1}}$$

para todo t entre c y x. Además, para un x fijo :

$$g(c) = f(x) - [P_n(x) + R_n(x)] = f(x) - f(x) = 0$$

y

$$g(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = f(x) - f(x) = 0.$$

Por tanto, g satisface las condiciones del teorema de Rolle, y se sigue que existe un número z entre c y x tal que $g'(z) = 0$. Si se sustituye t por z en la ecuación de $g'(t)$ y después se despeja $R_n(x)$ se obtiene:

$$g'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n + (n + 1)R_n(x)\frac{(x - z)^n}{(x - c)^{n+1}} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Por último, como $g(c) = 0$, se tiene:

$$0 = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n - R_n(x)$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x).$$

TEOREMA 9.20 Convergencia de una serie de potencias (pág. 660)

Para una serie de potencias centrada en c, exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie se converge absolutamente para $|x - c| < R$ y diverge para $|x - c| > R$.
3. La serie converge absolutamente para todo x.

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie converge sólo en c, el radio de convergencia es $R = 0$, y si la serie converge para todo x, el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie exponencial converge es el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

Demostración Con el fin de simplificar la notación, se demostrará el teorema para la serie de potencias $\Sigma\, a_nx^n$ centrada en $x = 0$. La demostración para una serie de potencias centrada en $x = c$ se deduce con facilidad. Un paso clave en esta demostración usa la propiedad de completitud del conjunto de los números reales: si un conjunto no vacío S de números reales tiene una cota superior, entonces debe tener una mínima cota superior (vea la página 601).

Se debe mostrar que si una serie de potencias $\Sigma\, a_nx^n$ converge en $x = d$, $d \neq 0$, entonces converge para todo b que satisface $|b| < |d|$. Como $\Sigma\, a_nx^n$ converge, el $\lim\limits_{n\to\infty} a_nd^n = 0$.

Por tanto, existe un $N > 0$ tal que $a_nd^n < 1$ para todo $n \geq N$. Entonces, para todo $n \geq N$:

$$|a_nb^n| = \left|a_nb^n\frac{d^n}{d^n}\right| = |a_nd^n|\left|\frac{b^n}{d^n}\right| < \left|\frac{b^n}{d^n}\right|.$$

Así, para $|b| < |d|$, $\left|\dfrac{b}{d}\right| < 1$, lo cual implica que

$$\Sigma\left|\frac{b^n}{d^n}\right|$$

es una serie geométrica convergente. Por el criterio de comparación, la serie $\Sigma\, a_nb^n$ también converge.

Del mismo modo, si la serie de potencias $\Sigma\, a_nx^n$ diverge en $x = b$, donde $b \neq 0$, entonces diverge para todo d que satisface $|d| > |b|$. Si $\Sigma\, a_nd^n$ convergiera, entonces el argumento anterior implicaría que $\Sigma\, a_nb^n$ también fuera divergente.

Por último, para demostrar el teorema, supóngase que ninguno de los casos 1 y 3 sea verdadero. Entonces existen puntos b y d tales que $\Sigma\, a_nx^n$ converge en b y diverge en d. Sea $S = \{x\colon \Sigma\, a_nx^n \text{ converge}\}$. S no es un conjunto vacío ya que $b \in S$. Si $x \in S$, entonces $|x| \leq |d|$, lo cual muestra que $|d|$ es una cota superior del conjunto no vacío S. Por la propiedad de completitud, S tiene una mínima cota superior, R.

Ahora, si $|x| > R$, entonces $x \notin S$ de manera que $\Sigma\, a_nx^n$ diverge. Y si $|x| < R$, entonces $|x|$ no es cota superior de S, por lo que existe b en S que satisface $|b| > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, a_nb^n$ converge lo que implica que $\Sigma\, a_nx^n$ converge.

B Tablas de integración

Fórmulas u^n

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Integrales con la forma $a + bu$

3. $\displaystyle\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}\big(bu - a\ln|a+bu|\big) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2$

6. $\displaystyle\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{bu}{2}(2a - bu) + a^2\ln|a+bu|\right] + C$

7. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu|\right] + C$

9. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2, 3$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$

Integrales con la forma $a + bu + cu^2,\ b^2 \neq 4ac$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left|\dfrac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$

15. $\displaystyle\int \frac{u}{a + bu + cu^2}\,du = \frac{1}{2c}\left(\ln|a + bu + cu^2| - b\int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du\right)$

Integrales con la forma $\sqrt{a + bu}$

16. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{b(2n + 3)}\left[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du\right]$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, & a > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\dfrac{a + bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{u^n\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 3)b}{2}\int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}\,du\right],\ n \neq 1$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du$

20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{(a + bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 5)b}{2}\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$

21. $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-2(2a - bu)}{3b^2}\sqrt{a + bu} + C$

22. $\displaystyle\int \frac{u^n}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{2}{(2n + 1)b}\left(u^n\sqrt{a + bu} - na\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a + bu}}\,du\right)$

Integrales con la forma $a^2 \pm u^2,\ a > 0$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = -\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n}\,du = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$

Integrales con la forma $\sqrt{u^2 \pm a^2},\ a > 0$

26. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|\right) + C$

27. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|\right] + C$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\,\text{arcsec}\,\frac{|u|}{a} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2\pm a^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{u^2\pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\,\text{arcsec}\,\frac{|u|}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2\pm a^2} \mp a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|\right) + C$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \mp\frac{\sqrt{u^2\pm a^2}}{a^2u} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2\pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2\pm a^2}} + C$

Integrales con la forma $\sqrt{a^2-u^2},\ a>0$

37. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\,\text{arcsen}\,\frac{u}{a}\right) + C$

38. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + a^4\,\text{arcsen}\,\frac{u}{a}\right] + C$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \text{arcsen}\,\frac{u}{a} + C$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \text{arcsen}\,\frac{u}{a} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\,\text{arcsen}\,\frac{u}{a}\right) + C$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \frac{-\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2-u^2)^{3/2}}\,du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Integrales con la forma sen u o cos u

46. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

47. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

48. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u) + C$

49. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C$

50. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

51. $\int \cos^n u\, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

52. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

53. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

54. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\, du$

55. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

56. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u}\, du = \tan u \mp \sec u + C$

57. $\int \frac{1}{1 \pm \cos u}\, du = -\cot u \pm \csc u + C$

58. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} u \cos u}\, du = \ln|\tan u| + C$

Integrales con la forma tan u, cot u, sec u, csc u

59. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$

60. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

61. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

62. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$ o $\int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

63. $\int \tan^2 u\, du = -u + \tan u + C$

64. $\int \cot^2 u\, du = -u - \cot u + C$

65. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

66. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

67. $\int \tan^n u\, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

68. $\int \cot^n u\, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u)\, du,\ n \neq 1$

69. $\int \sec^n u\, du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

70. $\int \csc^n u\, du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

71. $\int \frac{1}{1 \pm \tan u}\, du = \frac{1}{2}\left(u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u|\right) + C$

72. $\int \frac{1}{1 \pm \cot u}\, du = \frac{1}{2}\left(u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u|\right) + C$

73. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\, du = u + \cot u \mp \csc u + C$

74. $\int \frac{1}{1 \pm \csc u}\, du = u - \tan u \pm \sec u + C$

Integrales con funciones trigonométricas inversas

75. $\int \operatorname{arcsen} u \, du = u \operatorname{arcsen} u + \sqrt{1-u^2} + C$

76. $\int \arccos u \, du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$

77. $\int \arctan u \, du = u \arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

78. $\int \operatorname{arccot} u \, du = u \operatorname{arccot} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$

79. $\int \operatorname{arcsec} u \, du = u \operatorname{arcsec} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

80. $\int \operatorname{arccsc} u \, du = u \operatorname{arccsc} u + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

Integrales con la forma e^u

81. $\int e^u \, du = e^u + C$

82. $\int ue^u \, du = (u-1)e^u + C$

83. $\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u \, du$

84. $\int \frac{1}{1+e^u} \, du = u - \ln(1+e^u) + C$

85. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

86. $\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

Integrales con la forma $\ln u$

87. $\int \ln u \, du = u(-1 + \ln u) + C$

88. $\int u \ln u \, du = \frac{u^2}{4}(-1 + 2\ln u) + C$

89. $\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1)\ln u] + C, \; n \neq -1$

90. $\int (\ln u)^2 \, du = u[2 - 2\ln u + (\ln u)^2] + C$

91. $\int (\ln u)^n \, du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1} \, du$

Integrales con funciones hiperbólicas

92. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

93. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

94. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$

95. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$

96. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

97. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrales con funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

98. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

99. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

100. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$

Soluciones de los ejercicios impares

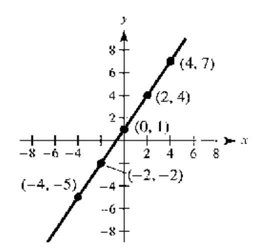
Capítulo P

Sección P.1 (página 8)

1. b **2.** d **3.** a **4.** c

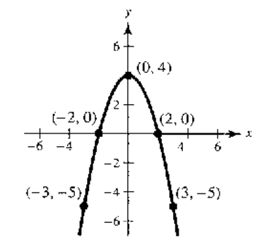
5. Las respuestas varían.

x	-4	-2	0	2	4
y	-5	-2	1	4	7



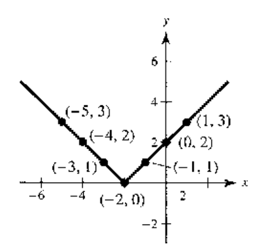
7. Las respuestas varían.

x	-3	-2	0	2	3
y	-5	0	4	0	-5



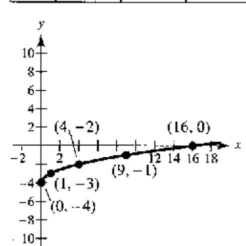
9. Hay varias respuestas posibles.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	3	2	1	0	1	2	3



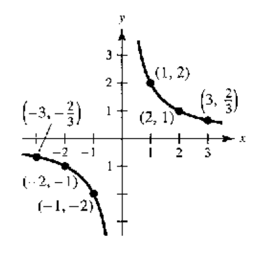
11. Hay varias respuestas posibles.

x	0	1	4	9	16
y	-4	-3	-2	-1	0



13. Hay varias respuestas posibles.

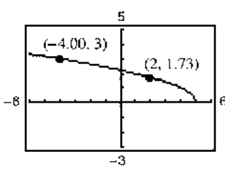
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	Indef.	2	1	$\frac{2}{3}$



15.

Xmín = −3
Xmáx = 5
Xscl = 1
Ymín = −3
Ymáx = 5
Yscl = 1

17. $y = \sqrt{5 - x}$



a) $y \approx 1.73$ *b)* $x = -4.00$

19. $(0, -2), (-2, 0), (1, 0)$ **21.** $(0, 0), (5, 0), (-5, 0)$

23. $(4, 0)$ **25.** $(0, 0)$ **27.** Simétrica respecto al eje y

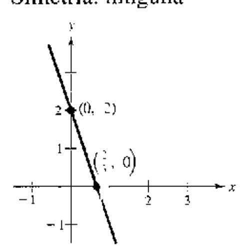
29. Simétrica respecto al eje x

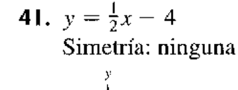
31. Simétrica respecto al origen **33.** No hay simetría

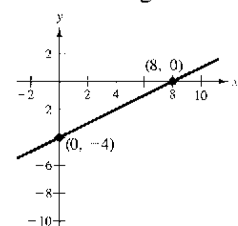
35. Simétrica respecto al origen

37. Simétrica respecto al eje y

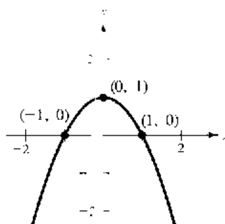
39. $y = -3x + 2$
Simetría: ninguna

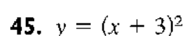


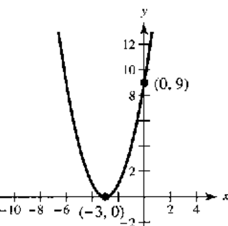
41.  $y = \frac{1}{2}x - 4$
Simetría: ninguna



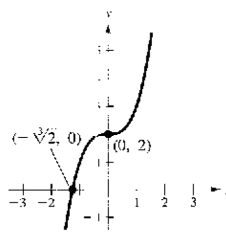
43. $y = 1 - x^2$
Simetría: respecto al eje y

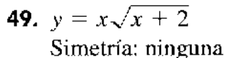


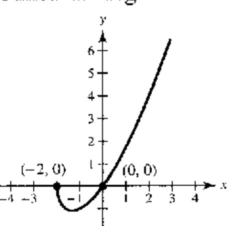
45.  $y = (x + 3)^2$
Simetría: ninguna



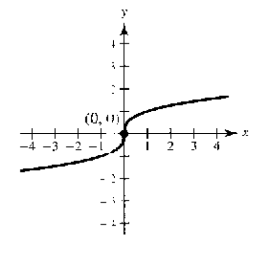
47. $y = x^3 + 2$
Simetría: ninguna



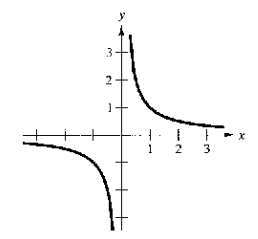
49.  $y = x\sqrt{x + 2}$
Simetría: ninguna



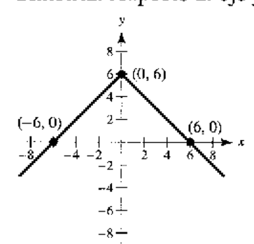
51. $x = y^3$
Simetría: respecto al origen



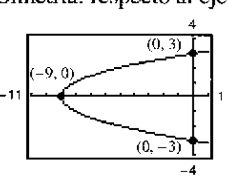
53. $y = 1/x$
Simetría: respecto al origen



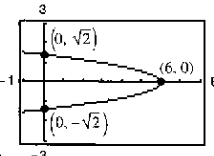
55. $y = 6 - |x|$
Simetría: respecto al eje y



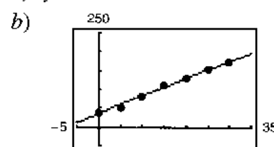
57. $y_1 = \sqrt{x+9}$
$y_2 = -\sqrt{x+9}$
Simetría: respecto al eje x



59. $y_1 = \sqrt{\dfrac{6-x}{3}}$
$y_2 = -\sqrt{\dfrac{6-x}{3}}$
Simetría: respecto al eje x



61. (1, 1) **63.** (−1, 5), (2, 2) **65.** (−1, −2), (2, 1)
67. (−1, −1), (0, 0), (1, 1)
69. (−1, −5), (0, −1), (2, 1) **71.** (−2, 2), $(-3, \sqrt{3})$
73. *a*) $y = -0.007t^2 + 4.82t + 35.4$
b)

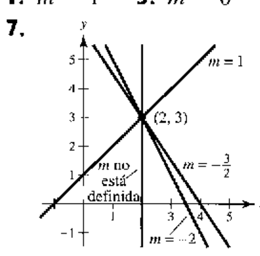


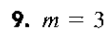
c) 217

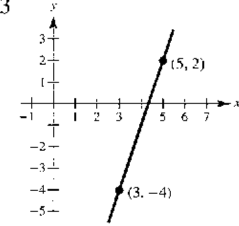
75. $x \approx 3\,133$ unidades **77.** $y = (x+2)(x-4)(x-6)$
79. *i*) b; $k = 2$ *ii*) d; $k = -10$ *iii*) a; $k = 3$ *iv*) c; $k = 36$
81. Falso. (−1, −2) no es un punto de la gráfica $x = \frac{1}{4}y^2$.
83. Verdadero **85.** $x^2 + (y-4)^2 = 4$

Sección P.2 (página 16)

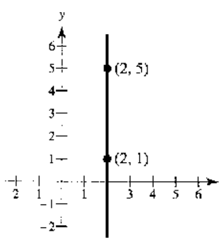
1. $m = 1$ **3.** $m = 0$ **5.** $m = -12$
7.



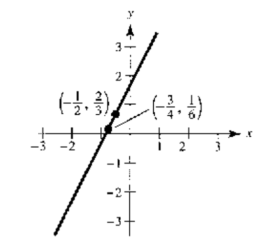

9. $m = 3$



11. m no está definida.

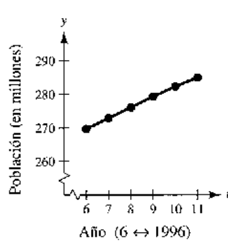


13. $m = 2$



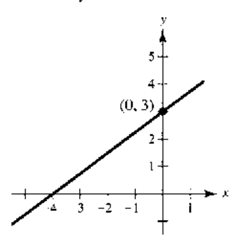
15. (0, 1), (1, 1), (3, 1) **17.** (0, 10), (2, 4), (3, 1)
19. *a*) $\frac{1}{3}$ *b*) $10\sqrt{10}$ pies

21. *a*)

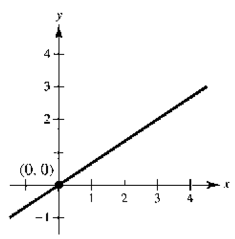


b) Menor rapidez de crecimiento de la población: 2000-2001

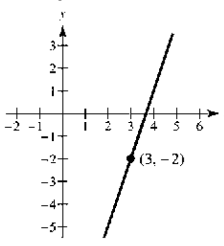
23. $m = -\frac{1}{5}$, (0, 4) **25.** m no está definida, no tiene intersección con y
27. $3x - 4y + 12 = 0$

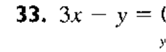


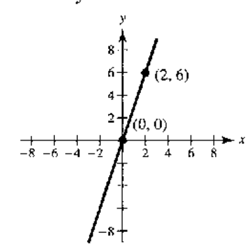
29. $2x - 3y = 0$



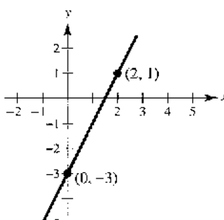
31. $3x - y - 11 = 0$

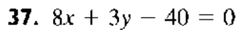


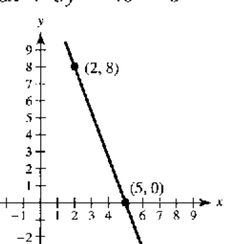

33. $3x - y = 0$



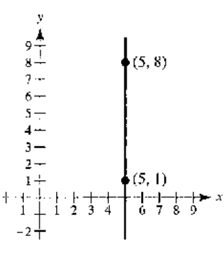
35. $2x - y - 3 = 0$

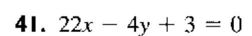


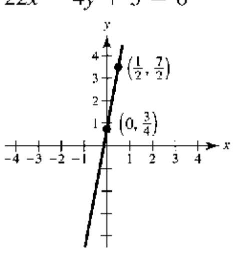

37. $8x + 3y - 40 = 0$



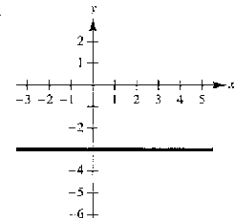
39. $x - 5 = 0$



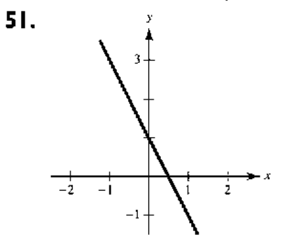

41. $22x - 4y + 3 = 0$



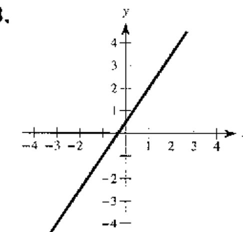
43. $x - 3 = 0$ **45.** $3x + 2y - 6 = 0$ **47.** $x + y - 3 = 0$
49.



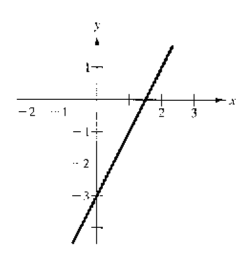
51.



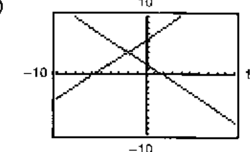
53.



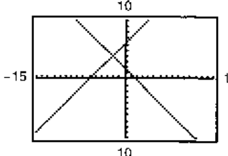
55.



57. *a)*



b)



Las rectas en *a)* no parecen perpendiculares, pero lo parecen en *b)* debido a que se utiliza una configuración cuadrada. Las rectas son perpendiculares.

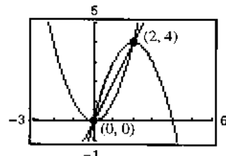
59. *a)* $2x - y - 3 = 0$ *b)* $x + 2y - 4 = 0$

61. *a)* $40x - 24y - 9 = 0$ *b)* $24x + 40y - 53 = 0$

63. *a)* $x - 2 = 0$ *b)* $y - 5 = 0$

65. $V = 125t + 2\,040$ **67.** $V = -2\,000t + 28\,400$

69. $y = 2x$



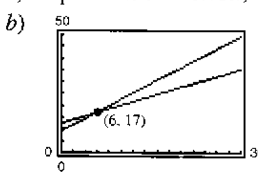
71. No son colineales, porque $m_1 \neq m_2$

73. $\left(0, \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)$ **75.** $\left(b, \dfrac{a^2 - b^2}{c}\right)$

77. $5F - 9C - 160 = 0$; $72°\text{ F} \approx 22.2°\text{ C}$

79. *a)* $W_1 = 12.50 + 0.75x$; $W_2 = 9.20 + 1.30x$

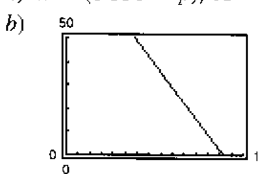
b)



c) Con cualquiera de las opciones, los salarios son de $17.00 por hora al producir seis unidades. Seleccionar la opción 1 si se producen seis unidades y la 2 en cualquier otro caso.

81. *a)* $x = (1\,330 - p)/15$

b)



c) 49 unidades

$x(655) = 45$ unidades

83. $12y + 5x - 169 = 0$ **85.** 2 **87.** $(5\sqrt{2})/2$ **89.** $2\sqrt{2}$

91. Demostración **93.** Demostración **95.** Demostración

97. Verdadero

Sección P.3 (página 27)

1. *a)* Dominio de f: $[-4, 4]$; Rango de f: $[-3, 5]$
Dominio de g: $[-3, 3]$; Rango de g: $[-4, 4]$
b) $f(-2) = -1$; $g(3) = -4$
c) $x = -1$ *d)* $x \approx 1$ *e)* $x \approx -1, x \approx 1$, y $x \approx 2$

3. *a)* -3 *b)* -9 *c)* $2b - 3$ *d)* $2x - 5$

5. *a)* 3 *b)* 0 *c)* -1 *d)* $2 + 2t - t^2$

7. *a)* 1 *b)* 0 *c)* $-\frac{1}{2}$ **9.** $3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$, $\Delta x \neq 0$

11. $\left(\sqrt{x - 1} - x + 1\right)/[(x - 2)(x - 1)]$
$= -1/\left[\sqrt{x - 1}\left(1 + \sqrt{x - 1}\right)\right], x \neq 2$

13. Dominio: $[-3, \infty)$; Rango: $(-\infty, 0]$

15. Dominio: Todos los número reales t tales que $t \neq 4n + 2$, donde n es un entero; Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

17. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

19. Dominio: $[0, 1]$

21. Dominio: Todos los números reales x tales que $x \neq 2n\pi$, donde n es un entero.

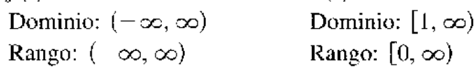
23. Dominio: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

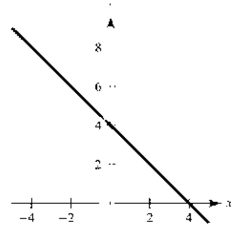
25. *a)* -1 *b)* 2 *c)* 6 *d)* $2t^2 + 4$
Dominio: $(-\infty, \infty)$; Rango: $(-\infty, 1) \cup [2, \infty)$

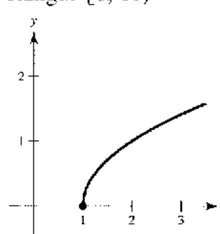
27. *a)* 4 *b)* 0 *c)* -2 *d)* $-b^2$
Dominio: $(-\infty, \infty)$; Rango: $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

29. $f(x) = 4 - x$
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

31. $h(x) = \sqrt{x - 1}$
Dominio: $[1, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$

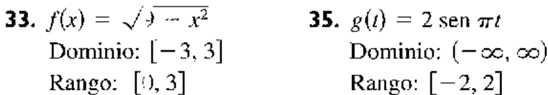


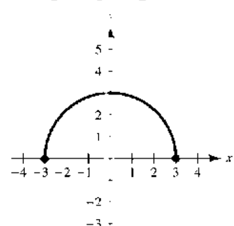


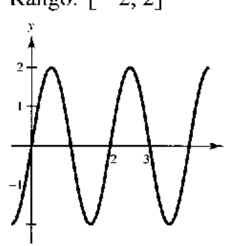


33. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
Dominio: $[-3, 3]$
Rango: $[0, 3]$

35. $g(t) = 2 \operatorname{sen} \pi t$
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-2, 2]$







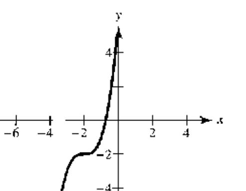
37. El estudiante viaja $\frac{1}{2}$ milla/min durante los primeros 4 minutos, se mantiene estacionado durante los 2 minutos siguientes, y viaja 1 milla/min durante los 4 últimos minutos.

39. y no es función de x. **41.** y es función de x.

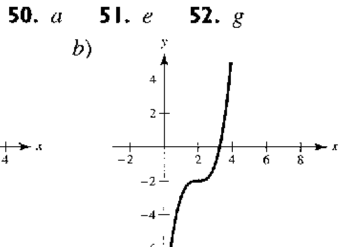
43. y no es función de x. **45.** y no es función de x.

47. *d* **48.** *b* **49.** *c* **50.** *a* **51.** *e* **52.** *g*

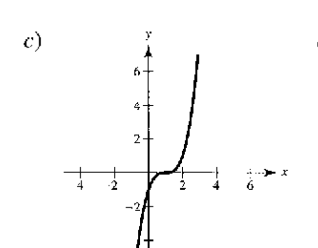
53. *a)*



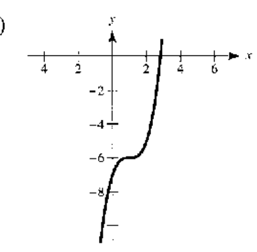
b)



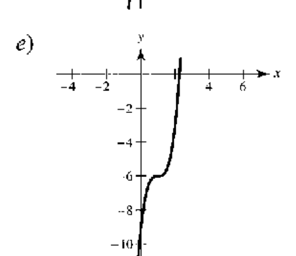
c)



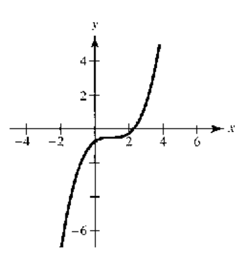
d)



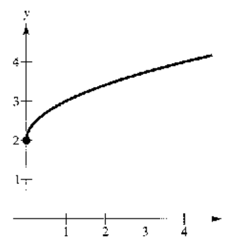
e)



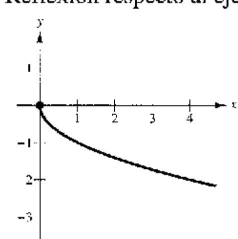
f)



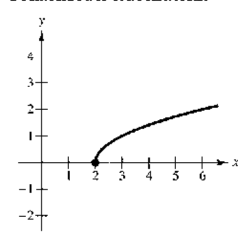
55. *a*) Traslación vertical



b) Reflexión respecto al eje x



c) Traslación horizontal



57. *a*) 0 *b*) 0 *c*) -1 *d*) $\sqrt{15}$
e) $\sqrt{x^2 - 1}$ *f*) $x - 1$ $(x \geq 0)$

59. $(f \circ g)(x) = x$; Dominio: $[0, \infty)$
$(g \circ f)(x) = |x|$; Dominio: $(-\infty, \infty)$
No, sus dominios son diferentes.

61. $(f \circ g)(x) = 3/(x^2 - 1)$; Dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = 9/x^2 - 1$; Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
No

63. *a*) 4 *b*) -2
c) Indefinido. No existe la gráfica de g en $x = -5$.
d) 3 *e*) 2
f) Indefinido. No existe la gráfica de f en $x = -4$.

65. Las respuestas varían.
Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x - 2$; $h(x) = 2x$

67. Par **69.** Impar **71.** *a*) $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ *b*) $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$

73. f es par, g no es par ni impar, h es par.

75. $f(x) = -2x - 5$ **77.** $y = -\sqrt{-x}$

79. *ii*, $c = -2$ **80.** *i*, $c = \frac{1}{4}$ **81.** *iv*, $c = 32$ **82.** *iii*, $c = 3$

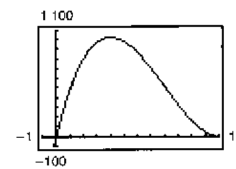
83. *a*) $T(4) = 16°$, $T(15) = 24°$
b) Los cambios de temperatura aparecerán 1 hora después.
c) Las temperaturas son 1° más bajas.

85. *a*) *b*) $A(15) \approx 345$ acres/granja

87. $f(x) = |x| + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 2, & \text{si } x \geq 2 \\ 2, & \text{si } 0 < x < 2 \\ -2x + 2, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

89. Demostración **91.** Demostración

93. *a*) $V(x) = x(24 - 2x)^2, x > 0$ *b*) $4 \times 16 \times 16$ cm



c)

Altura, x	*Largo y espesor*	*Volumen, V*
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$
3	$24 - 2(3)$	$3[24 - 2(3)]^2 = 972$
4	$24 - 2(4)$	$4[24 - 2(4)]^2 = 1\,024$
5	$24 - 2(5)$	$5[24 - 2(5)]^2 = 980$
6	$24 - 2(6)$	$6[24 - 2(6)]^2 = 864$

Las dimensiones de la caja que proporcionan el volumen máximo son $4 \times 16 \times 16$ cm.

95. Falso. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(-1) = f(1)$.

97. Verdadero **99.** Problema Putnam A1, 1988

Sección P.4 (página 34)

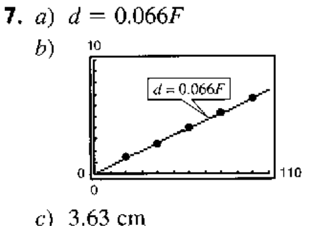
1. Cuadrática **3.** Lineal

5. *a*) y *b*)

Lineal aproximadamente

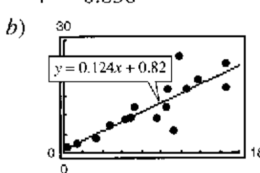
c) 136

7. *a*) $d = 0.066F$
b)



c) 3.63 cm

9. *a*) $y = 0.124x + 0.82$
$r \approx 0.838$
b)



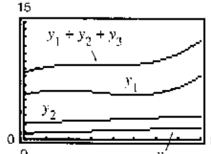
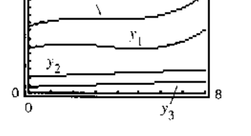
c) Un mayor consumo de electricidad per cápita en un país tiende a estar relacionado con un mayor producto interno bruto per cápita. Hong Kong, Venezuela, Corea del Sur.

d) $y = 0.134x + 0.28$
$r \approx 0.968$

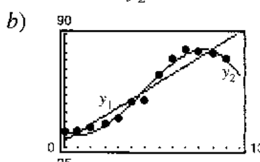
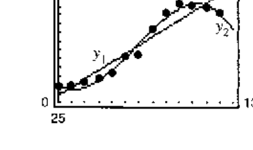
11. *a*) $y_1 = 0.03434t^3 - 0.3451t^2 + 0.884t + 5.61$
$y_2 = 0.110t + 2.07$
$y_3 = 0.092t + 0.79$

b) $y_1 + y_2 + y_3 = 0.03434t^3 - 0.3451t^2 + 1.086t + 8.47$

31.1 centavos/milla

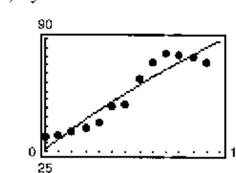



13. *a*) Lineal: $y_1 = 4.83t + 28.6$
Cúbico: $y_2 = -0.1289t^3 + 2.235t^2 - 4.86t + 35.2$

b)



c) Cúbico

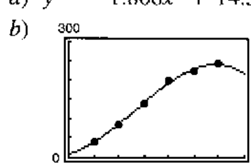
d) $y = -0.084t^2 + 5.84t + 26.7$



e) Lineal:
$N(14) \approx 96.2$ millones de personas
Cúbico:
$N(14) \approx 51.5$ millones de personas

f) Hay varias respuestas posibles.

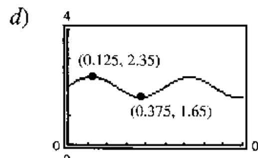
15. *a*) $y = -1.806x^3 + 14.58x^2 + 16.4x + 10$

b)


c) 214

17. *a*) Sí. En el instante t hay un desplazamiento t y sólo uno.

b) Amplitud: 0.35; Periodo: 0.5 *c*) $y = 0.35\,\mathrm{sen}(4\pi t) + 2$

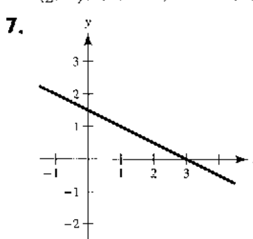
d)


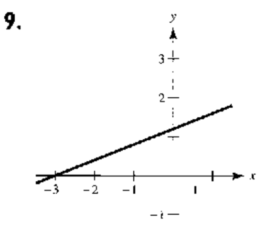
El modelo parece ajustarse a los datos.

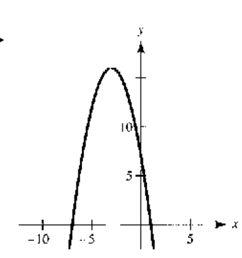
19. Hay varias respuestas posibles.

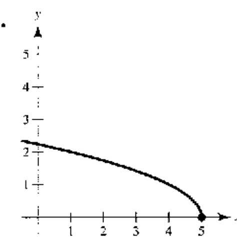
Ejecicios de repaso para el capítulo P (página 37)

1. $\left(\frac{3}{2}, 0\right), (0, -3)$ **3.** $(1, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ **5.** Simetría respecto al eje y.

7.


9.


11.


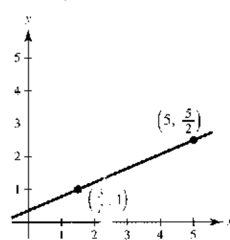
13.


15.

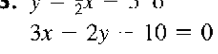
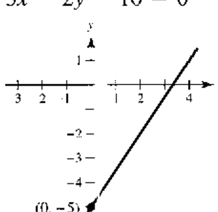
Xmín = −5
Xmáx = 5
Xscl = 1
Ymín = −30
Ymáx = 10
Yscl = 5

17. $(4, 1)$ **19.** $y = x^3 - 4x$

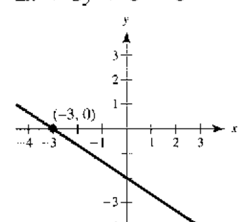
21. $m = \frac{3}{7}$ **23.** $t = \frac{7}{3}$



25. $y = \frac{3}{2}x - 5$ o $3x - 2y - 10 = 0$

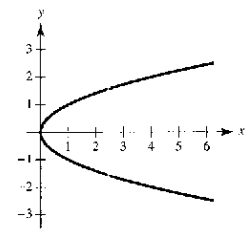
27. $y = -\frac{2}{3}x - 2$ o $2x + 3y + 6 = 0$



29. *a*) $7x - 16y + 78 = 0$ *b*) $5x - 3y + 22 = 0$
c) $2x + y = 0$ *d*) $x + 2 = 0$

31. $V = 12\,500 - 850t$; \$9 950

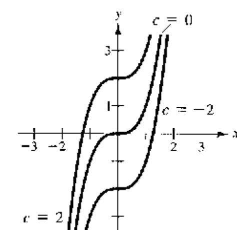
33. No es función **35.** Es función



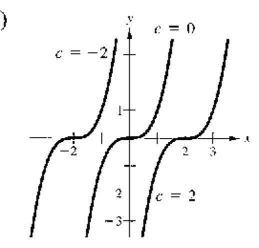
37. *a*) Indefinida *b*) $-1/(1 + \Delta x), \Delta x \neq 0, -1$

39. *a*) Dominio: $[-6, 6]$; Rango: $[0, 6]$
b) Dominio: $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$; Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
c) Dominio: $(-\infty, \infty)$; Rango: $(-\infty, \infty)$

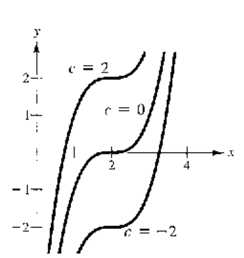
41. *a)*



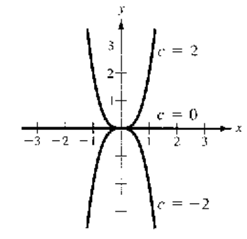
b)



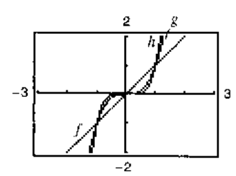
c)

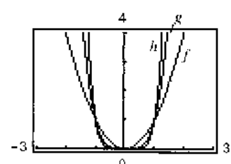


d)



43. *a)*



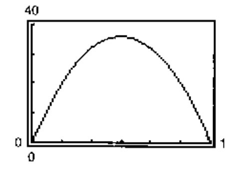


Todas las gráficas pasan por el origen. Las gráficas de potencias impares de x son simétricas respecto al origen y las de potencias pares son simétricas respecto al eje y. A medida que aumentan las potencias, las gráficas se vuelven más planas en el intervalo $-1 < x < 1$. Las gráficas de las ecuaciones de potencias, impares pasan por los cuadrantes I y III. Las gráficas de ecuaciones con potencias pares pasan por los cuadrantes I y II.

b) La gráfica de $y = x^7$ debe pasar por el origen y por los cuadrantes I y III. Debe ser simétrica respecto al origen y bastante plana en el intervalo $(-1, 1)$. La gráfica de $y = x^8$ debe pasar por el origen y por los cuadrantes I y II. Debe ser simétrica respecto al eje y y bastante plana en el intervalo $(-1, 1)$.

45. *a)* $A = x(12 - x)$

b) Dominio: $(0, 12)$



c) Área máxima: 36 pulg²; 6×6 pulg.

47. *a)* Grado mínimo: 3; Coeficiente dominante: negativo

b) Grado mínimo: 4; Coeficiente dominante: positivo

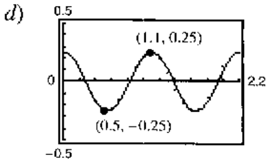
c) Grado mínimo: 2; Coeficiente dominante: negativo

d) Grado mínimo: 5; Coeficiente dominante: positivo

49. *a)* Sí. A cada tiempo t le corresponde uno y sólo un desplazamiento y.

b) Amplitud: 0.25; Periodo: 1.1 *c)* $y = \frac{1}{4}\cos(5.7t)$

d)



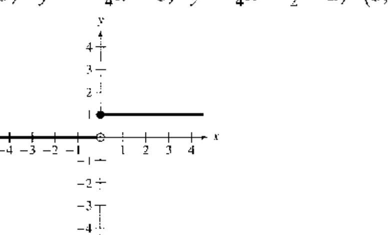
El modelo parece ajustarse a los datos.

SP Solución de problemas (página 39)

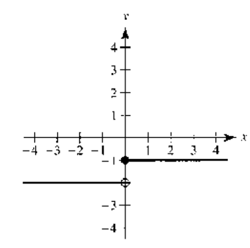
1. *a)* Centro: $(3, 4)$; Radio: 5

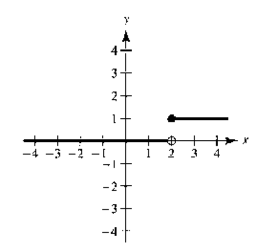
b) $y = -\frac{3}{4}x$ *c)* $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$ *d)* $\left(3, -\frac{9}{4}\right)$

3.

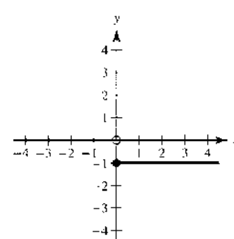


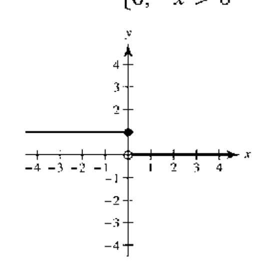
a) $H(x) - 2 = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ *b)* $H(x - 2) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$



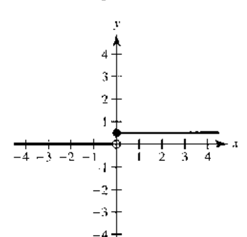


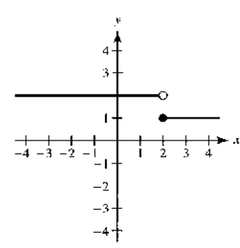
c) $-H(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ *d)* $H(-x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$





e) $\frac{1}{2}H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ *f)* $-H(x - 2) + 2 = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 2, & x < 2 \end{cases}$





5. *a)* $A(x) = x[(100 - x)/2]$; Dominio: $(0, 100)$

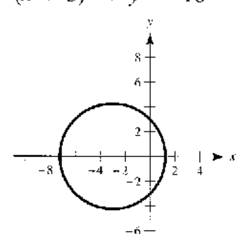
b) Las dimensiones de 50 m × 25 m dan el área máxima, 1 250 m².

c) 50 m × 25 m; Área = 1 250 m²

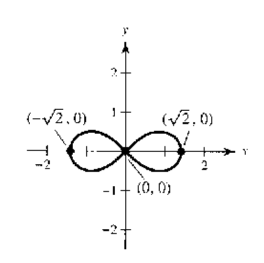
7. $T(x) = \left[2\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{(3 - x)^2 + 1}\right]/4$

9. *a)* 5, menor *b)* 3, mayor *c)* 4.1, menor
d) $4 + h$ *e)* 4; Hay varias respuestas posibles.

11. *a)* $x = -3 + \sqrt{18} \approx 1.2426$, $x = -3 - \sqrt{18} \approx -7.2426$
b) $(x + 3)^2 + y^2 = 18$



13. Hay varias respuestas posibles.



Capítulo 1

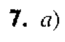
Sección 1.1 (página 47)

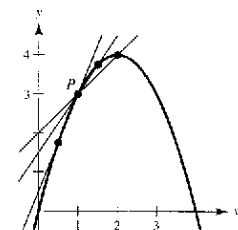
1. Precálculo: 300 pies

3. Cálculo: La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es 0.16.

5. Cálculo: $\frac{15}{2}$ unidades cuadráticas

7. *a)*





b) $1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$
c) 2. Utilizar los puntos más cercanos a P.

9. *a)* Área ≈ 10.417; Área ≈ 9.145 *b)* Utilizar más rectángulos.

11. *a)* 5.66 *b)* 6.11 *c)* Aumentar el número de segmentos.

Sección 1.2 (página 54)

1.

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.3448	0.3344	0.3334	0.3332	0.3322	0.3226

$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} \approx 0.3333$ $\left(\text{El límite real es } \frac{1}{3}.\right)$

3.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.2911	0.2889	0.2887	0.2887	0.2884	0.2863

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \approx 0.2887$ $\left(\text{El límite real es } \frac{1}{2\sqrt{3}}.\right)$

5.

x	2.9	2.99	2.999
$f(x)$	−0.0641	−0.0627	−0.0625

x	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−0.0625	−0.0623	−0.0610

$\lim_{x\to 3} \frac{[1/(x+1)]-(1/4)}{x-3} \approx -0.0625$ $\left(\text{El límite real es } -\frac{1}{16}.\right)$

7.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9983	0.99998	1.0000	1.0000	0.99998	0.9983

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \approx 1.0000$ (El límite real es 1.)

9. 1 **11.** 2

13. No existe el límite. La función tiende a 1 por la derecha de 5 pero por la izquierda de 5 tiende a −1.

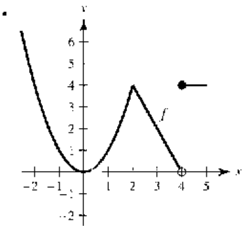
15. 0

17. No existe el límite. Cuando x tiende 0, la función oscila entre 1 y −1.

19. *a)* 2
b) No existe el límite. La función tiende a 1 por la derecha de 1 pero tiende a 3.5 por la izquierda de 1.
c) No existe el valor. La función no está definida en $x = 4$.
d) 2

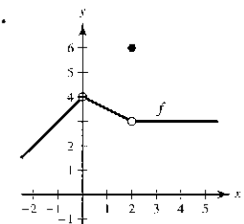
21. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos de la gráfica, excepto en $c = -3$.

23.

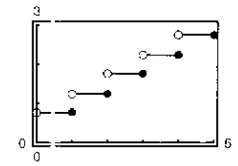


$\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos de la gráfica, excepto en $c = 4$.

25.



27. *a)*



b)

t	3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4
C	1.75	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25

$\lim_{t\to 3.5} C(t) = 2.25$

c)

t	2	2.5	2.9	3	3.1	3.5	4
C	1.25	1.75	1.75	1.75	2.25	2.25	2.25

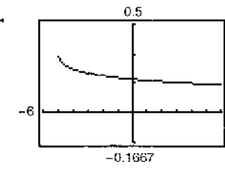
No existe el límite, porque los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales.

29. $\delta = 0.4$ **31.** $\delta = \frac{1}{11} \approx 0.091$

33. $L = 8$. Siendo $\delta = 0.01/3 \approx 0.0033$.

35. $L = 1$. Siendo $\delta = 0.01/5 = 0.002$.

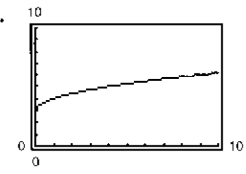
37. 5 **39.** −3 **41.** 3 **43.** 0 **45.** 4 **47.** 2

49. 

$\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{1}{6}$

Dominio: $[-5, 4) \cup (4, \infty)$

La gráfica tiene un hueco en $x = 4$.

51. 

$\lim_{x\to 9} f(x) = 6$

Dominio: $[0, 9) \cup (9, \infty)$

La gráfica tiene un hueco en $x = 9$.

53. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta: Cuando x tiende a 8 por cualquier lado, $f(x)$ se va encontrando arbitrariamente cerca de 25.

55. No. El hecho de que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ no influye en el valor de f en 2.

57. *a)* $r = \frac{3}{\pi} \approx 0.9549$ cm

b) $\frac{5.5}{2\pi} \leq r \leq \frac{6.5}{2\pi}$, o aproximadamente $0.8754 < r < 1.0345$

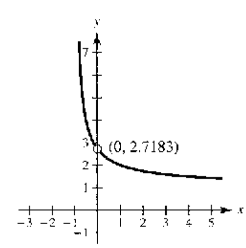
c) $\lim_{r\to 3/\pi} 2\pi r = 6$; $\varepsilon = 0.5$; $\delta \approx 0.0796$

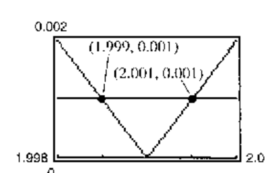
59.

x	-0.001	-0.0001	-0.00001
$f(x)$	2.7196	2.7184	2.7183

x	0.00001	0.0001	0.001
$f(x)$	2.7183	2.7181	2.7169

$\lim_{x\to 0} f(x) \approx 2.7183$



61. 

$\delta \approx 0.001$

$(1.999, 2.001)$

63. Falso. La existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = c$ no influye en la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to c$.

65. Falso. Ver el ejercicio 11.

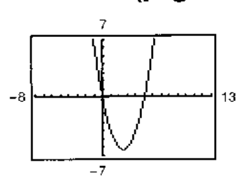
67. *a)* Sí. Cuando x tiende a 0.25 por cualquiera de los lados, $\sqrt{x}$ se acerca arbitrariamente a 0.5.

b) No. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ no existe porque para $x < 0$, $\sqrt{x}$ no existe.

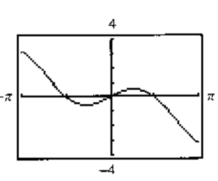
69 a 71. Demostraciones **73.** Hay varias respuestas posibles.

75. Problema Putnam Bl, 1986

Sección 1.3 (página 67)

1. 

a) 0 *b)* 6

3. 

a) 0 *b)* ≈ 0.52 o $\pi/6$

5. 16 **7.** -1 **9.** 0 **11.** 7 **13.** 1/2 **15.** $-2/5$

17. 35/3 **19.** 2 **21.** 1 **23.** *a)* 4 *b)* 64 *c)* 64

25. *a)* 3 *b)* 2 *c)* 2 **27.** 1 **29.** $-1/2$ **31.** 1

33. 1/2 **35.** -1 **37.** *a)* 15 *b)* 5 *c)* 6 *d)* 2/3

39. *a)* 64 *b)* 2 *c)* 12 *d)* 8

41. *a)* 1 *b)* 3

$g(x) = \frac{-2x^2 + x}{x}$ y $f(x) = -2x + 1$ coinciden, excepto en $x = 0$.

43. *a)* 2 *b)* 0

$g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$ y $f(x) = x^2 + x$ coinciden, excepto en $x = 1$.

45. -2

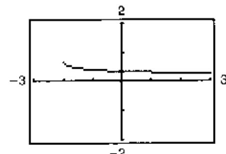
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ y $g(x) = x - 1$ coinciden, excepto en $x = -1$.

47. 12

$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ y $g(x) = x^2 + 2x + 4$ coinciden, excepto en $x = 2$.

49. 1/10 **51.** 5/6 **53.** $\sqrt{5}/10$ **55.** 1/6 **57.** $-1/9$

59. 2 **61.** $2x - 2$

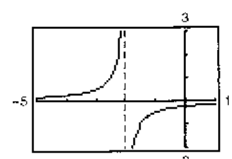
63. 

La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.358	0.354	0.354	0.354	0.353	0.349

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \approx 0.354$ $\left(\text{El límite real es } \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\right)$

65. 

La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-0.263	-0.251	-0.250

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.250	-0.249	-0.238

$\lim_{x\to 0} \frac{[1/(2+x)] - (1/2)}{x} \approx -0.250$ $\left(\text{El límite real es } -\frac{1}{4}.\right)$

67. 1/5 **69.** 0 **71.** 0 **73.** 0 **75.** 1 **77.** 3/2

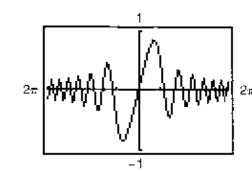
79. La gráfica tiene un hueco en $t = 0$.

Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

t	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(t)$	2.96	2.9996	?	2.9996	2.96

$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t} = 3$

81.



La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

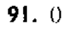
Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

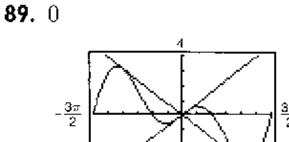
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	?	0.001	0.01	0.1

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = 0$

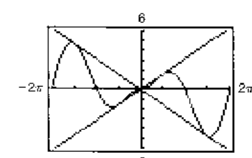
83. 2 **85.** $-4/x^2$ **87.** 4

89. 0

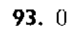


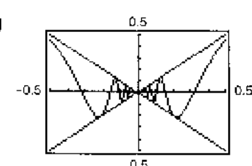


91. 0



93. 0



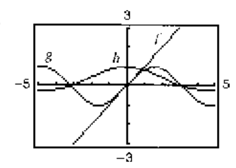


La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

95. f y g coinciden en todos los puntos, excepto en uno si c es un número real tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$.

97. Se obtiene una indeterminación cuando al evaluar un límite empleando sustitución directa se produce una fracción que no tiene significado, como $\frac{0}{0}$.

99.



Las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ son aproximadamente iguales cuando x se encuentra cercana a 0. Por tanto, su relación es de 1, aproximadamente.

101. 160 pies/seg **103.** -29.4 m/seg

105. Sea $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -1/x$.

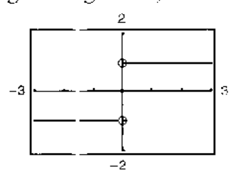
$\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existen. Sin embargo,

$$\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

y por tanto existen.

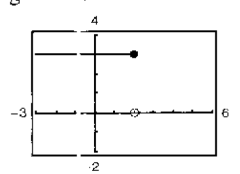
107–111. Demostraciones

113. Falso. No existe el límite porque la función tiende a 1 por la derecha de 0 y a -1 por la izquierda de 0. (Observar la siguiente gráfica.)



115. Verdadero.

117. Falso. No existe el límite porque $f(x)$ tiende a 3 por la izquierda de 2 y a 0 por la derecha de 2. (Observar la siguiente gráfica.)



119. Sea $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \geq 0 \\ -4, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} 4 = 4$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe porque para $x < 0$, $f(x) = -4$ y para $x \geq 0$, $f(x) = 4$.

121. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe porque cuando x tiende a 0, $f(x)$ oscila entre dos valores fijos.

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ porque a medida que x se acerca más a 0, los valores de $g(x)$ también se acercan a 0.

123. *a*) 1/2

b) Como $\frac{1 - \cos x}{x^2} \approx \frac{1}{2}$, se sigue que $1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$

$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ cuando $x \approx 0$.

c) 0.995 *d*) Calculadora: $\cos(0.1) \approx 0.9950$

Sección 1.4 (página 78)

1. *a*) 1 *b*) 1 *c*) 1; $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

3. *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0; discontinuidad en $x = 3$

5. *a*) 2 *b*) -2 *c*) No existe el límite. Discontinuidad en $x = 4$

7. $\frac{1}{10}$

9. No existe el límite. La función decrece sin límite a medida que x tiende a -3 por la izquierda.

11. -1 **13.** $-1/x^2$ **15.** 5/2 **17.** 2

19. No existe el límite. La función decrece sin límite a medida que x tiende a π por la izquierda y crece sin límite a medida que x tiende a π por la derecha.

21. 4

23. No existe el límite. La función tiende a 5 por la izquierda de 3 pero tiende a 6 por la derecha de 3.

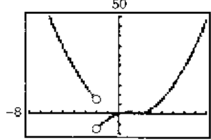
25. Discontinua en $x = -2$ y $x = 2$

27. Discontinua en todo número entero. **29.** Continua en $[-5, 5]$

31. Continua en $[-1, 4]$ **33.** Continua para todos los x reales

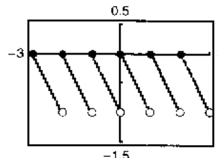
35. Continua para todos los x reales

37. Discontinuidad no removible en $x = 1$
Discontinuidad removible en $x = 0$
39. Continua para todo real x
41. Discontinuidad removible en $x = -2$
Discontinuidad no removible en $x = 5$
43. Discontinuidad no removible en $x = -2$
45. Continua para todo real x
47. Discontinuidad no removible en $x = 2$
49. Continua para todo real x
51. Discontinuidades no removibles en los múltiplos enteros de $\pi/2$
53. Discontinuidad no removible en todo entero
55.



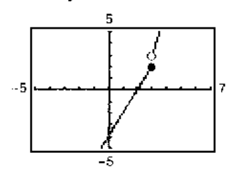
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
Discontinuidad en $x = -2$

57. $a = 2$ **59.** $a = -1$, $b = 1$ **61.** Continua para todo real x
63. Discontinuidades no removibles en $x = 1$ y en $x = -1$
65.



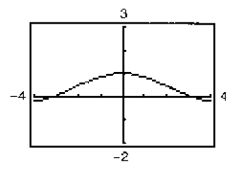
Discontinuidad no removible en todo número entero

67.



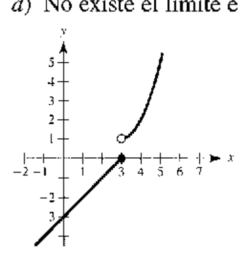
Discontinua en $x = 3$

69. Continua en $(-\infty, \infty)$
71. Continua en los intervalos abiertos . . . $(-6, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, 6)$, ...
73.



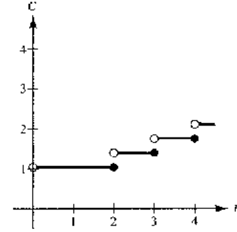
La gráfica tiene un hueco en $x = 0$. La gráfica parece continua, pero la función no es continua en $[-4, 4]$. A partir de la gráfica no resulta evidente que la función tiene una discontinuidad en $x = 0$.

75. Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 2]$ y $f(1) = 2.0625$ y $f(2) = -4$, por el teorema del valor intermedio, existe un número real c en $[1, 2]$ tal que $f(c) = 0$.
77. Puesto que $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$ y $f(0) = -3$ y $f(\pi) \approx 8.87$, por el teorema del valor intermedio, existe un número real c en $[0, \pi]$ tal que $f(c) = 0$.
79. 0.68, 0.6823 **81.** 0.56, 0.5636
83. $f(3) = 11$ **85.** $f(2) = 4$
87. *a*) No existe el límite en $x = c$.
b) La función no está definida en $x = c$.
c) El límite existe, pero no es igual al valor de la función en $x = c$.
d) No existe el límite en $x = c$.
89.



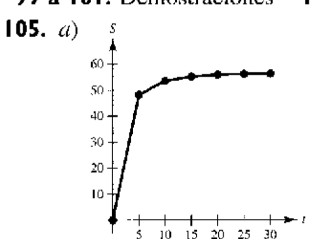
No es continua porque no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$.

91. Verdadero
93. Falso. Una función racional puede escribirse como $P(x)/Q(x)$, donde P y Q son polinomios de grado m y n, respectivamente. Puede tener, cuando mucho, n discontinuidades.
95. $\lim_{t\to 4^-} f(t) \approx 28$; $\lim_{t\to 4^+} f(t) \approx 56$
Al final del día 3, la cantidad de cloro en la piscina es 28 onzas, aproximadamente. Al comienzo del día 4, la cantidad de cloro en la piscina es de 56 onzas, aproximadamente.
97. $C = \begin{cases} 1.04, & 0 < t \le 2 \\ 1.04 + 0.36[\![t-1]\!], & t > 2,\ t \text{ no es un entero} \\ 1.04 + 0.36(t-2), & t > 2,\ t \text{ es un entero} \end{cases}$



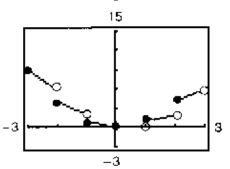
Discontinuidad no removible en todo entero mayor o igual que 2.

99 a 101. Demostraciones
103. Hay varias respuestas posibles.
105. *a*)



b) Al parecer existe una velocidad límite, lo que posiblemente se deba a la resistencia del aire.

107. $c = (-1 \pm \sqrt{5})/2$
109. Dominio: $[-c^2, 0) \cup (0, \infty)$; Sea $f(0) = 1/(2c)$
111. $h(x)$ tiene una discontinuidad no removible en todo número entero, excepto en 0.



113. Problema Putnam B2, 1988

Sección 1.5 (página 88)

1. $\lim_{x\to -2^+} 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right| = \infty$ $\lim_{x\to -2^-} 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right| = \infty$
3. $\lim_{x\to -2^+} \tan((\pi x)/4) = -\infty$ $\lim_{x\to -2^-} \tan((\pi x)/4) = \infty$
5.

x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$	0.31	1.64	16.6	167

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$	-167	-16.7	-1.69	-0.36

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \infty$

7.

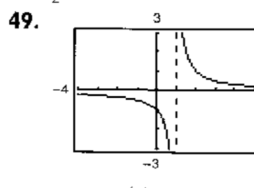
x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$	3.8	16	151	1 501

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$	$-1\,499$	-149	-14	-2.3

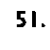
$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -3^-} f(x) = \infty$

9. $x = 0$ **11.** $x = 2,\ x = -1$ **13.** $x = \pm 2$
15. No hay asíntota vertical **17.** $x = \pi/4 + (n\pi)/2$, n es un entero.
19. $t = 0$ **21.** $x = -2, x = 1$ **23.** No hay asíntota vertical
25. No hay asíntota vertical **27.** $t = n\pi$, n es un entero distinto de cero.
29. Discontinuidad removible en $x = -1$
31. Asíntota vertical en $x = -1$ **33.** $-\infty$ **35.** ∞ **37.** $\frac{4}{5}$
39. $\frac{1}{2}$ **41.** $-\infty$ **43.** ∞ **45.** 0 **47.** No existe

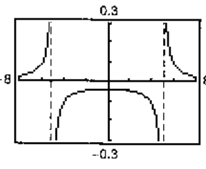
49.



$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$



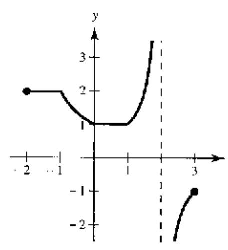
51.



$\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$

53. Hay varias respuestas posibles.
55. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4x-12}$

57.



59. *a*) $\frac{1}{3}(200\pi)$ pies/seg
b) 200π pies/seg
c) $\lim_{\theta\to(\pi/2)} [50\pi \sec^2\theta] = \infty$

61. ∞
63. *a*) Dominio: $x > 25$
b)

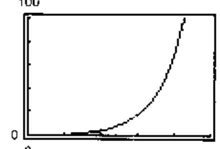
x	30	40	50	60
y	150	66.667	50	42.857

c) $\lim_{x\to 25^+} \dfrac{25x}{x-25} = \infty$

A medida que x se acerca a 25 mph, y crece más y crece.

65. *a*) $A = 50\tan\theta - 50\theta$; Dominio: $(0, \pi/2)$
b)

θ	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$f(\theta)$	0.47	4.21	18.0	68.6	630.1

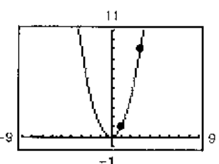


c) $\lim_{\theta\to\pi/2} A = \infty$

67. Falso; sea $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$ **69.** Verdadero
71. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$, y $c = 0$. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$ y $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4} = \infty$, pero $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-1}{x^4}\right) = -\infty \neq 0$.
73. Dado que $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, sea $g(x) = 1$. Entonces, por el teorema 1.15 $\lim_{x\to c}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$
75. Hay varias respuestas posibles.

Ejercicios de repaso del capítulo 1 (página 91)

1. Aplicando cálculo Estimación: 8.261



3.

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-1.0526	-1.0050	-1.0005

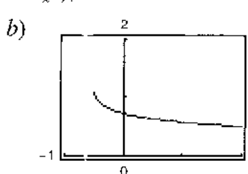
x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.9995	-0.9950	-0.9524

La estimación del límite de $f(x)$, cuando x tiende a cero, es -1.00.
5. *a*) -2 *b*) -3 **7.** 2; Demostración **9.** 1; Demostración
11. $\sqrt{6} \approx 2.45$ **13.** $-\frac{1}{4}$ **15.** $\frac{1}{4}$ **17.** -1 **19.** 75
21. 0 **23.** $\sqrt{3}/2$ **25.** $-\frac{1}{2}$
27. *a*)

x	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	0.5680	0.5764	0.5773	0.5773

$\lim_{x\to 1} f(x) \approx 0.5773$

b)



La gráfica tiene un hueco en $x = 1$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) \approx 0.5774$

c) $\sqrt{3}/3$
29. -39.2 m/seg **31.** -1 **33.** 0
35. No existe el límite. El límite cuando t tiende a 1 por la izquierda es 2, mientras que el límite cuando t tiende a 1 por la derecha es 1.
37. Discontinuidad no removible en todo número entero
Continua en $(k, k+1)$ para todos los enteros k
39. Discontinuidad removible en $x = 1$
Continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
41. Discontinuidad no removible en $x = 2$
Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
43. Discontinuidad no removible en $x = -1$
Continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
45. Discontinuidad no removible en todo número entero par
Continua en $(2k, 2k+2)$ para todo entero k
47. $c = -\frac{1}{2}$ **49.** Demostración
51. *a*) -4 *b*) 4 *c*) No existe el límite.
53. $x = 0$ **55.** $x = 10$ **57.** $-\infty$ **59.** $\frac{1}{3}$
61. $-\infty$ **63.** $-\infty$ **65.** $\frac{4}{5}$ **67.** ∞
69. *a*) \$14 117.65 *b*) \$80 000.00 *c*) \$720 000.00 *d*) ∞

SP Solución de problemas (página 93)

1. *a*) Perímetro $\triangle PAO = 1 + \sqrt{(x^2-1)^2 + x^2} + \sqrt{x^4 + x^2}$
Perímetro $\triangle PBO = 1 + \sqrt{x^4 + (x-1)^2} + \sqrt{x^4 + x^2}$

b)

x	4	2	1
Perímetro $\triangle PAO$	33.0166	9.0777	3.4142
Perímetro $\triangle PBO$	33.7712	9.5952	3.4142
$r(x)$	0.9777	0.9461	1.0000

x	0.1	0.01
Perímetro $\triangle PAO$	2.0955	2.0100
Perímetro $\triangle PBO$	2.0006	2.0000
$r(x)$	1.0475	1.0050

c) 1

3. *a)* Área (hexágono) $= (3\sqrt{3})/2 \approx 2.5981$
Área (círculo) $= \pi \approx 3.1416$
Área (círculo) − Área (hexágono) ≈ 0.5435

b) $A_n = (n/2)\operatorname{sen}(2\pi/n)$

c)

n	6	12	24	48	96
A_n	2.5981	3.0000	3.1058	3.1326	3.1394

d) 3.1416 o π

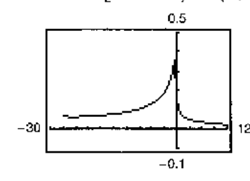
5. *a)* $m = -\frac{12}{5}$ *b)* $y = \frac{5}{12}x - \frac{169}{12}$

c) $m_x = \dfrac{-\sqrt{169 - x^2} + 12}{x - 5}$

d) $\frac{5}{12}$; Es igual a la pendiente de la recta tangente encontrada en el apartado *b)*

7. *a)* Dominio: $[-27, 1) \cup (1, \infty)$

b)

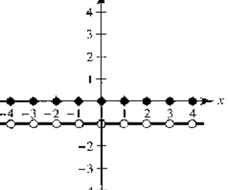
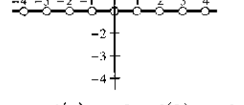


c) $\frac{1}{14}$ *d)* $\frac{1}{12}$

La gráfica tiene un hueco en $x = 1$.

9. *a)* g_1, g_4 *b)* g_1 *c)* g_1, g_3, g_4

11.

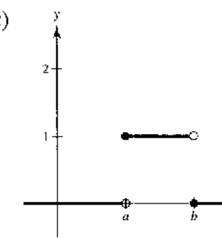
La gráfica tiene un salto en cada número entero.

a) $f(1) = 0,\ f(0) = 0,\ f(\frac{1}{2}) = -1,\ f(-2.7) = -1$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 1/2} f(x) = -1$

c) Existe una discontinuidad en cada entero.

13. *a)*



b) *i)* $\lim_{x\to a^-} P_{a,b}(x) = 1$

ii) $\lim_{x\to a^-} P_{a,b}(x) = 0$

iii) $\lim_{x\to b^-} P_{a,b}(x) = 0$

iv) $\lim_{x\to b} P_{a,b}(x) = 1$

c) Continua para todos los números reales positivos, excepto a y b

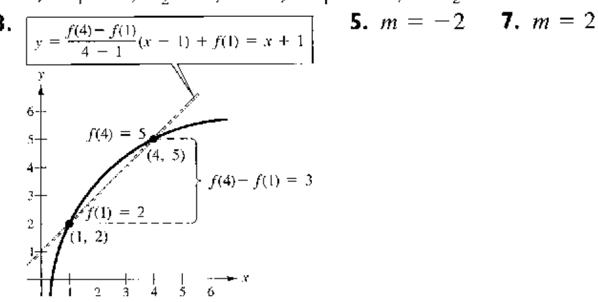
d) El área bajo la curva tiene un valor de 1.

Capítulo 2

Sección 2.1 (página 103)

1. *a)* $m_1 = 0, m_2 = 5/2$ *b)* $m_1 = -5/2, m_2 = 2$

3.



5. $m = -2$ **7.** $m = 2$

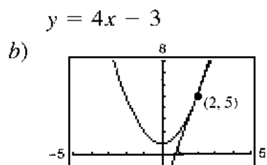
9. $m = 3$ **11.** $f'(x) = 0$ **13.** $f'(x) = -5$ **15.** $h'(s) = \frac{2}{3}$

17. $f'(x) = 4x + 1$ **19.** $f'(x) = 3x^2 - 12$

21. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$ **23.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}}$

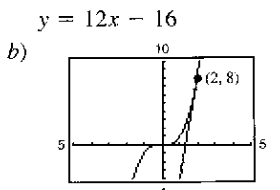
25. *a)* Recta tangente: $y = 4x - 3$

b)



27. *a)* Recta tangente: $y = 12x - 16$

b)

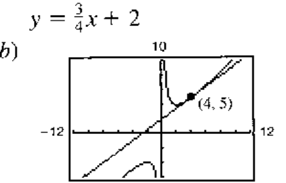


29. *a)* Recta tangente: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) (1, 1)

31. *a)* Recta tangente: $y = \frac{3}{4}x + 2$

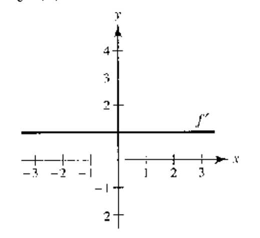
b)



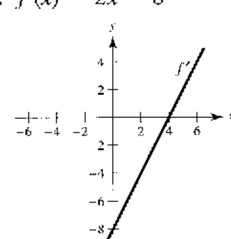
33. $y = 3x - 2;\ y = 3x + 2$ **35.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

37. b **38.** d **39.** a **40.** c **41.** $g(5) = 2;\ g'(5) = -\frac{1}{2}$

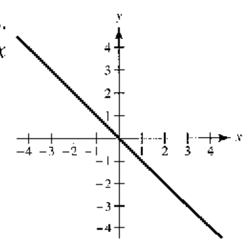
43. $f'(x) = 1$



45. $f'(x) = 2x - 8$



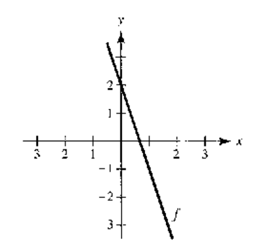
47. Hay varias respuestas posibles.
Ejemplo de respuesta: $y = -x$



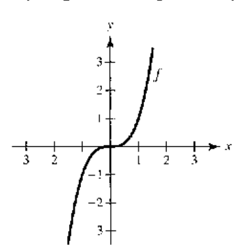
49. $f(x) = 5 - 3x$
$c = 1$

51. $f(x) = -x^2$
$c = 6$

53. $f(x) = -3x + 2$



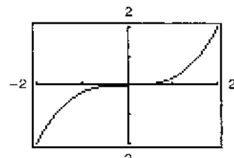
55. Hay varias respuestas posibles.
Ejemplo de respuesta: $f(x) = x^3$



57. $y = 2x + 1$; $y = -2x + 9$

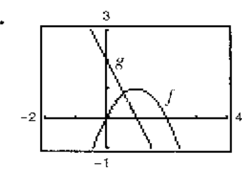
59. *a*) -3 (b) 0
c) La gráfica desciende hacia la derecha en $x = 1$.
d) La gráfica asciende hacia la derecha en $x = -4$.
e) Positiva. Puesto que $g'(x) > 0$ en $[3, 6]$, la gráfica de g asciende hacia la derecha.
f) No. Conocer sólo $g'(2)$ no es información suficiente, $g'(2)$ permanece igual para toda translación vertical de g.

61.



x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-2	$-\frac{27}{32}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2
$f'(x)$	3	$\frac{27}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{16}$	3

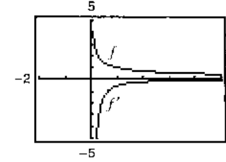
63.



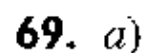
$g(x) \approx f'(x)$

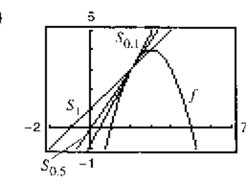
65. $f(2) = 4$; $f(2.1) = 3.99$; $f'(2) \approx -0.1$

67.



Cuando x tiende a infinito, la gráfica de f tiende a una recta con pendiente 0. Por lo tanto, $f'(x)$ tiende a 0.

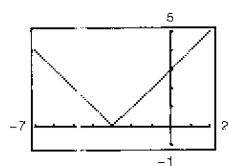

69. *a*)

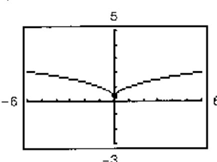


b) Las gráficas de S para valores decrecientes de Δx son rectas secantes que tienden a la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, f(2))$

71. 4 **73.** 4 **75.** $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.
77. $f(x)$ no es derivable en $x = 6$.
79. $h(x)$ no es derivable en $x = -5$.
81. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ **83.** $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ **85.** $(1, \infty)$

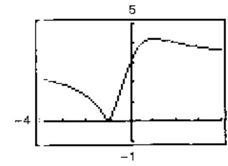
87. $(-\infty, \ 3) \cup (-3, \infty)$ **89.** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$





91. La derivada por la izquierda es -1 y la derivada por la derecha es 1, entonces f no es derivable en $x = 1$.
93. Ambas derivadas, por la derecha y por la izquierda, son 0, entonces $f'(1) = 0$.
95. f es derivable en $x = 2$.
97. *a*) $d = (3|m + 1|)/\sqrt{m^2 + 1}$

b)



No derivable en $m = -1$

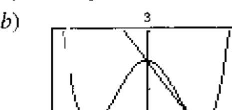
99. Falso. La pendiente es, $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.
101. Falso. Por ejemplo: $f(x) = |x|$. Existen tanto la derivada por la izquierda como la derivada por la derecha, pero no son iguales
103. Demostración

Sección 2.2 (página 115)

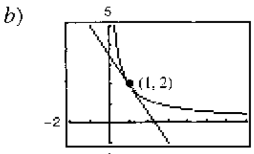
1. *a*) $\frac{1}{2}$ *b*) 3 **3.** 0 **5.** $6x^5$ **7.** $-7/x^8$ **9.** $1/(5x^{4/5})$
11. 1 **13.** $-4t + 3$ **15.** $2x + 12x^2$ **17.** $3t^2 - 2$
19. $\dfrac{\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ **21.** $2x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$ **23.** $-\dfrac{1}{x^2} - 3\cos x$

	Función original	*Reescribir*	*Derivada*	*Simplificada*
25.	$y = \dfrac{5}{2x^2}$	$y = \dfrac{5}{2}x^{-2}$	$y' = -5x^{-3}$	$y' = -\dfrac{5}{x^3}$
27.	$y = \dfrac{3}{(2x)^3}$	$y = \dfrac{3}{8}x^{-3}$	$y' = -\dfrac{9}{8}x^{-4}$	$y' = -\dfrac{9}{8x^4}$
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$	$y = x^{-1/2}$	$y' = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$	$y' = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

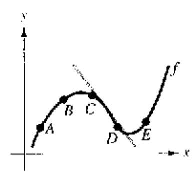
31. -6 **33.** 0 **35.** 4 **37.** 3 **39.** $2x + 6/x^3$
41. $2t + 12/t^4$ **43.** $(x^3 - 8)/x^3$ **45.** $3x^2 + 1$
47. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^{2/3}}$ **49.** $\dfrac{4}{5s^{1/5}} - \dfrac{2}{3s^{1/3}}$ **51.** $\dfrac{3}{\sqrt{x}} - 5\operatorname{sen} x$
53. *a*) $2x + y - 2 = 0$
b)



55. *a*) $3x + 2y - 7 = 0$
b)

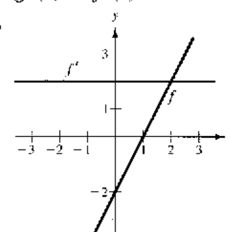


57. $(0, 2)$, $(-2, -14)$, $(2, -14)$ **59.** No hay tangentes horizontales
61. (π, π) **63.** $k = 2$, $k = -10$ **65.** $k = 3$
67. *a*) A y B *b*) Mayor *c*)



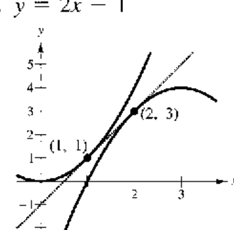
69. $g'(x) = f'(x)$

71.



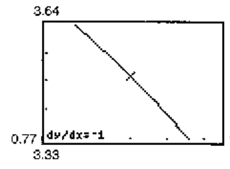
El ritmo (o velocidad) de cambio de f es constante y, por tanto, f' es una función constante.

73. $y = 2x - 1$ $y = 4x - 4$



75. $f'(x) = 3 + \cos x \neq 0$ para todo x. **77.** $x - 4y + 4 = 0$

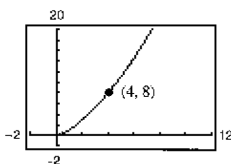
79.



$f'(1)$ parece estar cerca de -1.

$f'(1) = -1$

81. *a)*

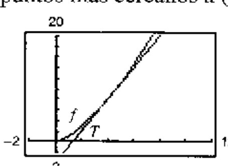


$(3.9, 7.7019)$,
$S(x) = 2.981x - 3.924$

b) $T(x) = 3(x - 4) + 8 = 3x - 4$

La pendiente (y la ecuación) de la recta secante tiende a la de la recta tangente en (4, 8), a medida que se toman puntos más cercanos a (4, 8).

c)



La aproximación se hace menos precisa.

d)

Δx	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0
$f(4 + \Delta x)$	1	2.828	5.196	6.548	7.702	8
$T(4 + \Delta x)$	-1	2	5	6.5	7.7	8

Δx	0.1	0.5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$	8.302	9.546	11.180	14.697	18.520
$T(4 + \Delta x)$	8.3	9.5	11	14	17

83. Falso. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$.

85. Falso. $dy/dx = 0$ **87.** Verdadero

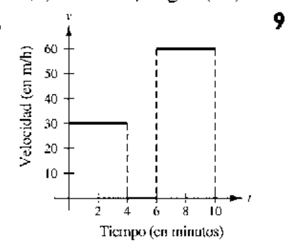
89. Ritmo o velocidad promedio: 2
Ritmos o velocidades instantáneas:
$f'(1) = 2$; $f'(2) = 2$

91. Ritmo o velocidad promedio: $\frac{1}{2}$
Ritmos o velocidades instantáneas:
$f'(1) = 1$; $f'(2) = \frac{1}{4}$

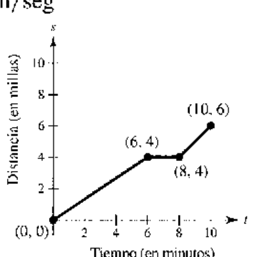
93. *a)* $s(t) = -16t^2 + 1\,362$; $v(t) = -32t$ *b)* -48 pies/seg
c) $s'(1) = -32$ pies/seg $s'(2) = -64$ pies/seg
d) $t = \dfrac{\sqrt{1\,362}}{4} \approx 9.226$ seg *e)* -295.242 pies/seg

95. $v(5) = 71$ m/seg; $v(10) = 22$ m/seg

97.



99.



101. *a)* $R(v) = 0.417v - 0.02$
b) $B(v) = 0.0056v^2 + 0.001v + 0.04$
c) $T(v) = 0.0056v^2 + 0.418v + 0.02$
d) (gráfica: ventana 0 a 120, 0 a 80; curvas T, B, R)
e) $T'(v) = 0.0112v + 0.418$
$T'(40) = 0.866$
$T'(80) = 1.314$
$T'(100) = 1.538$
f) La distancia de frenado aumenta con un ritmo o velocidad mayor.

103. $V'(4) = 48$ cm² **105.** Demostración

107. *a)* El ritmo o velocidad de cambio del número de galones de gasolina vendidos cuando el precio es \$1.479
b) En general, el ritmo o velocidad de cambio cuando $p = 1.479$ debe ser negativo. A medida que los precios suben, las ventas bajan.

109. $y = 2x^2 - 3x + 1$ **111.** $y = -9x$, $y = -\frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$

113. $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$

115. $f_1(x) = |\operatorname{sen} x|$ es derivable para todo $x \neq n\pi$, n entero.
$f_2(x) = \operatorname{sen}|x|$ es derivable para todo $x \neq 0$.

Sección 2.3 (página 126)

1. $2(2x^3 - 3x^2 + x - 1)$ **3.** $(7t^2 + 4)/(3t^{2/3})$

5. $x^2(3\cos x - x\operatorname{sen} x)$ **7.** $(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$

9. $(1 - 8x^3)/[3x^{2/3}(x^3 + 1)^2]$ **11.** $(x\cos x - 2\operatorname{sen} x)/x^3$

13. $f'(x) = (x^3 - 3x)(4x + 3) + (2x^2 + 3x + 5)(3x^2 - 3)$
$= 10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 18x - 15$
$f'(0) = -15$

15. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{(x - 3)^2}$ **17.** $f'(x) = \cos x - x\operatorname{sen} x$

$f'(1) = -\dfrac{1}{4}$ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}(4 - \pi)$

	Función	*Reescribir*	*Derivada*	*Simplificada*
19.	$y = \dfrac{x^2 + 2x}{3}$	$y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x)$	$y' = \dfrac{1}{3}(2x + 2)$	$y' = \dfrac{2(x + 1)}{3}$
21.	$y = \dfrac{7}{3x^3}$	$y = \dfrac{7}{3}x^{-3}$	$y' = -7x^{-4}$	$y' = -\dfrac{7}{x^4}$
23.	$y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$	$y = 4x^{1/2}$, $x > 0$	$y' = 2x^{-1/2}$	$y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

25. $\dfrac{(x^2 - 1)(-2 - 2x) - (3 - 2x - x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$, $x \neq 1$

27. $1 - 12/(x+3)^2 = (x^2 + 6x - 3)/(x+3)^2$

29. $\left[2\sqrt{x} - (2x+5)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]/x = (2x-5)/2x^{3/2}$

31. $6s^2(s^3 - 2)$ **33.** $-(2x^2 - 2x + 3)/[x^2(x-3)^2]$

35. $(3x^3 + 4x)[(x-5)\cdot 1 + (x+1)\cdot 1]$
$+ [(x-5)(x+1)](9x^2 + 4)$
$= 15x^4 - 48x^3 - 33x^2 - 32x - 20$

37. $\dfrac{(x^2 - c^2)(2x) - (x^2 + c^2)(2x)}{(x^2 - c^2)^2} = -\dfrac{4xc^2}{(x^2 - c^2)^2}$

39. $t(t\cos t + 2\,\text{sen}\, t)$ **41.** $-(t\,\text{sen}\, t + \cos t)/t^2$

43. $-1 + \sec^2 x = \tan^2 x$ **45.** $\dfrac{1}{4t^{3/4}} + 8\sec t \tan t$

47. $\dfrac{-6\cos^2 x + 6\,\text{sen}\, x - 6\,\text{sen}^2 x}{4\cos^2 x} = \dfrac{3}{2}(-1 + \tan x \sec x - \tan^2 x)$
$= \frac{3}{2}\sec x(\tan x - \sec x)$

49. $\csc x \cot x - \cos x = \cos x \cot^2 x$ **51.** $x(x\sec^2 x + 2\tan x)$

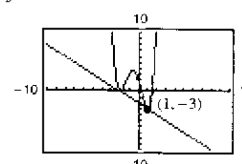
53. $2x\cos x + 2\,\text{sen}\, x - x^2\,\text{sen}\, x + 2x\cos x$
$= 4x\cos x + (2 - x^2)\,\text{sen}\, x$

55. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)(2) + (2x-5)\left[\dfrac{(x+2)(1) - (x+1)(1)}{(x+2)^2}\right]$
$= \dfrac{2x^2 + 8x - 1}{(x+2)^2}$

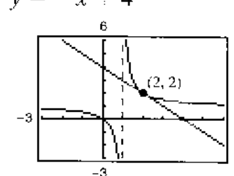
57. $\dfrac{1 - \text{sen}\,\theta + \theta\cos\theta}{(1 - \text{sen}\,\theta)^2}$ **59.** $y' = \dfrac{-2\csc x \cot x}{(1 - \csc x)^2}, \quad -4\sqrt{3}$

61. $h'(t) = \sec t(t\tan t - 1)/t^2, \quad 1/\pi^2$

63. *a)* $y = -x - 2$
b)



65. *a)* $y = -x + 4$
b)

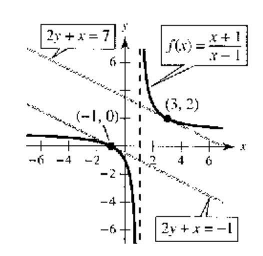


67. *a)* $4x - 2y - \pi + 2 = 0$
b)

69. $2y + x - 4 = 0$

71. $25y - 12x + 16 = 0$ **73.** $(0, 0), (2, 4)$ **75.** $(1, 2)$

77. Rectas tangentes: $2y + x = 7$; $2y + x = -1$



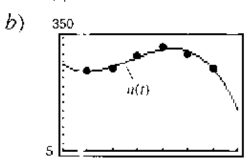
79. $f(x) + 2 = g(x)$ **81.** *a)* $p'(1) = 1$ *b)* $q'(4) = -1/3$

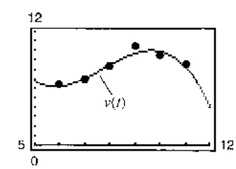
83. $(6t + 1)/(2\sqrt{t})$ cm²/seg

85. *a)* −\$38.13 *b)* −\$10.37 *c)* −\$3.80
Los costos disminuyen al aumentar el tamaño del pedido.

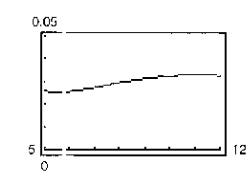
87. 31.55 bacterias/hora **89.** Demostración

91. *a)* $n(t) = -3.5806t^3 + 82.577t^2 - 603.60t + 1667.5$
$v(t) = -0.1361t^3 + 3.165t^2 - 23.02t + 59.8$
b)





c) $A = \dfrac{-0.1361t^3 + 3.165t^2 - 23.02t + 59.8}{-3.5806t^3 + 82.577t^2 - 603.60t + 1667.5}$



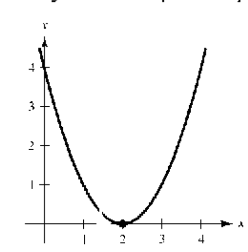
A representa el valor promedio al menudeo (en millones de dólares) por 1 000 casas rodantes.

d) $A'(t)$ representa el ritmo de cambio del valor promedio al menudeo por 1 000 casas rodantes en un año dado.

93. $3/\sqrt{x}$ **95.** $2/(x-1)^3$ **97.** $-3\,\text{sen}\, x$

99. $2x$ **101.** $1/\sqrt{x}$

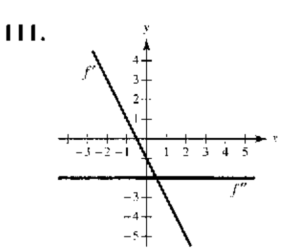
103. Hay varias respuestas posibles. Por ejemplo: $(x-2)^2$



105. 0 **107.** −10

109.

111.



113.

115. $v(3) = 27$ m/seg
$a(3) = -6$ m/seg²
La velocidad del objeto es decreciente, pero el ritmo de dicha disminución es creciente.

117.

t	0	1	2	3	4
$s(t)$	0	57.75	99	123.75	132
$v(t)$	66	49.5	33	16.5	0
$a(t)$	−16.5	−16.5	−16.5	−16.5	−16.5

La velocidad promedio en [0, 1] es 57.75, en [1, 2] es 41.25, en [2, 3] es 24.75 y en [3, 4] es 8.25.

119. $f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$

121. *a)* $f''(x) = g(x)h''(x) + 2g'(x)h'(x) + g''(x)h(x)$

$f'''(x) = g(x)h'''(x) + 3g'(x)h''(x) + 3g''(x)h'(x) + g'''(x)h(x)$

$f^{(4)}(x) = g(x)h^{(4)}(x) + 4g'(x)h'''(x) + 6g''(x)h''(x) + 4g'''(x)h'(x) + g^{(4)}(x)h(x)$

b) $f^{(n)}(x) = g(x)h^{(n)}(x) + \dfrac{n!}{1!(n-1)!}g'(x)h^{(n-1)}(x) + \dfrac{n!}{2!(n-2)!}g''(x)h^{(n-2)}(x) + \cdots + \dfrac{n!}{(n-1)!1!}g^{(n-1)}(x)h'(x) + g^{(n)}(x)h(x)$

123. $n = 1$: $f'(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$

$n = 2$: $f'(x) = x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x$

$n = 3$: $f'(x) = x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x$

$n = 4$: $f'(x) = x^4\cos x + 4x^3\operatorname{sen} x$

Regla general: $f'(x) = x^n\cos x + nx^{(n-1)}\operatorname{sen} x$

125. $y' = -1/x^2$, $y'' = 2/x^3$,

$x^3y'' + 2x^2y' = x^3(2/x^3) + 2x^2(-1/x^2) = 2 - 2 = 0$

127. $y' = 2\cos x$, $y'' = -2\operatorname{sen} x$,

$y'' + y = -2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x + 3 = 3$

129. Falso. $dy/dx = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ **131.** Verdadero

133. Verdadero **135.** $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

137. $f'(x) = 2|x|$; $f''(0)$ no existe.

Sección 2.4 (página 137)

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (6x-5)^4$	$u = 6x - 5$	$y = u^4$
3.	$y = \sqrt{x^2-1}$	$u = x^2 - 1$	$y = \sqrt{u}$
5.	$y = \csc^3 x$	$u = \csc x$	$y = u^3$

7. $6(2x-7)^2$ **9.** $-108(4-9x)^3$

11. $\frac{1}{2}(1-t)^{-1/2}(-1) = -1/\left(2\sqrt{1-t}\right)$

13. $\frac{1}{3}(9x^2+4)^{-2/3}(18x) = 6x/(9x^2+4)^{2/3}$

15. $\frac{1}{2}(4-x^2)^{-3/4}(-2x) = -x/\sqrt[4]{(4-x^2)^3}$ **17.** $-1/(x-2)^2$

19. $-2(t-3)^{-3}(1) = -2/(t-3)^3$ **21.** $-1/[2(x+2)^{3/2}]$

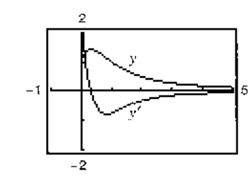
23. $x^2[4(x-2)^3(1)] + (x-2)^4(2x) = 2x(x-2)^3(3x-2)$

25. $x\left(\dfrac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-1/2}(-2x) + (1-x^2)^{1/2}(1) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

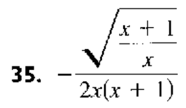
27. $\dfrac{(x^2+1)^{1/2}(1) - x(1/2)(x^2+1)^{-1/2}(2x)}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$

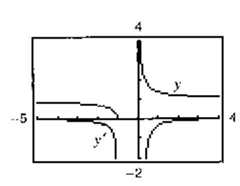
29. $\dfrac{-2(x+5)(x^2+10x-2)}{(x^2+2)^3}$ **31.** $\dfrac{-9(2v-1)^2}{(v+1)^4}$

33. $(1 - 3x^2 - 4x^{3/2})/[2\sqrt{x}(x^2+1)^2]$



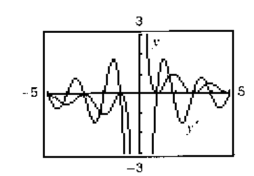
El cero de y' corresponde al punto de la gráfica de la función en el que la recta tangente es horizontal.

35.  $-\dfrac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}{2x(x+1)}$



y' no tiene ceros.

37. $-[\pi x\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x) + 1]/x^2$



Los ceros de y' corresponden a los puntos de la gráfica de la función en los que las rectas tangentes son horizontales.

39. *a)* 1 *b)* 2; La pendiente de sen ax en el origen es a.

41. $-3\operatorname{sen}(3x)$ **43.** $12\sec^2(4x)$ **45.** $2\pi^2 x\cos(\pi x)^2$

47. $2\cos(4x)$ **49.** $(-1 - \cos^2 x)/\operatorname{sen}^3 x$

51. $8\sec^2 x\tan x = \dfrac{8\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ **53.** $\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(4\theta)$

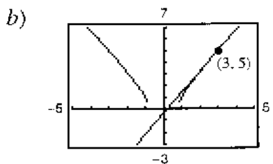
55. $\dfrac{6\pi\operatorname{sen}(\pi t-1)}{\cos^3(\pi t-1)}$ **57.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\cos(2x)^2$

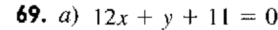
59. $s'(t) = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+8}}, \dfrac{3}{4}$ **61.** $f'(x) = \dfrac{-9x^2}{(x^3-4)^2}, -\dfrac{9}{25}$

63. $f'(t) = \dfrac{-5}{(t-1)^2}, -5$ **65.** $y' = -6\sec^3(2x)\tan(2x)$, 0

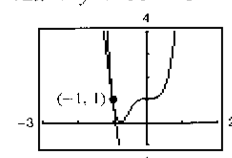
67. *a)* $9x - 5y - 2 = 0$

b)



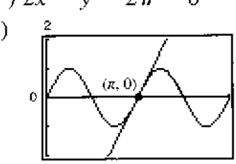
69.  *a)* $12x + y + 11 = 0$

b)



71. *a)* $2x - y - 2\pi = 0$

b)



73. *a)* $4x - y + (1 - \pi) = 0$

b) [gráfica: $(\frac{\pi}{4}, 1)$]

75. *a)* $g'(1/2) = -3$

b) $3x + y - 3 = 0$

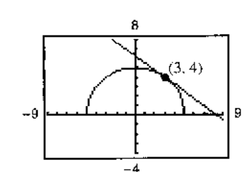
c) [gráfica: $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$]

77. *a)* $s'(0) = 0$

b) $y = \frac{4}{3}$

c) [gráfica: $(0, \frac{4}{3})$]

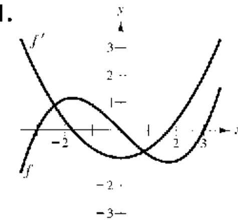
79. $3x + 4y - 25 = 0$



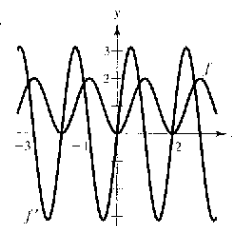
81. $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ **83.** $12(5x^2-1)(x^2-1)$

85. $2(\cos x^2 - 2x^2\operatorname{sen} x^2)$ **87.** $h''(x) = 18x + 6$, 24

89. $f''(x) = -4x^2\cos(x^2) - 2\,\text{sen}(x^2)$, 0

91. 

Los ceros de f' corresponden a los puntos donde la gráfica de f tiene tangentes horizontales.

93. 

Los ceros de f' corresponden a los puntos donde la gráfica de f tiene tangentes horizontales.

95. El ritmo o velocidad de cambio de g será tres veces mayor que el ritmo de cambio de f.

97. *a)* 24 *b)* No es posible porque no se conoce $g'(h(5))$.
c) $\frac{4}{3}$ *d)* 162

99. *a)* $\frac{1}{2}$
b) No existe $s'(5)$, porque g no es derivable en 6.

101. *a)* 1.461 *b)* -1.016

103. 0.2 radianes, 1.45 radianes/seg **105.** 0.04224 cm/seg

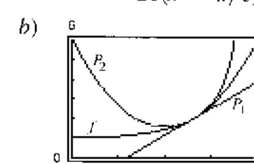
107. *a)* $x = -1.637t^3 + 19.31t^2 - 0.5t - 1$
b) $\frac{dC}{dt} = -294.66t^2 + 2317.2t - 30$
c) Porque x, el número de unidades producidas en t horas, no es una función lineal, y por lo tanto el costo respecto al tiempo t no es lineal.

109. $f(x + p) = f(x)$ para toda x.
a) Sí, $f'(x + p) = f'(x)$, lo que muestra que f' también es periódica.
b) Sí, sea $g(x) = f(2x)$, entonces $g'(x) = 2f'(2x)$. Como f' es periódica, también lo es g'.

111. *a)* 0
b) $f'(x) = 2\sec x \cdot \sec x \tan x = 2\sec^2 x \tan x$
$g'(x) = 2\tan x \sec^2 x = 2\sec^2 x \tan x$
$f'(x) = g'(x)$

113. Demostración **115.** $f'(x) = 2x\left(\frac{x^2 - 4}{|x^2 - 4|}\right), x \neq \pm 2$

117. $f'(x) = \cos x\,\text{sen}\,x/|\text{sen}\,x|, x \neq k\pi$

119. *a)* $P_1(x) = 4\sqrt{3}(x - \pi/6) + 2$
$P_2(x) = 1/2(56)(x - \pi/6)^2 + 4\sqrt{3}(x - \pi/6) + 2$
$= 28(x - \pi/6)^2 + 4\sqrt{3}(x - \pi/6) + 2$
b) 
c) P_2
d) La precisión empeora a medida que uno se aleja de $x = \pi/6$.

121. Falso. Si $f(x) = \text{sen}^2(2x)$, entonces $f'(x) = 2(\text{sen}\,2x)(2\cos 2x)$.

123. Problema Putnam A1, 1967

Sección 2.5 (página 146)

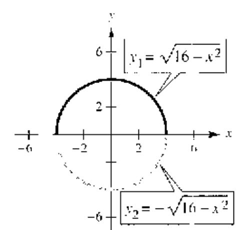
1. $-x/y$ **3.** $-\sqrt{y/x}$ **5.** $(y - 3x^2)/(2y - x)$

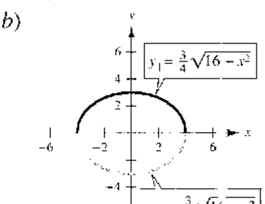
7. $(1 - 3x^2y^3)/(3x^3y^2 - 1)$

9. $(6xy - 3x^2 - 2y^2)/(4xy - 3x^2)$

11. $\cos x/[4\,\text{sen}(2y)]$ **13.** $(\cos x - \tan y - 1)/(x\sec^2 y)$

15. $[y\cos(xy)]/[1 - x\cos(xy)]$

17. *a)* $y_1 = \sqrt{16 - x^2}$; $y_2 = -\sqrt{16 - x^2}$
b) 
(c) $y' = \mp\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = -\frac{x}{y}$
(d) $y' = -\frac{x}{y}$

19. *a)* $y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; $y_2 = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$
b) 
c) $y' = \mp\frac{3x}{4\sqrt{16 - x^2}} = -\frac{9x}{16y}$
d) $y' = -\frac{9x}{16y}$

21. $-\frac{y}{x}, -\frac{1}{4}$ **23.** $\frac{8x}{y(x^2 + 4)^2}$, Indefinido **25.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, -\frac{1}{2}$

27. $-\text{sen}^2(x + y)$ o $-\frac{x^2}{x^2 + 1}$, 0 **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** 0

33. $y = -x + 4$ **35.** $y = -x + 2$

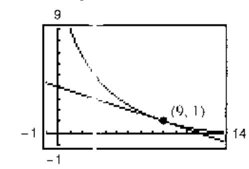
37. $y = \sqrt{3}x/6 + 4\sqrt{3}$ **39.** $y = -\frac{2}{11}x + \frac{30}{11}$

41. *a)* $y = -2x + 4$ *b)* Hay varias respuestas posibles.

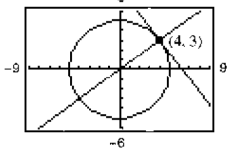
43. $\cos^2 y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1 + x^2}$ **45.** $-36/y^3$

47. $-16/y^3$ **49.** $(3x)/(4y)$

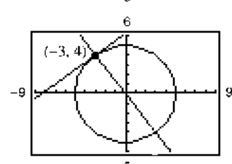
51. $x + 3y - 12 = 0$



53. En (4, 3):
Recta tangente: $4x + 3y - 25 = 0$
Recta normal: $3x - 4y = 0$



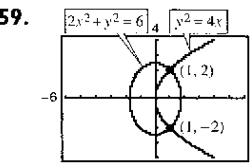
En $(-3, 4)$:
Recta tangente: $3x - 4y + 25 = 0$
Recta normal: $4x + 3y = 0$



55. $x^2 + y^2 = r^2 \Longrightarrow y' = -x/y \Longrightarrow y/x =$ pendiente de la recta normal. Entonces para (x_0, y_0) en el círculo, $x_0 \neq 0$, una ecuación de la recta normal es $y = (y_0/x_0)x$, la cual pasa por el origen. Si $x_0 = 0$, la recta normal es vertical y pasa por el origen.

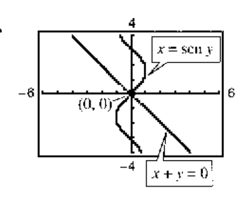
57. Tangentes horizontales: $(-4, 0)$, $(-4, 10)$
Tangentes verticales: $(0, 5)$, $(-8, 5)$

59.



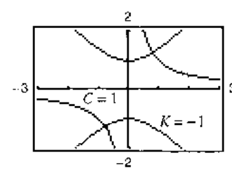
En (1, 2):
Pendiente de la elipse: -1
Pendiente de la parábola: 1
En $(1, -2)$:
Pendiente de la elipse: 1
Pendiente de la parábola: -1

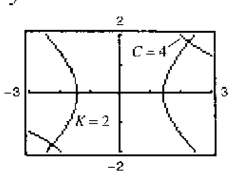
61.



En (0, 0):
Pendiente de la recta: -1
Pendiente de la curva seno: 1

63. Derivadas: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}, \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$





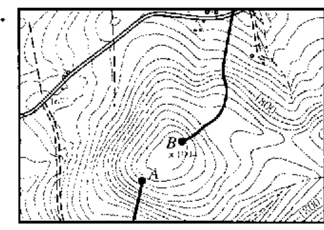
65. *a*) $y\dfrac{dy}{dx} - 3x^3 = 0$ *b*) $y\dfrac{dy}{dt} - 3x^3\dfrac{dx}{dt} = 0$

67. *a*) $-\pi \text{ sen } \pi y\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - 3\pi \cos \pi x = 0$

b) $-\pi \text{ sen } \pi y\left(\dfrac{dy}{dt}\right) - 3\pi \cos \pi x\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = 0$

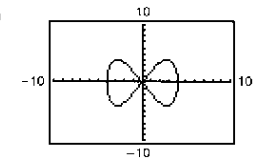
69. Hay varias respuestas posibles. En la forma explícita de una función, la variable se escribe explícitamente como función de x. En una ecuación implícita, la función sólo queda implicada por la función. Un ejemplo de función implícita es $x^2 + xy = 5$, cuya forma explícita es $y = (5 - x^2)/x$.

71.

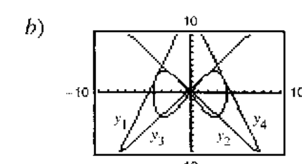


Utilizar el punto de partida B.

73. *a*)



b)



c) $\left(\dfrac{8\sqrt{7}}{7}, 5\right)$

$y_1 = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{7} + 7\right)x + \left(8\sqrt{7} + 23\right)\right]$
$y_2 = -\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{7} + 7\right)x - \left(23 - 8\sqrt{7}\right)\right]$
$y_3 = -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{7} - 7\right)x - \left(23 - 8\sqrt{7}\right)\right]$
$y_4 = -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{7} + 7\right)x - \left(8\sqrt{7} + 23\right)\right]$

75. Demostración **77.** $(0, \pm 1)$ **79.** *a*) 1 *b*) 1 *c*) 3
$x_0 = 3/4$

Sección 2.6 (página 154)

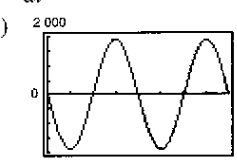
1. *a*) $\frac{3}{4}$ *b*) 20 **3.** *a*) $-\frac{5}{8}$ *b*) $\frac{3}{2}$
5. *a*) -4 cm/seg b) 0 cm/seg *c*) 4 cm/seg
7. *a*) 8 cm/seg *b*) 4 cm/seg *c*) 2 cm/seg
9. *a*) Positiva *b*) Negativa
11. En una función lineal, si x cambia a ritmo o velocidad constante, así lo hace y. Sin embargo, a menos que $a = 1$, y no cambia al mismo ritmo o velocidad que x.
13. $[2(2x^3 + 3x)]/\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$
15. *a*) $36\pi \text{ cm}^2/\text{min}$ *b*) $144\pi \text{ cm}^2/\text{min}$
17. *a*) Demostración
b) Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}s^2$. Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{8}s^2$.
c) Si s y $d\theta/dt$ son constantes, dA/dt es proporcional a $\cos \theta$.
19. *a*) $2/(9\pi)$ cm/min *b*) $1/(18\pi)$ cm/min
21. *a*) $36 \text{ cm}^2/\text{seg}$ *b*) $360 \text{ cm}^2/\text{seg}$ **23.** $8/(405\pi)$ pies/min
25. *a*) 12.5% *b*) $\frac{1}{144}$ m/min
27. *a*) $-\frac{7}{12}$ pies/seg; $-\frac{3}{2}$ pies/seg; $-\frac{48}{7}$ pies/seg
b) $\frac{527}{24}$ pies^2/seg *c*) $\frac{1}{12}$ rad/seg
29. Ritmo o velocidad de cambio vertical: $\frac{1}{5}$ m/seg
Ritmo o velocidad de cambio horizontal: $-\sqrt{3}/15$ m/seg
31. *a*) -750 m/h *b*) 20 min
33. $-28/\sqrt{10} \approx -8.85$ pies/seg **35.** *a*) $\frac{25}{3}$ pies/seg *b*) $\frac{10}{3}$ pies/seg
37. *a*) 12 seg *b*) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ m *c*) $\left(\sqrt{5}\pi\right)/120$ m/seg
39. Ritmo o velocidad de evaporación proporcional a

$S \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = k(4\pi r^2)$

$V = \left(\dfrac{4}{3}\right)\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$. Por lo tanto $k = \dfrac{dr}{dt}$.

41. $-V\dfrac{dp}{dt} = 1.3p\dfrac{dV}{dt}$ **43.** $\dfrac{1}{20}$ rad/seg
45. *a*) $\frac{1}{2}$ rad/min *b*) $\frac{3}{2}$ rad/min
c) 1.87 rad/min
47. *a*) $\dfrac{dx}{dt} = -600\pi \text{ sen } \theta$

b)

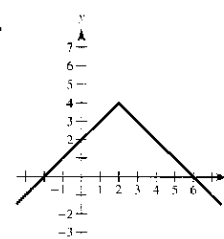


c) $\theta = 90° + n \cdot 180°$;
$\theta = 0° + n \cdot 180°$
d) -300π cm/seg;
$-300\sqrt{3}\pi$ cm/seg

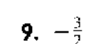
49. $\dfrac{1}{25}\cos^2 \theta, -\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ **51.** -0.1808 pies/seg^2
53. *a*) $m(s) = 0.3754s^3 - 18.780s^2 + 313.23s - 1\,707.8$
b) $(1.1262s^2 - 37.560s + 313.23)\dfrac{ds}{dt}$; 1.12 millones

Ejercicios de repaso para el capítulo 2 (página 158)

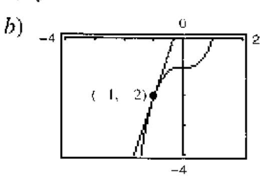
1. $f'(x) = 2x - 2$ **3.** $f'(x) = -2/(x - 1)^2$
5. f es derivable en todo $x \neq -1$.

7. 

a) Sí
b) No, porque las derivadas por la derecha y por la izquierda no son iguales.

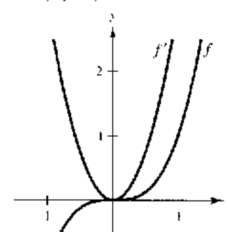
9. $-\frac{3}{2}$ 

11. *a*) $y = 3x + 1$ **13.** 8

b) 

15. 0 **17.** $8x^7$ **19.** $12t^3$ **21.** $3x(x-2)$ **23.** $-\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{2/3}}$

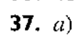
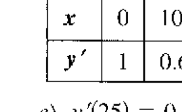
25. $-4/(3t^3)$ **27.** $2 - 3\cos\theta$ **29.** $-3\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta/4$

31.


$f' > 0$ donde las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f son positivas.

33. *a*) 50 vibraciones/seg/lb
b) 33.33 vibraciones/seg/lb

35. 414.74 m o 1 354 pies

37. *a*) 


b) 50
c) $x = 25$
d) $y' = 1 - 0.04x$

x	0	10	25	30	50
y'	1	0.6	0	-0.2	-1

e) $y'(25) = 0$

39. *a*) $x'(t) = 2t - 3$ *b*) $(-\infty, 1.5)$ *c*) $x = -\frac{1}{4}$ *d*) 1

41. $2(6x^3 - 9x^2 + 16x - 7)$ **43.** $\sqrt{x}\cos x + \text{sen}\,x/(2\sqrt{x})$

45. $-(x^2+1)/(x^2-1)^2$ **47.** $(6x)/(4-3x^2)^2$

49. $\frac{2x\cos x + x^2\,\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$ **51.** $3x^2\sec x\tan x + 6x\sec x$

53. $-x\,\text{sen}\,x$ **55.** $y = 4x - 3$ **57.** $y = 0$

59. $v(4) = 20$ m/seg; $a(4) = -8$ m/seg^2

61. $6t$ **63.** $6\sec^2\theta\tan\theta$

65. $y'' + y = -(2\,\text{sen}\,x + 3\cos x) + (2\,\text{sen}\,x + 3\cos x) = 0$

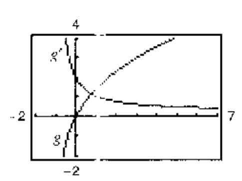
67. $\frac{2(x-3)(-x^2+6x+1)}{(x^2+1)^3}$ **69.** $s(s^2-1)^{3/2}(8s^3 - 3s + 25)$

71. $-9\,\text{sen}(3x+1)$ **73.** $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \text{sen}^2 x$

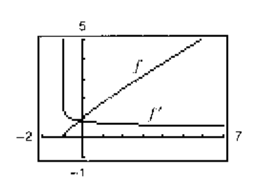
75. $\text{sen}^{1/2} x\cos x - \text{sen}^{5/2} x\cos x = \cos^3 x\sqrt{\text{sen}\,x}$

77. $\frac{(x+2)[\pi\cos(\pi x)] - \text{sen}(\pi x)}{(x+2)^2}$ **79.** -2 **81.** 0

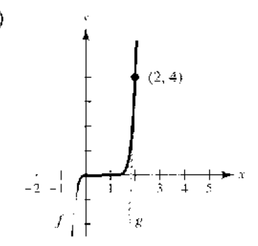
83. $(x+2)/(x+1)^{3/2}$ **85.** $5/[6(t+1)^{1/6}]$



g' no es igual a cero para ningún x.

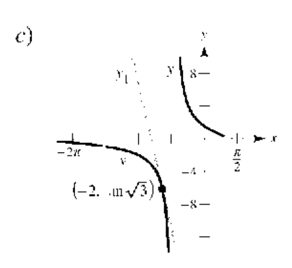


f' no tiene ceros.

87. *a*) $f'(2) = 24$ *b*) $g(t) = 24t - 44$
c) 

89. *a*) $y'(-2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}\cos^2\sqrt{3}} \approx -11.1983$

b) $y_1 = -\frac{(x+2)}{2\sqrt{3}\cos^2\sqrt{3}} + \tan\sqrt{3}$

c) 

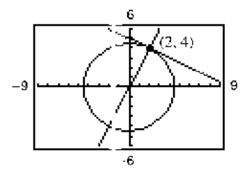
91. $4 - 4\,\text{sen}\,2x$ **93.** $2\csc^2 x\cot x$

95. $[2(t+2)]/(1-t)^4$ **97.** $18\sec^2(3\theta)\tan(3\theta) + \text{sen}(\theta - 1)$

99. *a*) -18.667 grados por hora *b*) -7.284 grados por hora
c) -3.240 grados por hora *d*) -0.747 grados por hora

101. $-\frac{2x + 3y}{3(x + y^2)}$ **103.** $\frac{2y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{2x\sqrt{y} - x\sqrt{x}}$ **105.** $\frac{y\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,y}{\cos x - x\cos y}$

107. Recta tangente: $x + 2y - 10 = 0$
Recta normal: $2x - y = 0$



109. *a*) $2\sqrt{2}$ unidades/seg *b*) 4 unidades/seg *c*) 8 unidades/seg

111. $\frac{2}{25}$ m/min **113.** -38.34 m/seg

S.P. Solución de problemas (página 161)

1. *a*) $r = \frac{1}{2}$; $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
b) Centro: $\left(0, \frac{5}{4}\right)$; $x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$

3. *a*) $P_1(x) = 1$ *b*) $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

c)

x	-1.0	-0.1	-0.001	0	0.001
$\cos x$	0.5403	0.9950	1.000	1	1.000
$P_2(x)$	0.5	0.995	1.000	1	1.000

x	0.1	1.0
$\cos x$	0.9950	0.5403
$P_2(x)$	0.995	0.5

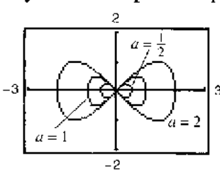
$P_2(x)$ es una buena aproximación a $f(x) = \cos x$ cuando x está muy cerca de 0.

d) $P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

5. $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$

7. *a*) Representar gráficamente $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{a}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} \\ y_2 = -\dfrac{1}{a}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} \end{cases}$ como ecuaciones separadas.

b) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta



Las intersecciones siempre serán $(0, 0)$, $(a, 0)$, y $(-a, 0)$, y los valores máximo y mínimo de y parecen ser $\pm\frac{1}{2}a$.

c) $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$, $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{a}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{a}{2}\right)$

9. *a*) Cuando el hombre se encuentra a 90 pies de la luz, la parte superior de su sombra está a $112\frac{1}{2}$ pies de ella. La parte superior de la sombra del niño está a $111\frac{1}{9}$ pies de la luz, de manera que la sombra del hombre se extiende $1\frac{7}{18}$ pies más allá de la sombra del niño.

b) Cuando el hombre se encuentra a 60 pies de la luz, la parte superior de su sombra está a 75 pies de ella. La parte superior de la sombra del niño está a $77\frac{7}{9}$ pies de la luz, de manera que la sombra del niño se extiende $2\frac{7}{9}$ pies más allá de la sombra del hombre.

c) $d = 80$ pies

d) Sean x la distancia entre el hombre y la luz, y s la distancia entre la luz y la parte superior de su sombra.
Si $0 < x < 80$, $ds/dt = -50/9$.
Si $x > 80$, $ds/dt = -25/4$
Existe una discontinuidad en $x = 80$.

11. Demostración. La gráfica de L es una recta que pasa por el origen $(0, 0)$.

13. *a*)

$z°$	0.1	0.01	0.0001
$\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$	0.0174532837	0.0174532924	0.0174532925

b) $\pi/180$ *c*) $(\pi/180)\cos z$

d) $S(90) = 1$, $C(180) = -1$; $(\pi/180)C(z)$

e) Hay varias respuestas posibles.

15. *a*) j sería el ritmo o velocidad de cambio de la aceleración.

b) $j = 0$. La aceleración es constante, de manera que no hay cambio en la aceleración.

c) *a*: función posición, *d*: función velocidad,
b: función aceleración, *c*: función de estremecimiento

Capítulo 3

Sección (página 169)

1. A: ninguno, B: máximo absoluto (y máximo relativo),
C: ninguno, D: ninguno, E: máximo relativo,
F: mínimo relativo, G: ninguno

3. $f'(0) = 0$ **5.** $f'(3) = 0$ **7.** $f'(-2)$ no está definido.

9. 2, máximo absoluto (y máximo relativo)

11. 1, máximo absoluto (y máximo relativo);
2, mínimo absoluto (y mínimo relativo);
3, máximo absoluto (y máximo relativo)

13. $x = 0, x = 2$ **15.** $t = 8/3$ **17.** $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$

19. Mínimo: $(2, 2)$
Máximo: $(-1, 8)$

21. Mínimos: $(0, 0)$ y $(3, 0)$
Máximo: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

23. Máximo: $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$
Máximo: $(2, 2)$

25. Máximo: $(0, 0)$
Máximo: $(-1, 5)$

27. Máximo: $(0, 0)$
Maximos: $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

29. Máximo: $(1, -1)$
Máximo: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

31. Mínimo: $(-1, -1)$
Máximo: $(3, 3)$

33. Mínimo: $\left(1/6, \sqrt{3}/2\right)$
Máximo: $(0, 1)$

35. Mínimo: $(2, 3)$
Máximo: $\left(1, \sqrt{2} + 3\right)$

37. *a*) Mínimo: $(0, -3)$;
Máximo: $(2, 1)$
b) Mínimo: $(0, -3)$
c) Máximo: $(2, 1)$
d) No hay extremos

39. *a*) Mínimo: $(1, -1)$;
Máximo: $(-1, 3)$
b) Máximo: $(3, 3)$
c) Mínimo: $(1, -1)$
d) Mínimo: $(1, -1)$

41. Mínimo: $(0, 2)$
Máximo: $(3, 36)$

43. Mínimo: $(4, 1)$

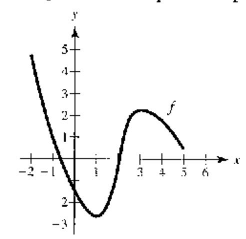
45. Mínimos: $\left(\dfrac{-\sqrt{3} + 1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$
Máximo: $(3, 31)$

47. *a*) (1, 4.7); (0.4398, −1.0613)
b) Mínimo: $(0.4398, -1.0613)$

49. Máximo: $\left|f''\left(\sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}\right)\right| = f''\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 1.47$

51. Máximo: $\left|f^{(4)}(0)\right| = \frac{56}{81}$

53. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:



55. *a)* Sí *b)* No **57.** *a)* No *b)* Sí

59. Máximo: $P(12) = 72$ No. P es decreciente para $I \geq 12$.

61. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v^2 \cos 2\theta}{16}\dfrac{d\theta}{dt}$

En el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$, $\theta = \pi/4, 3\pi/4$ señala los mínimos de dx/dt y $\theta = \pi/2$ señala un máximo de dx/dt. Esto implica que el aspersor irriga más lejos cuando $\theta = \pi/4$ y $3\pi/4$. Por lo tanto, el césped más alejado del aspersor recibe más agua.

63. Verdadero **65.** Verdadero **67.** Demostración

69. *a)* $y = (3/40\,000)x^2 - (3/200)x + 75/4$

b)

x	−500	−400	−300	−200	−100	0
d	0	0.75	3	6.75	12	18.75

x	100	200	300	400	500
d	12	6.75	3	0.75	0

c) Punto más bajo $\approx (100, 18)$; No

Sección 3.2 (página 176)

1. $f(0) = f(2) = 0$; f no es derivable en $(0, 2)$.

3. $f(-1) = f(1) = 1$; f no es continua en $(-1, 1)$.

5. $(2, 0), (-1, 0); f'(\frac{1}{2}) = 0$ **7.** $(0, 0), (-4, 0); f'(-\frac{8}{3}) = 0$

9. $f'(-\frac{3}{2}) = 0$ **11.** $f'(1) = 0$

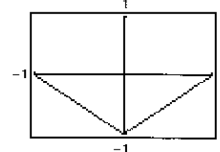
13. $f'\left(\dfrac{6 - \sqrt{3}}{3}\right) = 0;\ f'\left(\dfrac{6 + \sqrt{3}}{3}\right) = 0$

15. No es derivable en $x = 0$ **17.** $f'(-2 + \sqrt{5}) = 0$

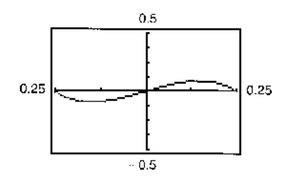
19. $f'(\pi/2) = 0;\ f'(3\pi/2) = 0$ **21.** $f'(0.249) \approx 0$

23. No es continua en $[0, \pi]$

25.



27.

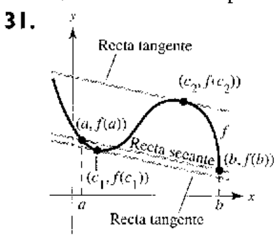


No es aplicable el teorema de Rolle. $f'(\pm 0.1533) = 0$

29. *a)* $f(1) = f(2) = 64$

b) Velocidad = 0 para alguna t en $(1, 2)$; $t = \frac{3}{2}$ seg

31.



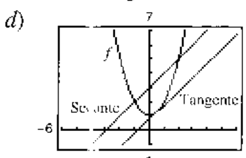
33. La función no es continua en $[0, 6]$.

35. La función no es continua en $[0, 6]$.

37. *a)* Recta secante: $x - y + 3 = 0$ *b)* $c = \frac{1}{2}$

c) Recta tangente: $4x - 4y + 3 = 0$

d)



39. $f'(-1/2) = -1$ **41.** $f'(8/27) = 1$

43. $f'(-1/4) = -1/3$ **45.** $f'(\pi/2) = 0$

47. *a)–c)* *b)* $y = \frac{2}{3}(x - 1)$

c) $y = \frac{1}{3}(2x + 5 - 2\sqrt{6})$

49. *a)–c)* *b)* $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

c) $y = \frac{1}{4}x + 1$

51. *a)* -14.7 m/sec *b)* 1.5 seg

53. No. Sea $f(x) = x^2$ en $[-1, 2]$.

55. No. $f(x)$ no es continua en $[0, 1]$. Por tanto, no satisface la hipótesis del teorema de Rolle.

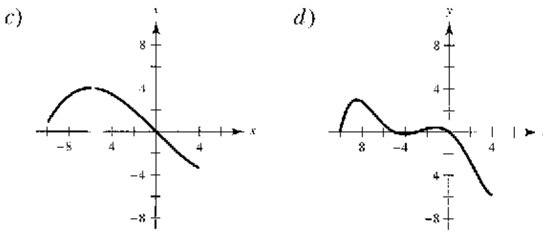
57. De acuerdo con el teorema del valor medio, existe un momento en el que la velocidad del aeroplano debe ser igual a la velocidad promedio que es 454.5 mph. La velocidad era de 400 m/h cuando el aeroplano aceleró a 454.5 m/h y se desaceleró desde esa velocidad.

59. Demostración

61. *a)* f es continua y cambia de signo en $[-10, 4]$ (Teorema del valor intermedio).

b) Existen los números reales a y b tales que $-10 < a < b < 4$ y $f(a) = f(b) = 2$. Por tanto, mediante el teorema de Rolle, f' tiene un cero en el intervalo.

c) *d)*



e) No, por el teorema 2.1.

63.

65. Demostración

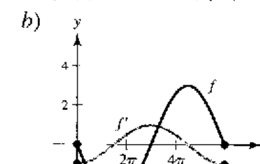
67. $a = 6, b = 1, c = 2$ **69.** $f(x) = 5$ **71.** $f(x) = x^2 - 1$
73. Falso. f no es continua en $[-1, 1]$. **75.** Verdadero
77 a 85. Demostraciones

Sección 3.3 (página 186)

1. *a)* $(0, 6)$ *b)* $(6, 8)$
3. Creciente en $(3, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 3)$
5. Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(-2, 2)$
7. Creciente en $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$; decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$
9. Creciente en $(-\infty, 0)$; decreciente en $(0, \infty)$
11. Creciente en $(1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 1)$
13. Creciente en $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$; decreciente en $\left(-4, -2\sqrt{2}\right), \left(2\sqrt{2}, 4\right)$
15. Creciente en $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$; decreciente en $(7\pi/6, 11\pi/6)$
17. *a)* Número o punto crítico: $x = 3$
b) Creciente en $(3, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 3)$
c) Mínimo relativo: $(3, -9)$
19. *a)* Número o punto crítico: $x = 1$
b) Creciente en $(-\infty, 1)$; decreciente en $(1, \infty)$
c) Máximo relativo: $(1, 5)$
21. *a)* Números o puntos críticos: $x = -2, 1$
b) Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-2, 1)$
c) Máximo relativo: $(-2, 20)$; mínimo relativo: $(1, -7)$
23. *a)* Número o punto crítico: $x = 0, 2$
b) Creciente en $(0, 2)$; decreciente en $(-\infty, 0), (2, \infty)$
c) Máximo relativo: $(2, 4)$; mínimo relativo: $(0, 0)$
25. *a)* Números o puntos críticos: $x = \pm 1$
b) Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 1)$
c) Máximo relativo: $\left(-1, \frac{4}{5}\right)$; mínimo relativo: $\left(1, -\frac{4}{5}\right)$
27. *a)* Número o punto crítico: $x = 0$
b) Creciente en $(-\infty, \infty)$
c) No hay extremos relativos
29. *a)* Número o punto crítico: $x = 1$
b) Creciente en $(1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 1)$
c) Mínimo relativo: $(1, 0)$
31. *a)* Número o punto crítico: $x = 5$
b) Creciente en $(-\infty, 5)$; decreciente en $(5, \infty)$
c) Máximo relativo: $(5, 5)$
33. *a)* Números o puntos críticos: $x = \pm 1$; discontinuidad: $x = 0$
b) Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$
c) Máximo relativo: $(-1, -2)$; mínimo relativo: $(1, 2)$
35. *a)* Número o punto crítico: $x = 0$; discontinuidades: $x = \pm 3$
b) Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0)$
Decreciente en $(0, 3)$ y $(3, \infty)$
c) Máximo relativo: $(0, 0)$
37. *a)* Números o puntos críticos: $x = -3, 1$; discontinuidad: $x = -1$
b) Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-3, -1)$ y $(-1, 1)$
c) Máximo relativo: $(-3, -8)$; mínimo relativo: $(1, 0)$
39. *a)* Números o puntos críticos: $x = \pi/6, 5\pi/6$
Creciente en $(0, \pi/6), (5\pi/6, 2\pi)$
Decreciente en $(\pi/6, 5\pi/6)$
b) Máximo relativo: $\left(\pi/6, \left(\pi + 6\sqrt{3}\right)/12\right)$
Mínimo relativo: $\left(5\pi/6, \left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)/12\right)$
41. *a)* Números o puntos críticos: $x = \pi/4, 5\pi/4$
Creciente en $(0, \pi/4), (5\pi/4, 2\pi)$
Decreciente en $(\pi/4, 5\pi/4)$
b) Máximo relativo: $\left(\pi/4, \sqrt{2}\right)$
Mínimo relativo: $\left(5\pi/4, -\sqrt{2}\right)$
43. *a)* Números o puntos críticos:
$x = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$
Creciente en $(\pi/4, \pi/2), (3\pi/4, \pi), (5\pi/4, 3\pi/2), (7\pi/4, 2\pi)$
Decreciente en $(0, \pi/4), (\pi/2, 3\pi/4), (\pi, 5\pi/4), (3\pi/2, 7\pi/4)$
b) Máximos relativos: $(\pi/2, 1), (\pi, 1), (3\pi/2, 1)$
Mínimos relativos: $(\pi/4, 0), (3\pi/4, 0), (5\pi/4, 0), (7\pi/4, 0)$
45. *a)* Números o puntos críticos: $\pi/2, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$
Creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$
Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$
b) Máximos relativos: $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
Mínimos relativos: $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$
47. *a)* $f'(x) = 2(9 - 2x^2)/\sqrt{9 - x^2}$
b)
c) Números o puntos críticos: $x = \pm 3\sqrt{2}/2$
d) $f' > 0$ en $\left(-3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2\right)$
$f' < 0$ en $\left(-3, -3\sqrt{2}/2\right), \left(3\sqrt{2}/2, 3\right)$
49. *a)* $f'(t) = t(t \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$
b)
c) Números o puntos críticos: $t = 2.2889, 5.0870$
d) $f' > 0$ en $(0, 2.2889), (5.0870, 2\pi)$
$f' < 0$ en $(2.2889, 5.0870)$

51. *a)* $f'(x) = -\cos(x/3)$

b)

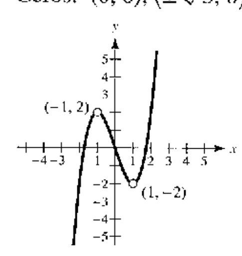


c) Números o puntos críticos: $x = 3\pi/2, 9\pi/2$

d) $f' > 0$ en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{9\pi}{2}\right)$

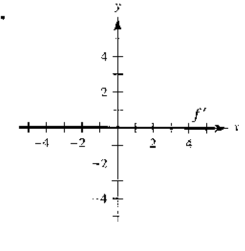
$f' < 0$ en $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right), \left(\dfrac{9\pi}{2}, 6\pi\right)$

53. $f(x)$ es simétrica con respecto al origen.
Ceros: $(0, 0), (\pm\sqrt{3}, 0)$

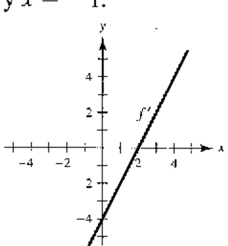


$g(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x)$ tiene huecos en $x = 1$ y $x = -1$.

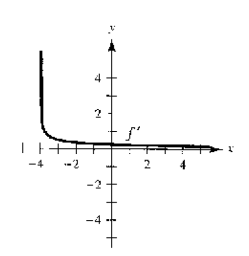
55.



57.



59.

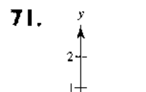


61. *a)* Creciente en $(2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 2)$
b) Mínimo relativo: $x = 2$

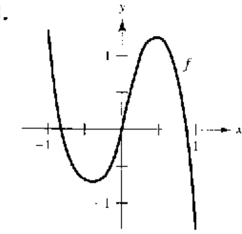
63. *a)* Creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(0, 1)$
b) Máximo relativo: $x = 0$; mínimo relativo: $x = 1$

65. $g'(0) < 0$ **67.** $g'(-6) < 0$ **69.** $g'(0) > 0$

71.



73.



Mínimo relativo en el número o punto crítico aproximado $x = -0.40$; Máximo relativo en el número o punto crítico aproximado $x = 0.48$

75. *a)* $s'(t) = 9.8(\operatorname{sen}\theta)t$; velocidad $= |9.8(\operatorname{sen}\theta)t|$

b)

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
$s'(t)$	0	$4.9\sqrt{2}t$	$4.9\sqrt{3}t$	$9.8t$	$4.9\sqrt{3}t$	$4.9\sqrt{2}t$	0

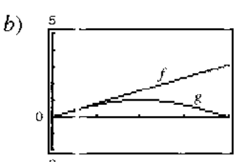
La velocidad es máxima en $\theta = \pi/2$.

77. *a)*

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$g(x)$	0.48	0.84	1.00	0.91	0.60	0.14

$f(x) > g(x)$

b)



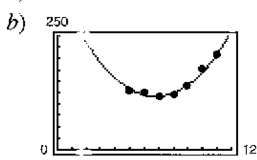
c) Demostración

$f(x) > g(x)$

79. $r = 2R/3$ **81.** Máximo cuando $R_2 = R_1$

83. *a)* $M = 5.267t^2 - 71.19t + 356.9$

b)



c) $(6.8, 116.3)$

85. *a)* $v(t) = 6 - 2t$ *b)* $[0, 3)$ *c)* $(3, \infty)$ *d)* $t = 3$

87. *a)* $v(t) = 3t^2 - 10t + 4$
b) $[0, (5 - \sqrt{13})/3)$ y $((5 + \sqrt{13})/3, \infty)$
c) $\left(\dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}, \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}\right)$ *d)* $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$

89. Hay varias respuestas posibles.

91. *a)* 3
b) $a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 0$
$a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 2$
$3a_3(0)^2 + 2a_2(0) + a_1 = 0$
$3a_3(2)^2 + 2a_2(2) + a_1 = 0$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

93. *a)* 4
b) $a_4(0)^4 + a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 0$
$a_4(2)^4 + a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 4$
$a_4(4)^4 + a_3(4)^3 + a_2(4)^2 + a_1(4) + a_0 = 0$
$4a_4(0)^3 + 3a_3(0)^2 + 2a_2(0) + a_1 = 0$
$4a_4(2)^3 + 3a_3(2)^2 + 2a_2(2) + a_1 = 0$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$

95. Verdadero **97.** Falso. Sea $f(x) = x^3$.

99. Falso. Sea $f(x) = x^3$. Hay un número o punto crítico en $x = 0$, pero no un extremo relativo.

101 a 105. Demostraciones

Sección 3.4 (página 195)

1. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, \infty)$

3. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2), (2, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-2, 2)$

5. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1), (1, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$

7. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1)$; cóncava hacia abajo: $(1, \infty)$

9. Cóncava hacia arriba: $(-\pi/2, 0)$; cóncava hacia abajo: $(0, \pi/2)$

11. Punto de inflexión: $(2, 8)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 2)$; cóncava hacia arriba: $(2, \infty)$

13. Punto de inflexión: $\left(\pm 2\sqrt{3}/3, -20/9\right)$
Cóncava hacia arriba: $\left(-\infty, -2\sqrt{3}/3\right), \left(2\sqrt{3}/3, \infty\right)$
Cóncava hacia abajo: $\left(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3\right)$

15. Puntos de inflexión: $(2, -16), (4, 0)$;
Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 2), (4, \infty)$;
Cóncava hacia abajo: $(2, 4)$

17. Cóncava hacia arriba: $(-3, \infty)$

19. Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4\right), (0, 0), \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4\right)$
Cóncava hacia arriba: $\left(-\sqrt{3}, 0\right), \left(\sqrt{3}, \infty\right)$
Cóncava hacia abajo: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right), \left(0, \sqrt{3}\right)$

21. Punto de inflexión: $(2\pi, 0)$
Cóncava hacia arriba: $(2\pi, 4\pi)$; cóncava hacia abajo: $(0, 2\pi)$

23. Cóncava hacia arriba: $(0, \pi), (2\pi, 3\pi)$
Cóncava hacia abajo: $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi)$

25. Puntos de inflexión: $(\pi, 0), (1.823, 1.452), (4.46, -1.452)$
Cóncava hacia arriba: $(1.823, \pi), (4.46, 2\pi)$
Cóncava hacia abajo: $(0, 1.823), (\pi, 4.46)$

27. Mínimo relativo: $(3, -25)$ **29.** Mínimo relativo: $(5, 0)$

31. Máximo relativo: $(0, 3)$; mínimo relativo: $(2, -1)$

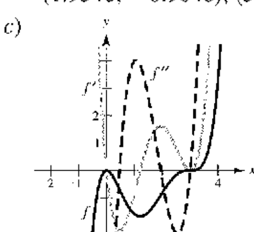
33. Máximo relativo: $(2.4, 268.74)$; mínimo relativo: $(0, 0)$

35. Mínimo relativo: $(0, -3)$

37. Máximo relativo: $(-2, -4)$; mínimo relativo: $(2, 4)$

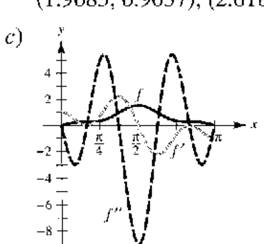
39. No hay extremos relativos, porque f no es creciente.

41. *a*) $f'(x) = 0.2x(x-3)^2(5x-6)$
$f''(x) = 0.4(x-3)(10x^2 - 24x + 9)$
b) Máximo relativo: $(0, 0)$
Mínimo relativo: $(1.2, -1.6796)$
Puntos de inflexión: $(0.4652, -0.7048)$, $(1.9348, -0.9048)$, $(3, 0)$
c)



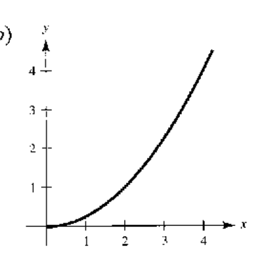
f es creciente cuando f' es positiva, y decreciente cuando f' es negativa. f es cóncava hacia arriba cuando f'' es positiva, y cóncava hacia abajo cuando f'' es negativa.

43. *a*) $f'(x) = \cos x - \cos 3x + \cos 5x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 3x - 5 \operatorname{sen} 5x$
b) Máximo relativo: $(\pi/2, 1.53333)$
Puntos de inflexión:
$(0.5236, 0.2667), (1.1731, 0.9637)$,
$(1.9685, 0.9637), (2.6180, 0.2667)$
c)

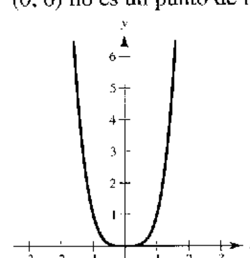


f es creciente cuando f' es positiva, y decreciente cuando f' es negativa. f es cóncava hacia arriba cuando f'' es positiva, y cóncava hacia abajo cuando f'' es negativa.

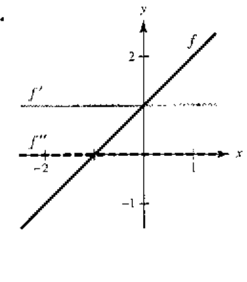
45. *a*) *b*)



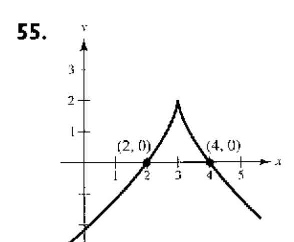
47. Hay varias respuestas posibles.
Ejemplo: $f(x) = x^4$; $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión.



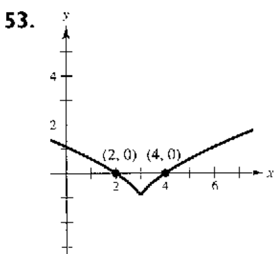
49.



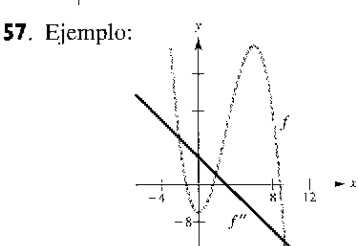
51.



53.

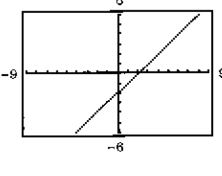
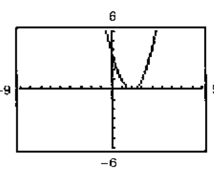
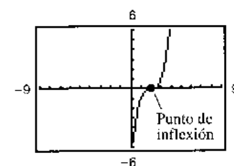


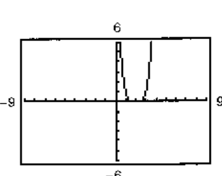
55.



57. Ejemplo:

59. *a*) $f(x) = (x-2)^n$ tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$ si n es impar y $n \geq 3$.



b) Demostración

61. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{45}{2}x - 24$

63. *a*) $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2$ *b*) A dos millas del aterrizaje

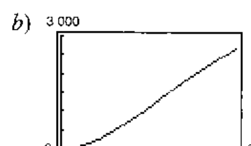
65. $x = \left(\dfrac{15 - \sqrt{33}}{16}\right)L \approx 0.578L$ **67.** $x = 100$ unidades

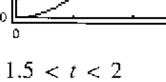
69. *a)*

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
S	151.5	555.6	1 097.6	1 666.7	2 193.0	2 647.1

$t \approx 1.6$

b)



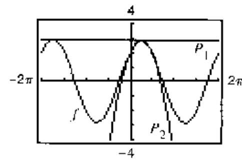


c) ≈ 1.633 años

$1.5 < t < 2$

71. $P_1(x) = 2\sqrt{2}$

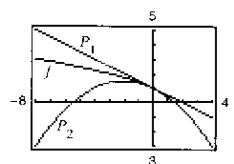
$P_2(x) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}(x - \pi/4)^2$



Cuando $x = \pi/4$, los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas son iguales. Las aproximaciónes se deterioran a medida que se aleja de $x = \pi/4$.

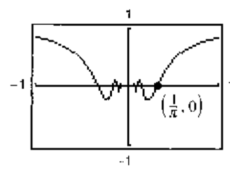
73. $P_1(x) = 1 - x/2$

$P_2(x) = 1 - x/2 - x^2/8$



Cuando $x = 0$, los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas son iguales. Las aproximaciones empeoran a medida que uno se aleja de $x = 0$.

75.



77. Demostración **79.** Verdadero

81. Falso. Si $f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba en $x = c$

83. Demostración

Sección 3.5 (página 205)

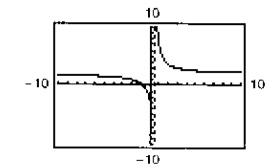
1. Amedida que x aumenta, $f(x)$ tiende a 4.

3. f **4.** c **5.** d **6.** a **7.** b **8.** c

9.

x	10^0	10^1	10^2	10^3
$f(x)$	7	2.2632	2.0251	2.0025

x	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	2.0003	2.0000	2.0000

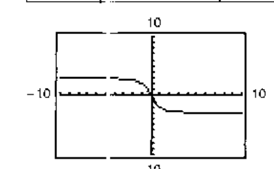


$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = 2$$

11.

x	10^0	10^1	10^2	10^3
$f(x)$	-2	-2.9814	-2.9998	-3.0000

x	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	-3.0000	-3.0000	-3.0000

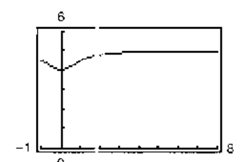


$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}} = -3$$

13.

x	10^0	10^1	10^2	10^3
$f(x)$	4.5000	4.9901	4.9999	5.0000

x	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	5.0000	5.0000	5.0000



$$\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 5$$

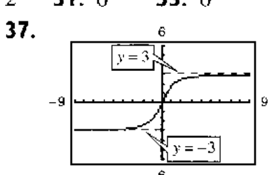
15. *a)* ∞ *b)* 5 *c)* 0 **17.** *a)* 0 *b)* 1 *c)* ∞

19. *a)* 0 *b)* $-\frac{2}{3}$ *c)* $-\infty$ **21.** $\frac{2}{3}$ **23.** 0

25. $-\infty$ **27.** -1 **29.** -2 **31.** 0 **33.** 0

35.

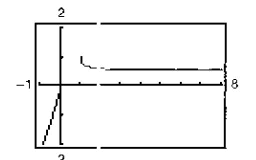
37.



39. 1 **41.** 0 **43.** $-\frac{1}{2}$ **45.** $\frac{1}{8}$

47.

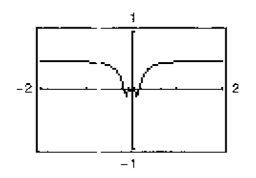
x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	1.000	0.513	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500



$$\lim_{x\to\infty} \left[x - \sqrt{x(x-1)}\right] = \frac{1}{2}$$

49.

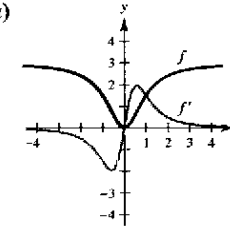
x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	0.479	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500



La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

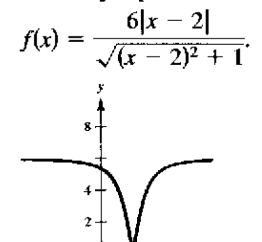
51. *a)*



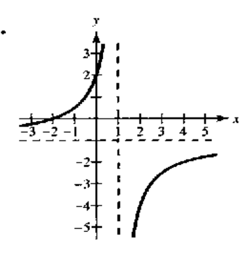
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3,\ \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

c) $y = 3$ es una asíntota horizontal. El ritmo o velocidad de crecimiento de la función tiende a 0 a medida que la gráfica tiende a $y = 3$.

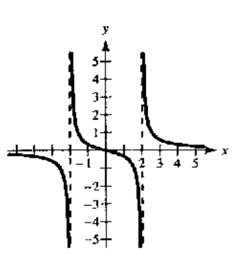
53. Sí. Por ejemplo, sea $f(x) = \dfrac{6|x-2|}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$.



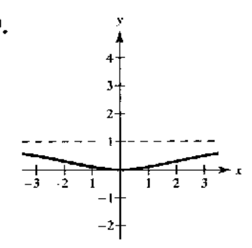
55.



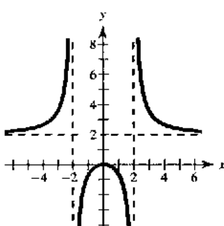
57.



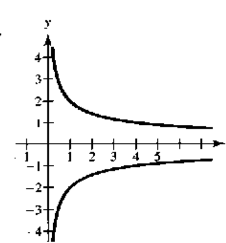
59.



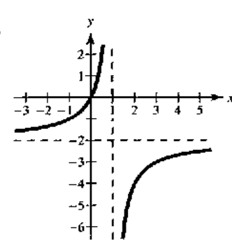
61.



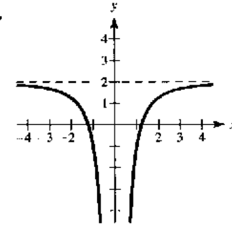
63.



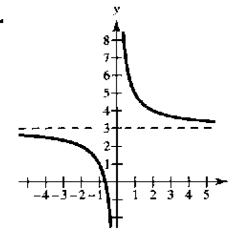
65.



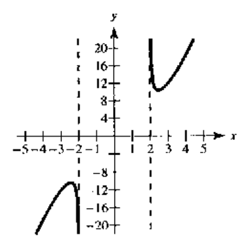
67.



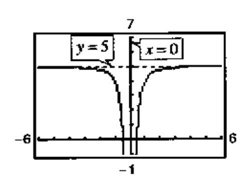
69.



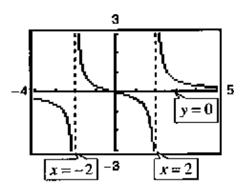
71.



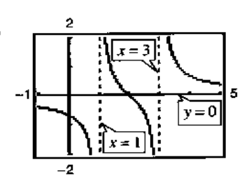
73.



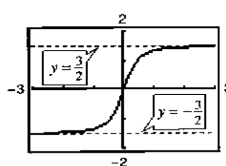
75.



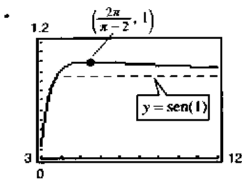
77.



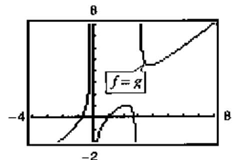
79.



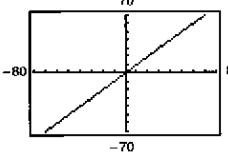
81.



83. *a)*



c)

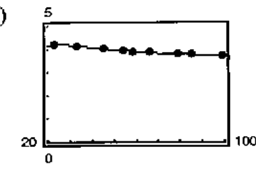


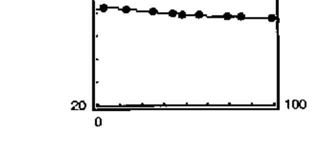
b) Demostración

La asíntota oblicua $y = x$

85. $\frac{1}{2}$ **87.** $\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty;\ \lim_{t\to\infty} E(t) = c$

89. *a)*

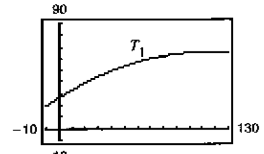




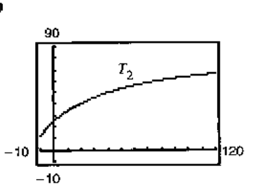
b) Sí. $\lim_{t\to\infty} y = 3.351$

91. *a)* $T_1 = -0.003t^2 + 0.68t + 26.6$

b)



c)



d) $T_1(0) \approx 26.6°,\ T_2(0) \approx 25.0°$ *e)* 86

f) La temperatura limitante es 86°.
No. T_1 no tiene una asíntota horizontal.

93. *a)* $d(m) = \dfrac{|3m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

b)

c) $\lim_{m\to\infty} d(m) = 3$

$\lim_{m\to-\infty} d(m) = 3$

Cuando m tiende a $\pm\infty$, la distancia tiende a 3.

95. *a)* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ *b)* $x_1 = \sqrt{\dfrac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}},\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}}$

c) $\sqrt{\dfrac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}}$ *d)* $-\sqrt{\dfrac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}}$

97. *a*) Hay varias respuestas posibles. $M = \dfrac{5\sqrt{33}}{11}$

b) Hay varias respuestas posibles. $M = \dfrac{29\sqrt{177}}{59}$

99 a 103. Demostraciones

105. Falso. Sea $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. $f'(x) > 0$ para todos los números reales.

Sección 3.6 (página 215)

1. d **2.** c **3.** a **4.** b

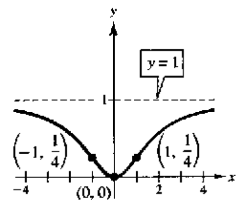
5. *a*) $f'(x) = 0$ en $x = \pm 2$; $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2), (2, \infty)$
$f'(x) < 0$ en $(-2, 2)$

b) $f''(x) = 0$ en $x = 0$; $f''(x) > 0$ en $(0, \infty)$
$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$

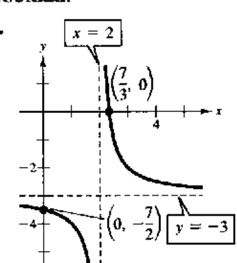
c) $(0, \infty)$

d) f' es mínima en $x = 0$.
f decrece con mayor velocidad.

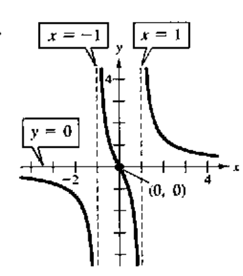
7.



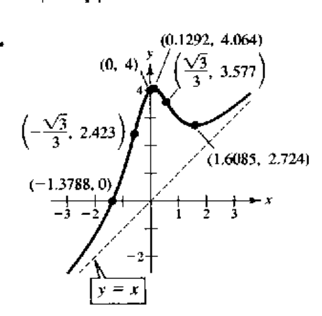
9.



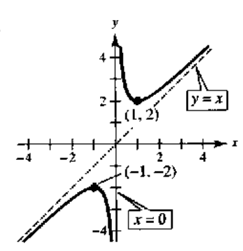
11.



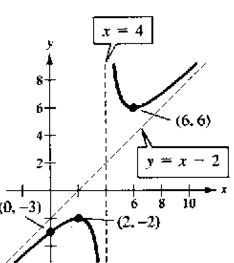
13.



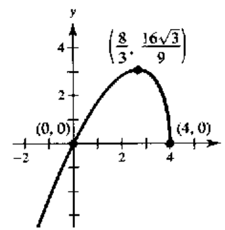
15.



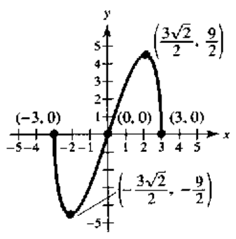
17.

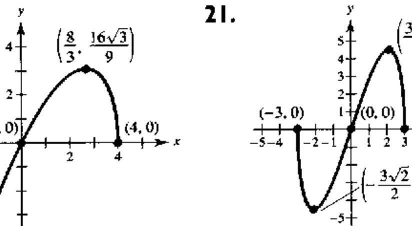


19.

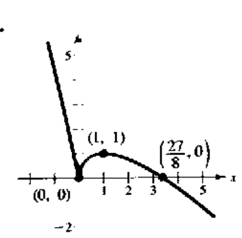


21.

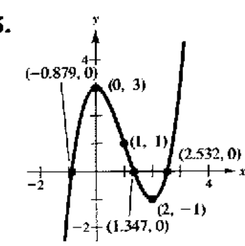




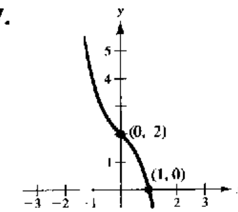
23.



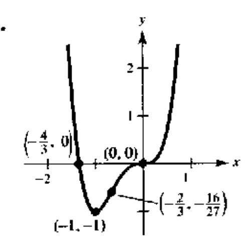
25.



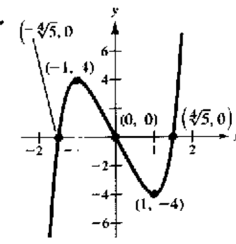
27.



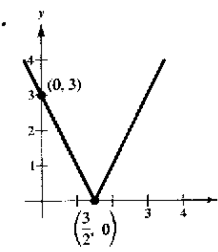
29.



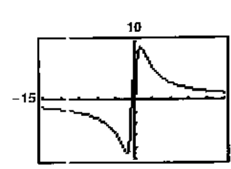
31.

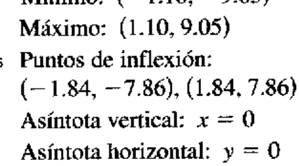


33.



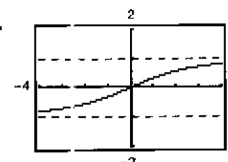
35.

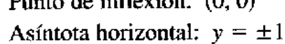




Mínimo: $(-1.10, -9.05)$
Máximo: $(1.10, 9.05)$
Puntos de inflexión:
$(-1.84, -7.86), (1.84, 7.86)$
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 0$

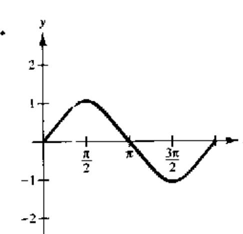
37.



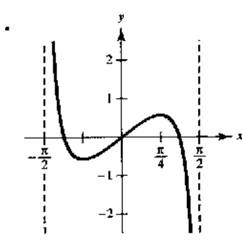


Punto de inflexión: $(0, 0)$
Asíntota horizontal: $y = \pm 1$

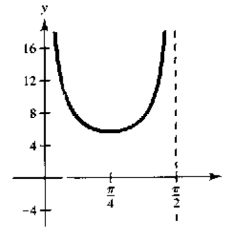
39.



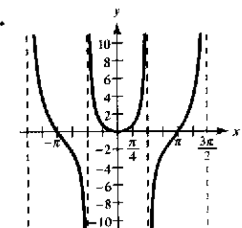
41.

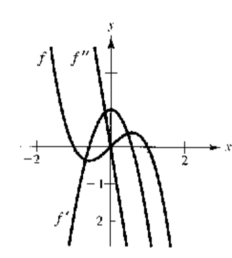


43.

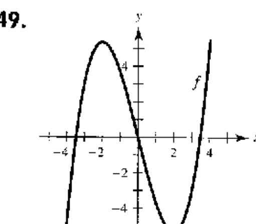


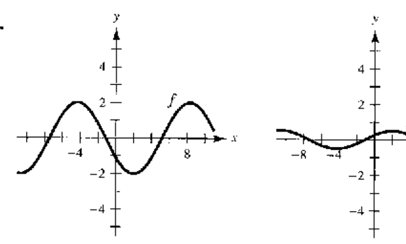
45.



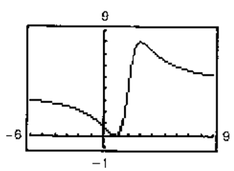
47. 

Los ceros de f' corresponden a los puntos en los que la gráfica de f tiene tangentes horizontales. El cero de f'' corresponde al punto donde la gráfica de f' tiene una tangente horizontal.

49. 

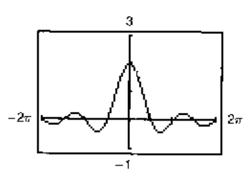
51. 

53. f es decreciente en (2, 8) y por tanto $f(3) > f(5)$.

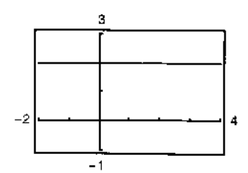
55. 

La gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 4$.

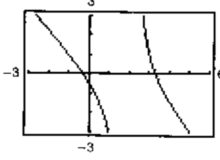
La gráfica de una función f no cruza su asíntota vertical $x = c$ porque no existe $f(c)$.

57. 

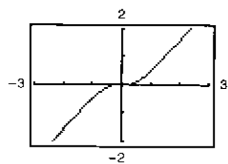
La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.
La gráfica atraviesa la asíntota horizontal $y = 0$.
La gráfica de una función f no cruza su asíntota vertical $x = c$ porque no existe $f(c)$.

59. 

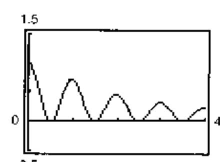
La gráfica tiene un hueco en $x = 3$. La función racional no se redujo a su mínima expresión.

61. 

La gráfica parece aproximarse a la recta $y = -x + 1$, que es la asíntota oblicua.

63. 

La gráfica parece aproximarse a la recta $y = x$, que es la asíntota oblicua.

65. *a)* 

La gráfica tiene huecos en $x = 0$ y en $x = 4$.
Números críticos por aproximación visual: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$

b) $f'(x) = \dfrac{-x\cos^2(\pi x)}{(x^2+1)^{3/2}} - \dfrac{2\pi \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x)}{\sqrt{x^2+1}}$

Números o puntos críticos aproximados: $\frac{1}{2}$, 0.97, $\frac{3}{2}$, 1.98, $\frac{5}{2}$, 2.98, $\frac{7}{2}$. En el apartado *a)* donde se presentan los números o puntos críticos los máximos parecen ser enteros, pero al aproximarlos utilizando f' se observa que no son números enteros.

67. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $y = 1/(x - 5)$

69. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:
$y = (3x^2 - 13x - 9)/(x - 5)$

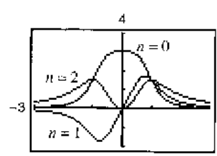
71. *a)* Ritmo o velocidad de cambio de f varía a medida que a varía. Si se modifica el signo de a, la gráfica se refleja en el eje x.

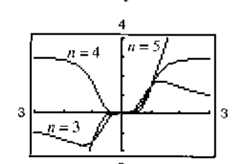
b) Cambian la ubicación de la asíntota vertical y del mínimo (si $a > 0$) o del máximo (si $a < 0$).

73. *a)* Si n es par, f es simétrica respecto al eje y.
Si n es impar, f es simétrica respecto al origen.

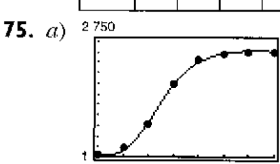
b) $n = 0, 1, 2, 3$ *c)* $n = 4$

d) Cuando $n = 5$, la asíntota oblicua es $y = 3x$.

e) 



n	0	1	2	3	4	5
M	1	2	3	2	1	0
N	2	3	4	5	2	3

75. *a)* 

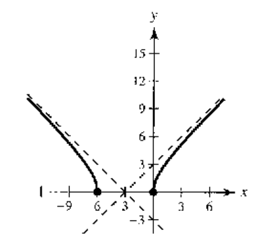
b) 2 434

c) El número de bacterias alcanza su máximo al principio del séptimo día.

d) La tasa de incremento del número de bacterias es mayor aproximadamente en la primera parte del tercer día.

e) 13,250/7

77. $y = x + 3, y = -x - 3$

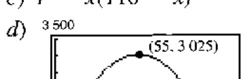
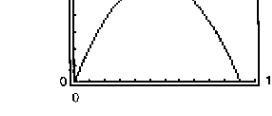


Sección 3.7 (página 223)

1. *a*) y *b*)

Primer número x	*Segundo número*	*Producto P*
10	110 − 10	10(110 − 10) = 1 000
20	110 − 20	20(110 − 20) = 1 800
30	110 − 30	30(110 − 30) = 2 400
40	110 − 40	40(110 − 40) = 2 800
50	110 − 50	50(110 − 50) = 3 000
60	110 − 60	60(110 − 60) = 3 000
70	110 − 70	70(110 − 70) = 2 800
80	110 − 80	80(110 − 80) = 2 400
90	110 − 90	90(110 − 90) = 1 800
100	110 − 100	100(110 − 100) = 1 000

c) $P = x(110 - x)$

d)



e) 55 y 55

3. $S/2$ y $S/2$ **5.** 24 y 8 **7.** 50 y 25

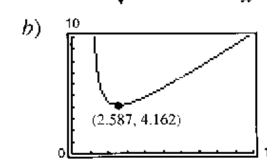
9. $l = w = 25$ m **11.** $l = w = 8$ pies **13.** $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

15. (1, 1) **17.** $x = Q_0/2$ **19.** 600 × 300 m

21. *a*) Demostración *b*) $V_1 = 99$ pulg^3, $V_2 = 125$ pulg^3, $V_3 = 117$ pulg^3 *c*) 5 × 5 × 5 pulg.

23. Porción rectangular: $16/(\pi + 4) \times 32/(\pi + 4)$ pies

25. *a*) $L = \sqrt{x^2 + 4 + \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}}, \quad x > 1$

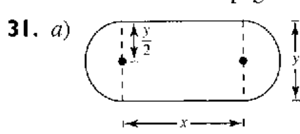
b)


Mínimo cuando $x \approx 2.587$

c) (0, 0), (2, 0), (0, 4)

27. Ancho: $5\sqrt{2}/2$; Largo: $5\sqrt{2}$

29. Dimensiones de la página: $(2 + \sqrt{30})$ pulg × $(2 + \sqrt{30})$ pulg

31. *a*)


b)

Largo x	**Ancho y**	**Área xy**
10	$2/\pi(100 - 10)$	$(10)(2/\pi)(100 - 10) \approx 573$
20	$2/\pi(100 - 20)$	$(20)(2/\pi)(100 - 20) \approx 1\,019$
30	$2/\pi(100 - 30)$	$(30)(2/\pi)(100 - 30) \approx 1\,337$
40	$2/\pi(100 - 40)$	$(40)(2/\pi)(100 - 40) \approx 1\,528$
50	$2/\pi(100 - 50)$	$(50)(2/\pi)(100 - 50) \approx 1\,592$
60	$2/\pi(100 - 60)$	$(60)(2/\pi)(100 - 60) \approx 1\,528$

El área máxima del rectángulo es aproximadamente 1 592 m^2.

c) $A = 2/\pi(100x - x^2)$. $0 < x < 100$

d) $\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{2}{\pi}(100 - 2x)$
$= 0$ cuando $x = 50$
El valor máximo es de aproximadamente 1 592 cuando $x = 50$.

e) 2 000 (50, 1 591.6) 0 0 100

33. 18 × 18 × 36 pulg **35.** $32\pi r^3/81$

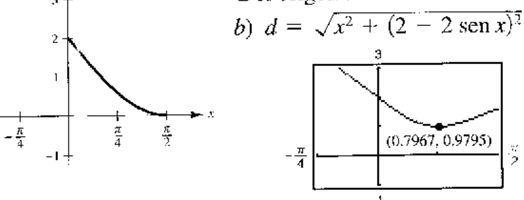
37. Hay varias respuestas posibles. Si el área se expresa como función del largo o del ancho, el dominio factible es el intervalo (0, 10). No hay dimensiones que produzcan el área mínima, porque la segunda derivada de este intervalo abierto siempre es negativa.

39. $r = \sqrt[3]{9/\pi} \approx 1.42$ cm

41. Lado del cuadrado: $\dfrac{10\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}$; lado del triángulo: $\dfrac{30}{9 + 4\sqrt{3}}$

43. $w = 8\sqrt{3}$ pulg, $h = 8\sqrt{6}$ pulg **45.** $\theta = \pi/4$ **47.** $h = \sqrt{2}$ pies

49. A una mi la del punto más cercano de la costa **51.** Demostración

53.


a) Del origen a la intersección en y: 2
Del origen a la intersección en x: $\pi/2$

b) $d = \sqrt{x^2 + (2 - 2 \operatorname{sen} x)^2}$

c) La distancia mínima es 0.9795 cuando $x \approx 0.7967$.

55. $F = kW/\sqrt{k^2 + 1}$; $\theta = \arctan k$

57. *a*)

Base 1	**Base 2**	**Altura**	**Área**
8	8 + 16 cos 10°	8 sen 10°	≈ 22.1
8	8 + 16 cos 20°	8 sen 20°	≈ 42.5
8	8 + 16 cos 30°	8 sen 30°	≈ 59.7
8	8 + 16 cos 40°	8 sen 40°	≈ 72.7
8	8 + 16 cos 50°	8 sen 50°	≈ 80.5
8	8 + 16 cos 60°	8 sen 60°	≈ 83.1

b)

Base 1	**Base 2**	**Altura**	**Área**
8	8 + 16 cos 10°	8 sen 10°	≈ 22.1
8	8 + 16 cos 20°	8 sen 20°	≈ 42.5
8	8 + 16 cos 30°	8 sen 30°	≈ 59.7
8	8 + 16 cos 40°	8 sen 40°	≈ 72.7
8	8 + 16 cos 50°	8 sen 50°	≈ 80.5
8	8 + 16 cos 60°	8 sen 60°	≈ 83.1
8	8 + 16 cos 70°	8 sen 70°	≈ 80.7
8	8 + 16 cos 80°	8 sen 80°	≈ 74.0
8	8 + 16 cos 90°	8 sen 90°	= 64.0

El área transversal máxima es de aproximadamente 83.1 pies^2

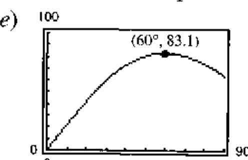
c) $A = 64(1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\theta, 0° < \theta < 90°$

d) $\frac{dA}{d\theta} = 64(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$

$= 0$ cuando $\theta = 60°, 180°, 300°$

El máximo se presenta cuando $\theta = 60°$.

e)



59. 4 045 unidades **61.** $y = \frac{64}{141}x$; $S_1 \approx 6.1$ mi

63. $y = \frac{3}{10}x$; $S_3 \approx 4.50$ mi

65. Problema Putnam A1, 1986

Sección 3.8 (página 233)

1.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1.7000	−0.1100	3.4000	−0.0324	1.7324
2	1.7324	0.0012	3.4648	0.0003	1.7321

3.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	3	0.1411	−0.9900	−0.1425	3.1425
2	3.1425	−0.0009	−1.0000	0.0009	3.1416

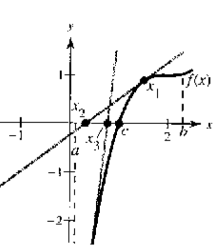
5. 0.682 **7.** 1.146, 7.854 **9.** −1.442

11. 0.900, 1.100, 1.900 **13.** −0.489 **15.** 0.569

17. 4.493 **19.** *a)* Demostración *b)* $\sqrt{5} \approx 2.236$; $\sqrt{7} \approx 2.646$

21. $f'(x_1) = 0$ **23.** $2 = x_1 = x_3 = \ldots; 1 = x_2 = x_4 = \ldots$

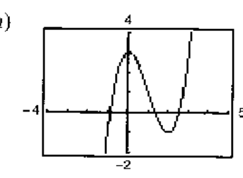
25. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta: Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), donde c pertenece a $[a, b]$ y $f(c) = 0$, el método de Newton utiliza rectas tangentes para aproximar c. Primero se estima una x_1, inicial cercana de c (vea la gráfica.)



Luego se determina x_2 empleando $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$. Se realiza una tercera estimación mediante $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$. Se continúa con este proceso hasta que $|x_n - x_{n+1}|$ tenga la exactitud deseada, siendo x_{n+1}, la aproximación final de c.

27. 0.74

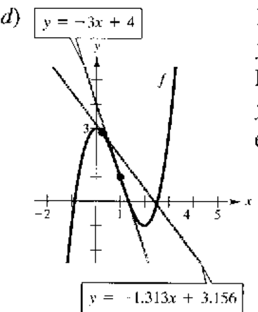
29. *a)*



b) 1.347

c) 2.532

d)

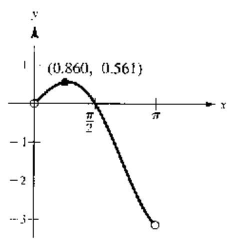


La intersección en x de $y = -3x + 4 \text{ cs } \frac{4}{3}$. La intersección en x de $y = -1.313x + 3.156$ es aproximadamente 2.404.

e) Si la estimación inicial de $x = x_1$ no es lo bastante cercana al cero deseado de una función, la intersección en x de la recta tangente correspondiente a la función puede aproximar un segundo cero de la función.

31. Demostración

33. 0.860 **35.** (1.939, 0.240)



37. $x \approx 1.563$ mi **39.** $384 356 **41.** Falso: sea $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

43. Verdadero **45.** 0.217

Sección 3.9 (página 240)

1. $T(x) = 4x - 4$

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$	3.610	3.960	4	4.040	4.410
$T(x)$	3.600	3.960	4	4.040	4.400

3. $T(x) = 80x - 128$

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$	24.761	31.208	32	32.808	40.841
$T(x)$	24.000	31.200	32	32.800	40.000

5. $T(x) = (\cos 2)(x - 2) + \operatorname{sen} 2$

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$	0.946	0.913	0.909	0.905	0.863
$T(x)$	0.951	0.913	0.909	0.905	0.868

7. $\Delta y = 0.6305$; $dy = 0.6000$ **9.** $\Delta y = -0.039$; $dy = -0.040$

11. $6x\,dx$ **13.** $-\frac{3}{(2x - 1)^2}\,dx$ **15.** $\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

17. $(2 + 2\cot x + 2\cot^3 x)\,dx$ **19.** $-\pi \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x - 1}{2}\right)dx$

21. *a)* 0.9 *b)* 1.04 **23.** *a)* 1.05 *b)* 0.98

25. *a)* 8.035 *b)* 7.95 **27.** $\pm\frac{3}{8}$ pulg² **29.** $\pm 7\pi$ pulg²

31. *a)* $\frac{2}{3}$% *b)* 1.25%

33. *a*) $\pm 2.88\pi \text{ pulg}^3$ *b*) $\pm 0.96\pi \text{ pulg}^2$ *c*) $1\%, \frac{2}{3}\%$

35. $80\pi \text{ cm}^3$ **37.** *a*) $\frac{1}{4}\%$ *b*) 216 seg = 3.6 min

39. *a*) 0.87% *b*) 2.16% **41.** 4 961 pies

43. $f(x) = \sqrt{x}, dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$f(99.4) \approx \sqrt{100} + \dfrac{1}{2\sqrt{100}}(-0.6) = 9.97$

Calculadora: 9.97

45. $f(x) = \sqrt[4]{x}, dy = \dfrac{1}{4x^{3/4}}\,dx$

$f(624) \approx \sqrt[4]{625} + \dfrac{1}{4(625)^{3/4}}(-1) = 4.998$

Calculadora: 4.998

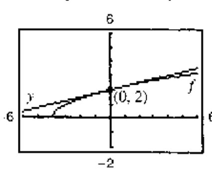
47. $f(x) = \sqrt{x}; dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$f(4.02) \approx \sqrt{4} + \dfrac{1}{2\sqrt{4}}(0.02) = 2 + \dfrac{1}{4}(0.02)$

49. $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 2 = \frac{1}{4}x$

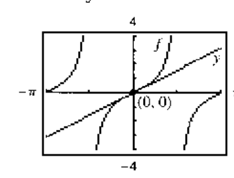
$y = 2 + x/4$



51. $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 0 = 1(x)$

$y = x$

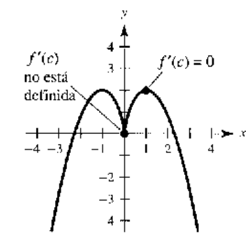


53. El valor de dy se aproxima al valor de Δy a medida que Δx disminuye.

55. Verdadero **57.** Verdadero

Ejercicios de repaso del capítulo 3 (página 242)

1. Sea f definida en c.
Si $f'(c) = 0$ o si f' no está definida en c, entonces c es un número o punto crítico de f.



3. Máximo: $(2\pi, 17.57)$
Mínimo: $(2.73, 0.88)$

5. $f'(\frac{1}{3}) = 0$

7. *a*) *b*) f no es derivable en $x = 4$.

9. $f'\left(\dfrac{2\,744}{729}\right) = \dfrac{3}{7}$ **11.** $f'(0) = 1$ **13.** $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

15. Números o puntos críticos: $x = 1, \frac{7}{3}$
Creciente en $(-\infty, 1), (\frac{7}{3}, \infty)$; Decreciente en $(1, \frac{7}{3})$

17. Número o punto crítico: $x = 1$
Creciente en $(1, \infty)$; Decreciente en $(0, 1)$

19. Mínimo relativo: $(2, -12)$

21. *a*) $y = \frac{1}{4}$ pulg; $v = 4$ pulg/seg *b*) Demostración
c) Periodo: $\pi/6$; frecuencia: $6/\pi$

23. $(\pi/2, \pi/2), (3\pi/2, 3\pi/2)$; cóncava hacia arriba: $(\pi/2, 3\pi/2)$
Cóncava hacia abajo: $(0, \pi/2), (3\pi/2, 2\pi)$

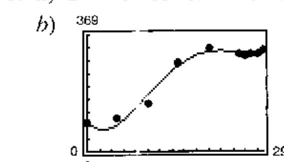
25. Máximos relativos: $(\sqrt{2}/2, 1/2), (-\sqrt{2}/2, 1/2)$
Mínimo relativo: $(0, 0)$

27.

29. Creciente y cóncava hacia abajo

31. *a*) $D = 0.00340t^4 - 0.2352t^3 + 4.942t^2 - 20.86t + 94.4$

b)



c) El máximo se presenta en 1991; el mínimo en 1972.

d) 1979

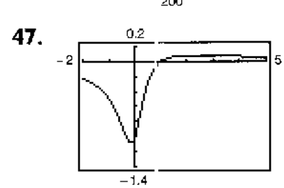
33. $\frac{2}{3}$ **35.** $-\infty$ **37.** 0 **39.** 6

41. Asíntota vertical: $x = 4$; Asíntota horizontal: $y = 2$

43. Asíntota vertical: $x = 0$; Asíntota horizontal: $y = -2$

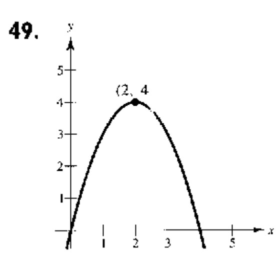
45. Asíntota vertical: $x = 0$
Mínimo relativo: $(3, 108)$
Máximo relativo: $(-3, -108)$

47.



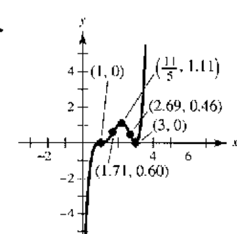
Asíntota horizontal: $y = 0$
Mínimo relativo: $(-0.155, -1.077)$
Máximo relativo: $(2.155, 0.077)$

49.

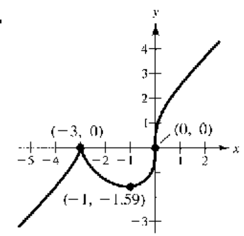


51.

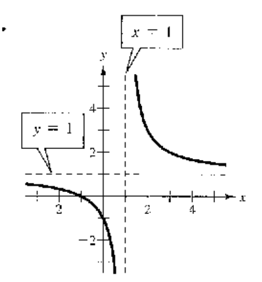
53.



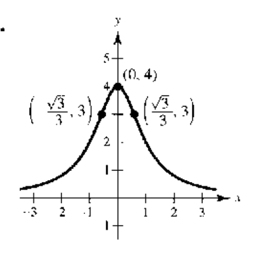
55.



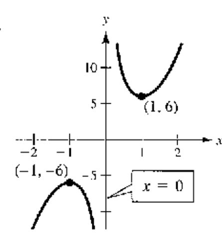
57.



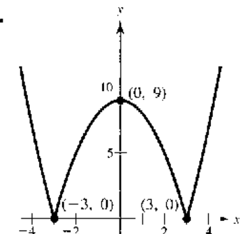
59.



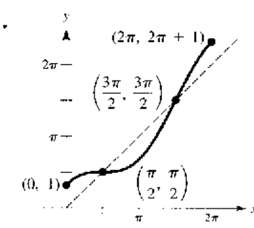
61.



63.



65.



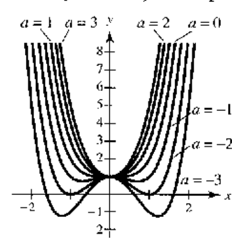
67. *a*) y *b*) Máximo: (1, 3)
Mínimo: (1, 1)

69. $t \approx 4.92 \approx$ 4:55 P.M.; $d \approx 64$ km
71. (0, 0), (5, 0), (0, 10) **73.** Demostración **75.** 14.05 pies
77. $3(3^{2/3} + 2^{2/3})^{3/2} \approx 21.07$ ft **79.** $v \approx 54.77$ m/h
81. $-1.532, -0.347, 1.879$ **83.** $-1.164, 1.453$
85. $dy = (1 - \cos x + x \operatorname{sen} x)\, dx$
87. $dS = \pm 1.8\pi \text{ cm}^2, \dfrac{dS}{S} \times 100 \approx \pm 0.56\%$

$dV = \pm 8.1\pi \text{ cm}^3, \dfrac{dV}{V} \times 100 \approx \pm 0.83\%$

SP Solución de problemas (página 245)

1. Las opciones para a pueden variar.



a) Un mínimo relativo en (0, 1) para $a \geq 0$
b) Un máximo relativo en (0, 1) para $a < 0$
c) Dos mínimos relativos para $a < 0$ cuando $x = \pm\sqrt{-a/2}$
d) Si $a < 0$, existen tres puntos o números críticos; si $a \geq 0$, hay un solo punto crítico.

3. Todas las c, en las que c es un número real
5 a 7. Demostraciones **9.** Aproximadamente 9.19 pies
11. Mínimo: $(\sqrt{2} - 1)d$; No hay máximo.
13. *a*) a *c*). Demostraciones
15. *a*)

x	0	0.5	1	2
$\sqrt{1 + x}$	1	1.2247	1.4142	1.7321
$\frac{1}{2}x + 1$	1	1.25	1.5	2

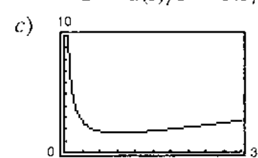
b) Demostraciones
17. *a*)

v	20	40	60	80	100
s	5.56	11.11	16.67	22.22	27.78
d	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

$d(s) = 0.071s^2 + 0.389s + 0.727$

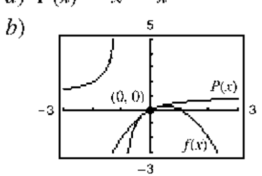
b) La distancia entre la parte posterior del primer vehículo y la parte delantera del segundo es $d(s)$, la distancia de frenado segura. El primer vehículo pasa por el punto dado en $5.5/s$ segundos y el segundo necesita $d(s)/s$ segundos más. Por lo tanto, $T = d(s)/s + 5.5/s$.

c)



$s \approx 9.365$ m/sec

d) $s \approx 9.365$ m/sec; 1.719 sec; 33.714 k/h *e*) 10.597 m
19. *a*) $P(x) = x - x^2$
b)



Capítulo 4

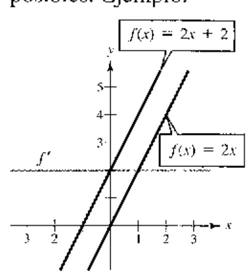
Sección 4.1 (página 255)

1 a 3. Demostraciones **5.** $y = t^3 + C$ **7.** $y = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

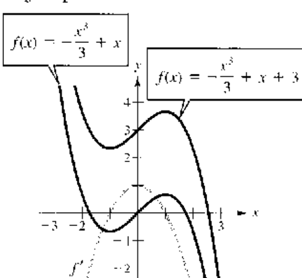
	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\, dx$	$\int x^{1/3}\, dx$	$\dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C$	$\dfrac{3}{4}x^{4/3} + C$
11.	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$	$\int x^{-3/2}\, dx$	$\dfrac{x^{-1/2}}{-1/2} + C$	$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$
13.	$\int \dfrac{1}{2x^3}\, dx$	$\dfrac{1}{2}\int x^{-3}\, dx$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right) + C$	$-\dfrac{1}{4x^2} + C$

15. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + C$ **17.** $x^2 - x^3 + C$ **19.** $\frac{1}{4}x^4 + 2x + C$
21. $\frac{2}{5}x^{5/2} + x^2 + x + C$ **23.** $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$ **25.** $-1/(2x^2) + C$
27. $\frac{2}{15}x^{1/2}(3x^2 + 5x + 15) + C$ **29.** $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$
31. $\frac{2}{7}y^{7/2} + C$ **33.** $x + C$ **35.** $-2\cos x + 3 \operatorname{sen} x + C$
37. $t + \csc t + C$ **39.** $\tan\theta + \cos\theta + C$ **41.** $\tan y + C$

43. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

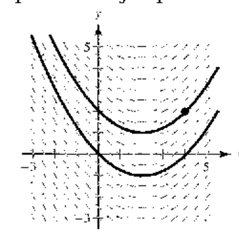


45. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

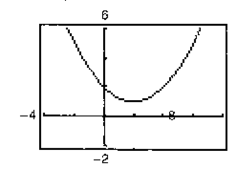


47. $y = x^2 - x + 1$

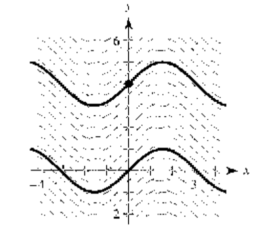
49. *a*) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:



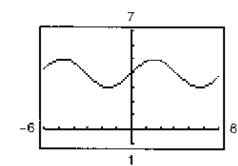
b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$



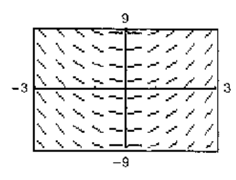
51. *a*) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:



b) $y = \operatorname{sen} x + 4$

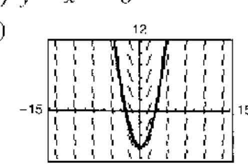


53. *a*)



b) $y = x^2 - 6$

c)



55. $f(x) = 2x^2 + 6$ **57.** $h(t) = 2t^4 + 5t - 11$

59. $f(x) = x^2 + x + 4$ **61.** $f(x) = -4\sqrt{x} + 3x$

63. *a*) $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$ *b*) 69 cm

65. *a*) -1; $f'(4)$ representa la pendiente de f en $x = 4$.

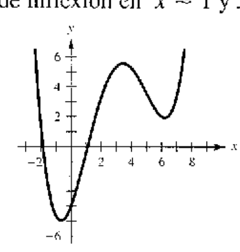
b) No. La pendiente de las rectas tangentes son mayores que 2 en [0, 2]. Por tanto, f debe aumentar en más de cuatro unidades en [0, 2].

c) No. La función es decreciente en [4, 5].

d) 3.5; $f'(3.5) \approx 0$

e) Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1)$, $(5, \infty)$
Cóncava hacia abajo: (1, 5)
Puntos de inflexión en $x \approx 1$ y $x \approx 5$

f) 3 *g*)



67. 62.25 pies **69.** $v_0 \approx 187.617$ pies/sec

71. $v(t) = -9.8t + C_1 = -9.8t + v_0$
$f(t) = -4.9t^2 + v_0t + C_2 = -4.9t^2 + v_0t + s_0$

73. 7.1 m **75.** 320 m; -32 m/sec

77. *a*) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$; $a(t) = 6t - 12$
b) (0, 1), (3, 5) *c*) -3

79. $a(t) = -1/(2t^{3/2})$; $x(t) = 2\sqrt{t} + 2$

81. *a*) 1.18 m/sec^2 *b*) 190 m

83. *a*) 300 pies *b*) 60 pies/sec $\approx$ 41 mph

85. 7.45 pies/sec^2 **87.** Verdadero **89.** Verdadero

91. Falso. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$.

93. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}$

95. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2, & 2 \le x \le 5 \end{cases}$

f no es derivable en $x = 2$ porque las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x = 2$ no coinciden.

97. Problema Putnam B2, 1991

Sección 4.2 (página 267)

1. 35 **3.** $\frac{158}{85}$ **5.** $4c$ **7.** $\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{3i}$ **9.** $\sum_{j=1}^{8} \left[5\left(\frac{j}{8}\right) + 3\right]$

11. $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$ **13.** $\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2\right]$

15. 420 **17.** 2 470 **19.** 12 040 **21.** 2 930

23. El área de la región sombreada cae entre 12.5 y 6.5 unidades^2

25. El área de la reión sombreada cae entre 7 y 11 unidades^2

27. $A \approx S \approx 0.768$
$A \approx s \approx 0.518$

29. $A \approx S \approx 0.746$
$A \approx s \approx 0.646$

31. $\frac{81}{4}$ **33.** 9

35. $(n + 2)/n$
$n = 10$; $S = 1.2$
$n = 100$; $S = 1.02$
$n = 1\,000$; $S = 1.002$
$n = 10\,000$; $S = 1.0002$

37. $[2(n + 1)(n - 1)]/n^2$
$n = 10$; $S = 1.98$
$n = 100$; $S = 1.9998$
$n = 1\,000$; $S = 1.999998$
$n = 10\,000$; $S = 1.99999998$

39. $\lim_{n\to\infty} \left[8\left(\frac{n^2 + n}{n^2}\right)\right] = 8$ **41.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$

43. $\lim_{n\to\infty} [(3n + 1)/n] = 3$

45. *a*)

b) $\Delta x = (2 - 0)/n = 2/n$

c) $s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$
$= \sum_{i=1}^{n} [(i - 1)(2/n)](2/n)$

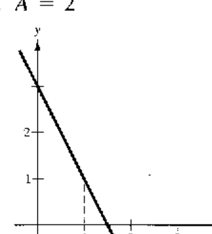
d) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$
$= \sum_{i=1}^{n} [i(2/n)](2/n)$

e)

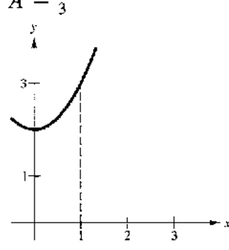
n	5	10	50	100
$s(n)$	1.6	1.8	1.96	1.98
$S(n)$	2.4	2.2	2.04	2.02

f) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [(i - 1)(2/n)](2/n) = 2$; $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [i(2/n)](2/n) = 2$

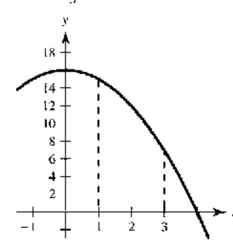
47. $A = 2$



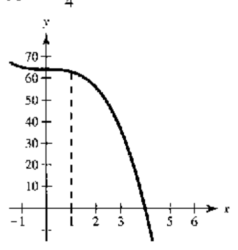
49. $A = \frac{7}{3}$



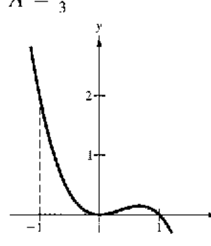
51. $A = \frac{70}{3}$



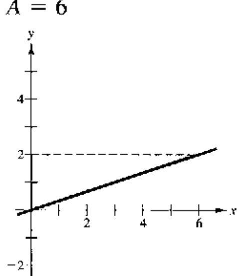
53. $A = \frac{513}{4}$



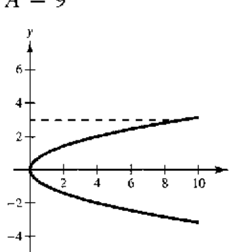
55. $A = \frac{2}{3}$



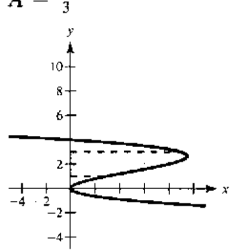
57. $A = 6$



59. $A = 9$



61. $A = \frac{44}{3}$



63. $\frac{69}{8}$ **65.** 0.345

67.

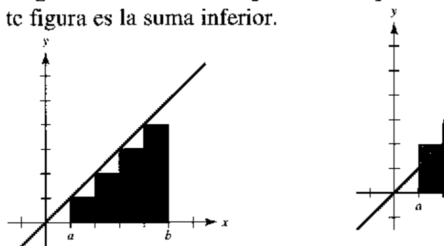
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	5.3838	5.3523	5.3439	5.3403	5.3384

69.

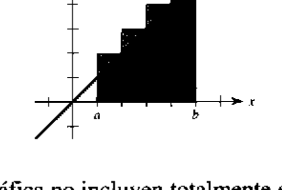
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	2.2223	2.2387	2.2418	2.2430	2.2435

71. b

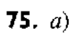
73. Se puede utilizar la recta $y = x$ acotada por $x = a$ y $x = b$.
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos en la siguiente figura es la suma inferior.



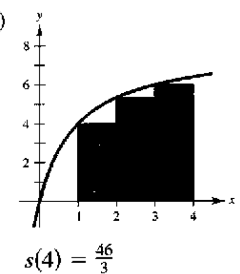
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos en la siguiente figura es la suma superior.



Los rectángulos de la primera gráfica no incluyen totalmente el área de la región, mientras que los rectángulos de la segunda gráfica abarcan un área mayor a la de la región. El valor exacto del área se encuentra entre estas dos sumas.

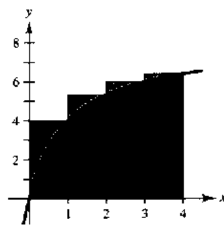


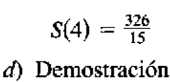
75. *a*)



$s(4) = \frac{46}{3}$

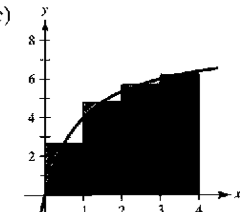
b)





$S(4) = \frac{326}{15}$

c)



$M(4) = \frac{6112}{315}$

d) Demostración

e)

n	4	8	20	100	200
***s*(*n*)**	15.333	17.368	18.459	18.995	19.060
***S*(*n*)**	21.733	20.568	19.739	19.251	19.188
***M*(*n*)**	19.403	19.201	19.137	19.125	19.125

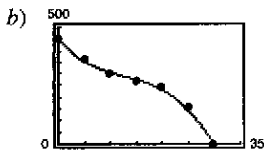
f) Como f es una función creciente, $s(n)$ siempre es creciente y $S(n)$ siempre decreciente.

77. Verdadero

79. Suponiendo que la figura tiene n filas, las estrellas de la izquierda suman $1 + 2 + \cdots + n$, al igual que las estrellas de la derecha. Hay $n(n + 1)$ estrellas en total. Por lo tanto $2[1 + 2 + \cdots + n] = n(n + 1)$ $1 + 2 + \cdots + n = [n(n + 1)]/2$.

81. *a*) $y = (-4.09 \times 10^{-5})x^3 + 0.016x^2 - 2.67x + 452.9$

b)



c) 76 897.5 pies^2

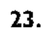
83. Demostración

Sección 4.3 (página 278)

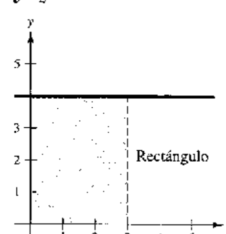
1. $2\sqrt{3} \approx 3.464$ **3.** 36 **5.** 0 **7.** $\frac{10}{3}$ **9.** $\int_{-1}^{5} (3x + 10)\, dx$

11. $\int_0^3 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$ **13.** $\int_0^5 3\, dx$ **15.** $\int_{-4}^{4} (4 - |x|)\, dx$

17. $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$ **19.** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ **21.** $\int_0^2 y^3\, dy$

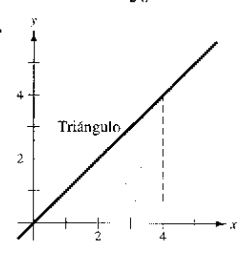


23.



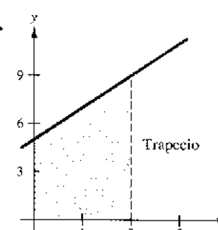
$A = 12$

25.



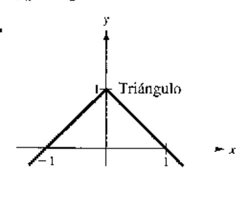
$A = 8$

27.



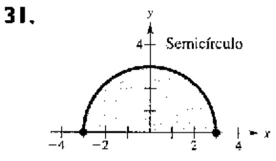
$A = 14$

29.



$A = 1$

31.



$A = 9\pi/2$

33. -6 **35.** 24 **37.** -10

39. 16 **41.** *a)* 13 *b)* -10 *c)* 0 *d)* 30

43. *a)* 8 *b)* -12 *c)* -4 *d)* 30 **45.** $-48, 88$

47. *a)* $-\pi$ *b)* 4 *c)* $-(1 + 2\pi)$ *d)* $3 - 2\pi$
e) $5 + 2\pi$ *f)* $23 - 2\pi$

49. *a)* 14 *b)* 4 *c)* 8 *d)* 0 **51.** $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x > \int_1^5 f(x)\, dx$

53. No. Hay una discontinuidad en $x = 4$. **55.** a **57.** d

59.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	3.6830	3.9956	4.0707	4.1016	4.1177
$M(n)$	4.3082	4.2076	4.1838	4.1740	4.1690
$R(n)$	3.6830	3.9956	4.0707	4.1016	4.1177

61.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	0.5890	0.6872	0.7199	0.7363	0.7461
$M(n)$	0.4076	0.5909	0.6551	0.7854	0.7854
$R(n)$	0.9817	0.8836	0.8508	0.8345	0.8247

63. Verdadero **65.** Verdadero

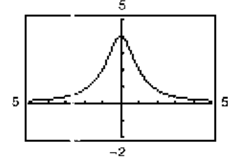
67. Falso: $\int_0^2 (-x)\, dx = -2$ **69.** 272 **71.** Demostración

73. No. No importa lo pequeño que sean los intervalos, la cantidad de números racionales e irracionales en cada intervalo es infinita y $f(c_i) = 0$ o $f(c_i) = 1$.

75. $a = -1$ y $b = 1$ maximizan la integral. **77.** $\frac{1}{3}$

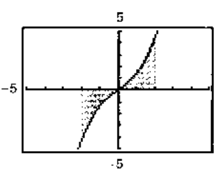
Sección 4.4 (página 291)

1.



Positiva

3.



Cero

5. 1 **7.** $-\frac{5}{2}$ **9.** $-\frac{10}{3}$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{2}{3}$ **17.** -4

19. $-\frac{1}{18}$ **21.** $-\frac{27}{20}$ **23.** $\frac{9}{2}$ **25.** $\frac{23}{3}$ **27.** $\pi + 2$

29. $2\sqrt{3}/3$ **31.** 0 **33.** $\frac{1}{6}$ **35.** $12\sqrt{3}/5$ **37.** 1 **39.** 10

41. 6 **43.** 0.4380, 1.7908 **45.** $\pm\arccos\sqrt{\pi}/2 \approx \pm 0.4817$

47. Valor promedio $= \frac{8}{3}$
$x = \pm 2\sqrt{3}/3 \approx \pm 1.155$

49. Valor promedio $= 2/\pi$
$x \approx 0.690, x \approx 2.451$

51. aproximadamente 540 pies

53. El teorema fundamental del cálculo establece que si una función f es continua en $[a, b]$ y F es la antiderivada de f en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

55. -1.5 **57.** 6.5 **59.** 15.5

61. *a)* $F(x) = 500 \sec^2 x$ *b)* $1\,500\sqrt{3}/\pi \approx 827$ N

63. ≈ 0.5318 L

65. *a)* $v = -0.00086t^3 + 0.0782t^2 - 0.208t + 0.10$
b) *c)* 2 475.6 m

67. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$
$F(2) = -8$
$F(5) = -12\frac{1}{2}$
$F(8) = -8$

69. $F(x) = -10/x + 10$
$F(2) = 5$
$F(5) = 8$
$F(8) = 8\frac{3}{4}$

71. $F(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 1$
$F(2) = \operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} 1 \approx 0.0678$
$F(5) = \operatorname{sen} 5 - \operatorname{sen} 1 \approx -1.8004$
$F(8) = \operatorname{sen} 8 - \operatorname{sen} 1 \approx 0.1479$

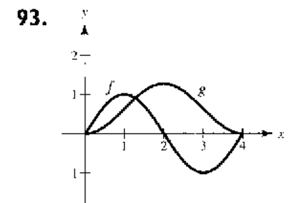
73. *a)* $g(0) = 0, g(2) \approx 7, g(4) \approx 9, g(6) \approx 8, g(8) \approx 5$
b) Creciente: $(0, 4)$; decreciente: $(4, 8)$
c) Se presenta un máximo en $x = 4$.
d)

75. $\frac{1}{2}x^2 + 2x$ **77.** $\frac{3}{4}x^{4/3} - 12$ **79.** $\tan x - 1$

81. $x^2 - 2x$ **83.** $\sqrt{x^4 + 1}$ **85.** $x \cos x$ **87.** 8

89. $\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}$ **91.** $3x^2 \operatorname{sen} x^6$

93.



En $x = 2$ se presenta un extremo de g.

95. *a)* $C(x) = 1\,000(12x^{5/4} + 125)$
b) $C(1) = \$137\,000$
$C(5) \approx \$214\,721$
$C(10) \approx \$338\,394$

97. 28 unidades **99.** 2 unidades **101.** Verdadero

103. $f(x) = x^{-2}$ tiene una discontinuidad no removible en $x = 0$.

105. $f'(x) = \dfrac{1}{(1/x)^2 + 1}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$

Como $f'(x) = 0$, $f(x)$ es constante.

Sección 4.5 (página 304)

$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1. $\int (5x^2 + 1)^2(10x)\,dx$	$5x^2 + 1$	$10x\,dx$
3. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$	$x^2 + 1$	$2x\,dx$
5. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$	$\tan x$	$\sec^2 x\,dx$

7. $\frac{1}{5}(1 + 2x)^5 + C$ **9.** $\frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2} + C$

11. $\frac{1}{12}(x^4 + 3)^3 + C$ **13.** $\frac{1}{15}(x^3 - 1)^5 + C$

15. $\frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2} + C$ **17.** $-\frac{15}{8}(1 - x^2)^{4/3} + C$

19. $1/[4(1 - x^2)^2] + C$ **21.** $-1/[3(1 + x^3)] + C$

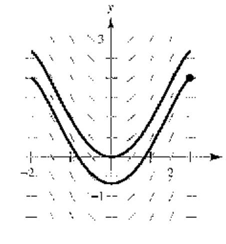
23. $-\sqrt{1 - x^2} + C$ **25.** $-\frac{1}{4}(1 + 1/t)^4 + C$ **27.** $\sqrt{2x} + C$

29. $\frac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{3/2} + 14x^{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x}(x^2 + 5x + 35) + C$

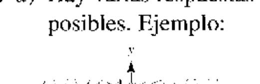
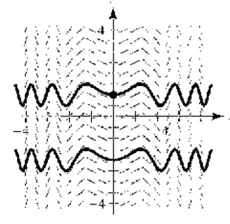
31. $\frac{1}{4}t^4 - t^2 + C$ **33.** $6y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + C = \frac{2}{5}y^{3/2}(15 - y) + C$

35. $2x^2 - 4\sqrt{16 - x^2} + C$ **37.** $-1/[2(x^2 + 2x - 3)] + C$

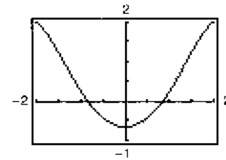
39. *a)* Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

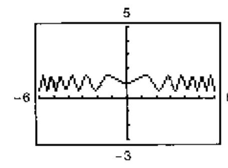


41. *a)* Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:

b) $y = -\frac{1}{3}(4 - x^2)^{3/2} + 2$ *b)* $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + 1$





43. $-\cos(\pi x) + C$ **45.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ **47.** $-\operatorname{sen}(1/\theta) + C$

49. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C_1$ o $-\frac{1}{4}\cos^2 2x + C_2$ o $-\frac{1}{8}\cos 4x + C_3$

51. $\frac{1}{5}\tan^5 x + C$ **53.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ or $\frac{1}{2}\sec^2 x + C_1$

55. $-\cot x - x + C$ **57.** $f(x) = 2\operatorname{sen}(x/2) + 3$

59. $f(x) = -\frac{1}{4}\cos 4x - 1$ **61.** $f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$

63. $\frac{2}{15}(x + 2)^{3/2}(3x - 4) + C$

65. $-\frac{2}{105}(1 - x)^{3/2}(15x^2 + 12x + 8) + C$

67. $\left(\sqrt{2x - 1}/15\right)(3x^2 + 2x - 13) + C$

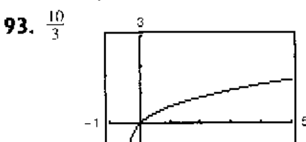
69. $-x - 1 - 2\sqrt{x + 1} + C$ o $-\left(x + 2\sqrt{x + 1}\right) + C_1$

71. 0 **73.** $12 - \frac{8}{9}\sqrt{2}$ **75.** 2 **77.** $\frac{1}{2}$ **79.** $\frac{4}{15}$ **81.** $3\sqrt{3}/4$

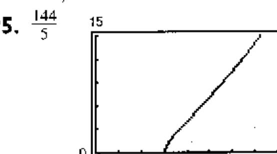
83. $f(x) = (2x^3 + 1)^3 + 3$ **85.** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 3$

87. $1\,209/28$ **89.** 4 **91.** $2\left(\sqrt{3} - 1\right)$

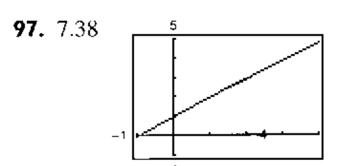
93. $\frac{10}{3}$



95. $\frac{144}{5}$



97. 7.38



99. $\frac{1}{6}(2x - 1)^3 + C_1 = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{6} + C_1$
o $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C_2$
Las respuestas difieren en una constante: $C_2 = C_1 - \frac{1}{6}$

101. $\frac{272}{15}$ **103.** $\frac{2}{3}$ **105.** *a)* $\frac{8}{3}$ *b)* $\frac{16}{3}$ *c)* $-\frac{8}{3}$ *d)* 8

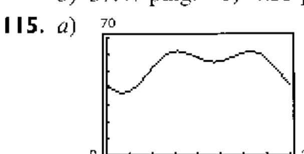
107. $2\int_0^4 (6x^2 - 3)\,dx = 232$

109. Si $u = 5 - x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ y
$\int x(5 - x^2)^3\,dx = -\frac{1}{2}\int(5 - x^2)^3(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int u^3\,du.$

111. \$250 000

113. *a)* Mínimo relativo: (6.4, 0.7) o junio
Máximo relativo: (0.4, 5.5) o enero
b) 37.47 pulg. *c)* 4.33 pulg.

115. *a)*



Flujo máximo:
$R \approx 61.713$ en $t = 9.36$.

b) 1 272 miles de galones

117. *a)* $P_{50,75} \approx 35.3\%$ *b)* $b \approx 58.6\%$

119. *a)* \$9.17 *b)* \$3.14

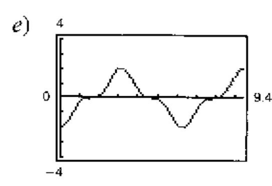
121. *a)* [graph: g and f, window 0 to 9.4, −4 to 4]

b) g es no negativa porque la gráfica de f es positiva al principio, y por lo general tiene más secciones positivas que negativas.

c) Los puntos de g que corresponden a extremos de f son puntos de inflexión de g.

d) No, algunos ceros de f, como $x = \pi/2$, no corresponden a extremos de g. La gráfica de g sigue creciendo después de que $x = \pi/2$ porque f sigue estando por encima del eje x.

e)



La gráfica de h es la de g trasladada dos unidades hacia abajo.

123. *a*) Demostración *b*) Demostración

125. Falso. $\int (2x + 1)^2\,dx = \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C$

127. Verdadero **129.** Verdadero **131 a 133.** Demostración

135. Problema Putnam A1 1958

Sección 4.6 (página 314)

	Trapecio	*Simpson*	*Exacta*
1.	2.7500	2.6667	2.6667
3.	4.2500	4.0000	4.0000
5.	4.0625	4.0000	4.0000
7.	12.6640	12.6667	12.6667
9.	0.1676	0.1667	0.1667

	Trapecio	*Simpson*	*Computadora*
11.	3.2833	3.2396	3.2413
13.	0.3415	0.3720	0.3927
15.	0.9567	0.9778	0.9775
17.	0.0891	0.0888	0.0891
19.	0.1940	0.1860	0.1858

21. Si f es cóncava hacia arriba en $[a, b]$, la regla de los trapecios dará un resultado mayor que $\int_a^b f(x)\,dx$ porque la gráfica de f se encontrará dentro de los trapecios.

23. *a*) 0.500 *b*) 0.000 **25.** *a*) 0.01 *b*) 0.0005

27. *a*) 0.1615 *b*) 0.0066 **29.** *a*) $n = 366$ *b*) $n = 26$

31. *a*) $n = 77$ *b*) $n = 8$ **33.** *a*) $n = 287$ *b*) $n = 16$

35. *a*) $n = 130$ *b*) $n = 12$ **37.** *a*) $n = 643$ *b*) $n = 48$

39. *a*) 24.5 *b*) 25.67 **41.** Hay varias respuestas posibles.

43.

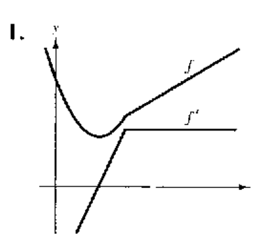
n	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4	0.8739	0.7960	0.6239	0.7489	0.7709
8	0.8350	0.7892	0.7100	0.7725	0.7803
10	0.8261	0.7881	0.7261	0.7761	0.7818
12	0.8200	0.7875	0.7367	0.7783	0.7826
16	0.8121	0.7867	0.7496	0.7808	0.7836
20	0.8071	0.7864	0.7571	0.7821	0.7841

45. 0.701 **47.** 10 233.58 pies-lb **49.** 3.1416

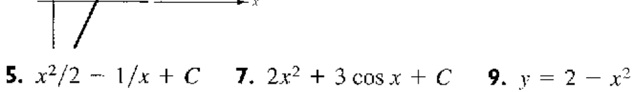
51. 89 250 m² **53 a 55.** Demostraciones

Ejercicios de repaso del capítulo 4 (página 316)

1.

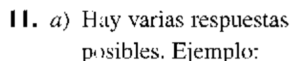


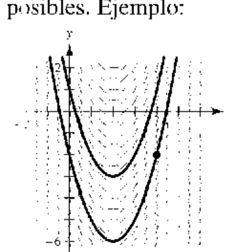
3. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$



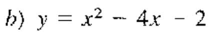
5. $x^2/2 - 1/x + C$ **7.** $2x^2 + 3\cos x + C$ **9.** $y = 2 - x^2$

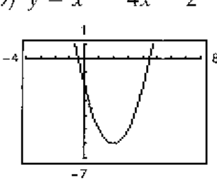
11. *a*) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:





b) $y = x^2 - 4x - 2$





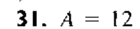
13. 240 pies/seg **15.** *a*) 3 seg *b*) 144 pies *c*) $\frac{3}{2}$ seg *d*) 108 pies

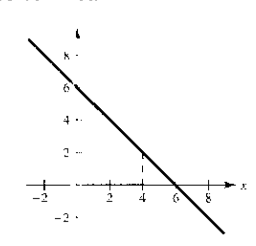
17. $\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{2n}$ **19.** $\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$ **21.** 165 **23.** 3 310

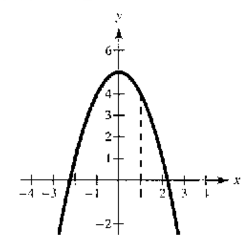
25. *a*) $\sum_{i=1}^{10}(2i - 1)$ *b*) $\sum_{i=1}^{n} i^3$ *c*) $\sum_{i=1}^{10}(4i + 2)$

27. 9.038 < (Área de la región) < 13.038

29. $A = 16$ **31.** $A = 12$

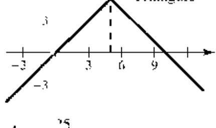


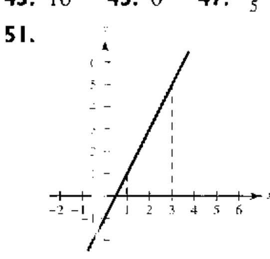




33. $\frac{27}{2}$ **35.** $\int_4^6 (2x - 3)\,dx$ **37.** $\int_{-2}^{0} (3x + 6)\,dx$

39.



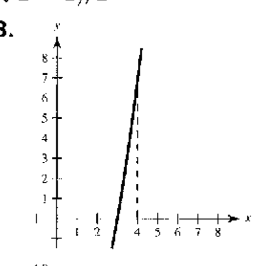


$A = \frac{25}{2}$

41. *a*) 13 *b*) 7 *c*) 11 *d*) 50

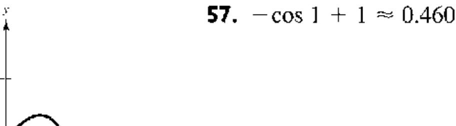
43. 16 **45.** 0 **47.** $\frac{422}{5}$ **49.** $(\sqrt{2} + 2)/2$

51.



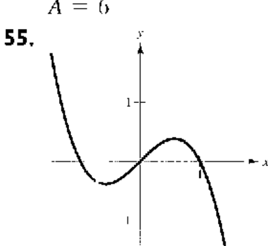
$A = 6$

53.



$A = \frac{10}{3}$

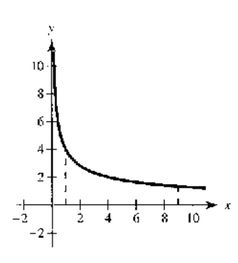
55.



$A = \frac{1}{4}$

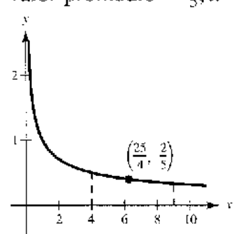
57. $-\cos 1 + 1 \approx 0.460$

59.



$A = 16$

61. Valor promedio $= \frac{2}{5}, x = \frac{25}{4}$



63. $x^2\sqrt{1 + x^3}$ **65.** $x^2 + 3x + 2$

67. $\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5}x^5 + x^3 + x + C$ **69.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3} + C$

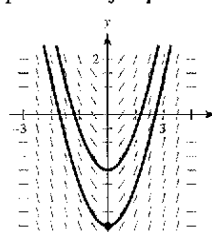
71. $-\frac{1}{30}(1 - 3x^2)^5 + C = \frac{1}{30}(3x^2 - 1)^5 + C$

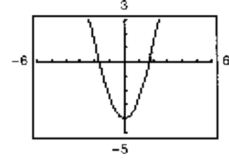
73. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$ **75.** $2\sqrt{1 - \cos\theta} + C$

77. $\dfrac{\tan^{n+1} x}{n + 1} + C$ **79.** $\dfrac{1}{3\pi}(1 + \sec \pi x)^3 + C$

81. $-9/4$ **83.** 2 **85.** $28\pi/15$ **87.** 2

89. *a*) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: *b*) $y = -\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2} + 5$





91. $\frac{468}{7}$ **93.** *a*) $24\,300/M$ *b*) $27\,300/M$

95. Regla de los trapecios: 0.257
Regla de Simpson: 0.254
Calculadora: 0.254

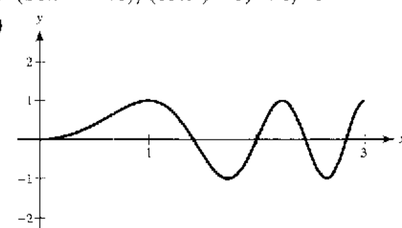
97. Regla de los trapecios: 0.637
Regla de Simpson: 0.685
Calculadora: 0.704

SP Solución de problemas (página 319)

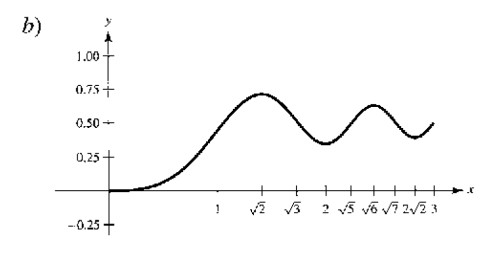
1. *a*) $L(1) = 0$ *b*) $L'(x) = 1/x, L'(1) = 1$
c) $x \approx 2.718$ *d*) Demostración

3. *a*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{32}{n^5}\sum_{i=1}^{n} i^4 - \frac{64}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{32}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$
b) $(16n^4 - 16)/(15n^4)$ *c*) $16/15$

5. *a*)

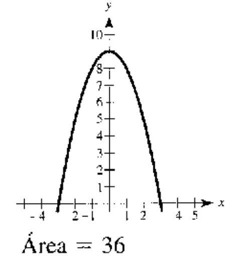


b)



c) Máximos relativos en $x = \sqrt{2}, \sqrt{6}$
Mínimos relativos en $x = 2, 2\sqrt{2}$
d) Puntos de inflexión en $x = 1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$

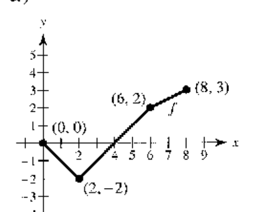
7. *a*)



Área = 36

b) Base = 6, altura = 9
Área $= \frac{2}{3}bh = \frac{2}{3}(6)(9) = 36$
c) Demostración

9. *a*)



b)

x	0	1	2	3
$F(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{7}{2}$

x	4	5	6	7	8
$F(x)$	-4	$-\frac{7}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$	3

c) $x = 4, 8$ *d*) $x = 2$

11. Demostración **13.** $\frac{2}{3}$ **15.** $1 \le \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx \le \sqrt{2}$

17. *a*) Demostración *b*) Demostración *c*) Demostración

19. *a*) $R(n), I, T(n), L(n)$
b) $S(4) = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \approx 5.42$

Capítulo 5

Sección 5.1 (página 329)

1.

x	0.5	1.5	2	2.5
$\int_1^x (1/t)\,dt$	-0.6932	0.4055	0.6932	0.9163

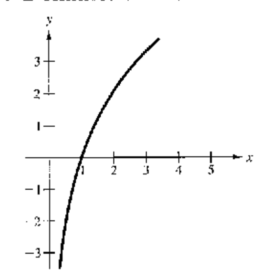
x	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\,dt$	1.0987	1.2529	1.3865

3. *a*) 3.8067 *b*) $\ln 45 = \displaystyle\int_1^{45} \frac{1}{t}\,dt \approx 3.8067$

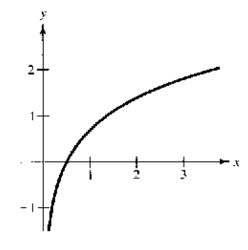
5. *a*) -0.2231 *b*) $\ln 0.8 = \displaystyle\int_1^{0.8} \frac{1}{t}\,dt \approx -0.2231$

7. b **8.** d **9.** a **10.** c

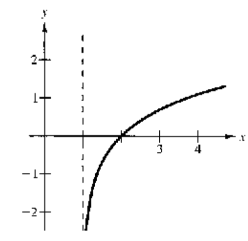
11. Dominio: $x > 0$



13. Dominio: $x > 0$



15. Dominio: $x > 1$



17. *a*) 1.7917 *b*) −0.4055
c) 4.3944 *d*) 0.5493

19. $\ln 2 - \ln 3$ **21.** $\ln x + \ln y - \ln z$ **23.** $\frac{1}{3}\ln(a^2 + 1)$

25. $3[\ln(x + 1) + \ln(x - 1) - 3\ln x]$ **27.** $\ln z + 2\ln(z - 1)$

29. $\ln\dfrac{x - 2}{x + 2}$ **31.** $\ln\sqrt[3]{\dfrac{x(x + 3)^2}{x^2 - 1}}$ **33.** $\ln\left(9/\sqrt{x^2 + 1}\right)$

35. *a*) *b*) $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{4} = \ln x^2 - \ln 4$
$= 2\ln x - \ln 4$
$= g(x)$

37. $-\infty$ **39.** $\ln 4 \approx 1.3863$ **41.** $y = 3x - 3$

43. $y = 2x - 2$ **45.** $2/x$ **47.** $4(\ln x)^3/x$ **49.** $\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$

51. $\dfrac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)}$ **53.** $\dfrac{1 - 2\ln t}{t^3}$ **55.** $\dfrac{2}{x\ln x^2} = \dfrac{1}{x\ln x}$

57. $\dfrac{1}{1 - x^2}$ **59.** $\dfrac{-4}{x(x^2 + 4)}$ **61.** $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$ **63.** $\cot x$

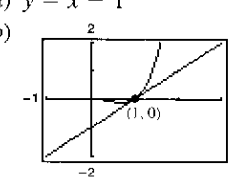
65. $-\tan x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$ **67.** $\dfrac{3\cos x}{(\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2)}$

69. $[\ln(2x) + 1]/x$

71. *a*) $5x - y - 2 = 0$
b)

73. *a*) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
b)

75. *a*) $y = x - 1$
b)



77. $2xy/(3 - 2y^2)$

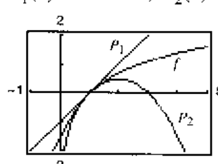
79. $y = x - 1$ **81.** $xy'' + y' = x(-2/x^2) + 2/x = 0$

83. Mínimo relativo: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

85. Mínimo relativo: $(e^{-1}, -e^{-1})$

87. Mínimo relativo: (e, e); Punto de inflexión: $(e^2, e^2/2)$

89. $P_1(x) = x - 1$; $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$



Los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas coinciden en $x = 1$.

91. $x \approx 0.567$ **93.** $(2x^2 - 1)/\sqrt{x^2 - 1}$

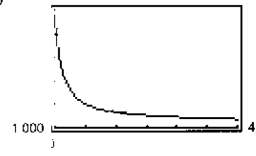
95. $\dfrac{3x^3 - 15x^2 + 8x}{2(x - 1)^3\sqrt{3x - 2}}$ **97.** $\dfrac{(2x^2 + 2x - 1)\sqrt{x - 1}}{(x + 1)^{3/2}}$

99. El dominio de la función logaritmo natural es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$. La función es continua, creciente e inyectiva, y su gráfica es cóncava hacia abajo. Además, si a y b son números positivos y n es racional, entonces
$\ln(1) = 0$, $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^n) = n\ln a$, y
$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

101. *a*) Sí. Si la gráfica de g es creciente, entonces $g'(x) > 0$. Como $f(x) > 0$, entonces se sabe que $f'(x) = g'(x)f(x)$ y así $f'(x) > 0$. Por lo tanto, la gráfica de f es creciente.
b) No. Sean $f(x) = x^2 + 1$ (positiva y cóncava hacia arriba) y sea $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (no cóncava hacia arriba).

103. Falso: $\ln x + \ln 25 = \ln 25x$.

105. *a*)

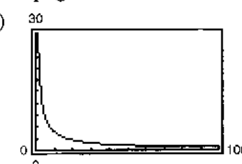


b) 20 años; $280 178.40
c) 30 años; $384 642.00

d) Cuando $x = 1\,167.41$, $dt/dx \approx -0.0645$.
Cuando $x = 1\,068.45$, $dt/dx \approx -0.1585$.

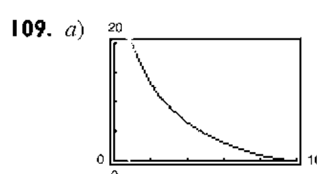
e) Una mensualidad mayor tiene dos ventajas obvias:
1. El plazo es más breve.
2. La cantidad total pagada es menor.

107. *a*) *c*)



b) $T'(10) \approx 4.75$ deg/lb/pulg² $\lim\limits_{p\to\infty} T'(p) = 0$
$T'(70) \approx 0.97$ deg/lb/pulg² Hay varias respuestas posibles.

109. *a*)



b) Cuando $x = 5$, $dy/dx = -\sqrt{3}$.
Cuando $x = 9$, $dy/dx = -\sqrt{19}/9$.
c) $\lim\limits_{x\to 10^-} \dfrac{dy}{dx} = 0$

111. Demostración

Sección 5.2 (página 338)

1. $5\ln|x| + C$ **3.** $\ln|x + 1| + C$ **5.** $-\frac{1}{2}\ln|3 - 2x| + C$

7. $\ln\sqrt{x^2 + 1} + C$ **9.** $x^2/2 - \ln(x^4) + C$

11. $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 3x^2 + 9x| + C$

13. $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\ln|x + 1| + C$ **15.** $\frac{1}{3}x^3 + 5\ln|x - 3| + C$

17. $\frac{1}{3}x^3 - 2x + \ln\sqrt{x^2 + 2} + C$ **19.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

21. $2\sqrt{x + 1} + C$ **23.** $2\ln|x - 1| - 2/(x - 1) + C$

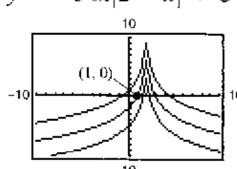
25. $\sqrt{2x} - \ln\left|1 + \sqrt{2x}\right| + C$

27. $x + 6\sqrt{x} + 18\ln\left|\sqrt{x} - 3\right| + C$ **29.** $\ln|\operatorname{sen}\theta| + C$

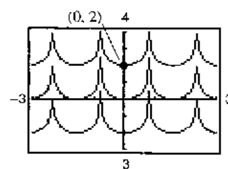
31. $-\frac{1}{2}\ln|\csc 2x + \cot 2x| + C$ **33.** $\ln|1 + \operatorname{sen} t| + C$

35. $\ln|\sec x - 1| + C$

37. $y = -3\ln|2 - x| + C$



39. $s = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2\theta| + C$

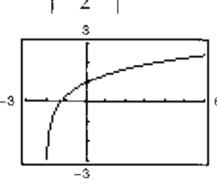


La gráfica tiene un hueco en $x = 2$.

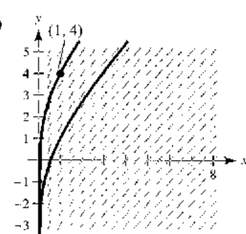
41. $f(x) = -2\ln x + 3x - 2$

43. *a)*

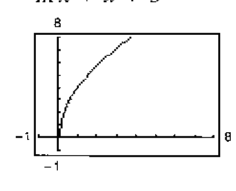
b) $y = \ln\left|\dfrac{x+2}{2}\right| + 1$



45. *a)*



b) $y = \ln x + x + 3$



47. $\frac{5}{3}\ln 13 \approx 4.275$ **49.** $\frac{7}{3}$ **51.** $-\ln 3 \approx -1.099$

53. $\ln\left|\dfrac{2 - \operatorname{sen}2}{1 - \operatorname{sen}1}\right| \approx 1.929$ **55.** $2\left[\sqrt{x} - \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)\right] + C$

57. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + 2\sqrt{x} + C$ **59.** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.174$

61. $1/x$ **63.** $1/x$ **65.** d **67.** $4\ln 3$ **69.** $\frac{1}{2}\ln 2$

71. $\frac{15}{2} + 8\ln 2 \approx 13.045$

73. $(12/\pi)\left[2\ln\left(\sqrt{3}+1\right) - \ln 2\right] \approx 5.03$

75. Regla de los trapecios: 20.2
Regla de Simpson: 19.4667

77. Regla de los trapecios: 5.3368
Regla de Simpson: 5.3632

79. Regla de las potencias **81.** Regla de los logaritmos

83. $-\ln|\cos x| + C = \ln|1/\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

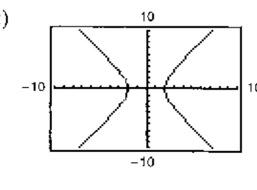
85. $\ln|\sec x + \tan x| + C = \ln\left|\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x - \tan x}\right| + C$
$= -\ln|\sec x - \tan x| + C$

87. 1 **89.** $1/[2(e-1)] \approx 0.291$

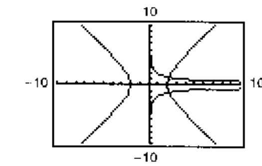
91. $P(t) = 1\,000(12\ln|1 + 0.25t| + 1)$; $P(3) \approx 7\,715$

93. $168.27

95. *a)*



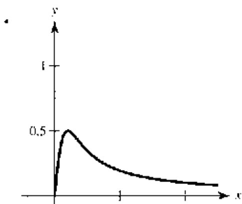
b) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo:
$y^2 = e^{-\ln x + \ln 4} = 4/x$



c) Hay varias respuestas posibles.

97. Falso. $\frac{1}{2}(\ln x) = \ln x^{1/2}$ **99.** Verdadero

101.

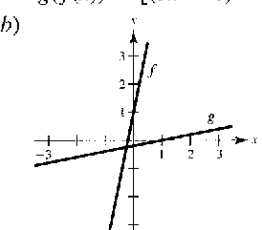


a) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} \approx 0.0966$
b) $0 < m < 1$
c) $\frac{1}{2}(m - \ln m - 1)$

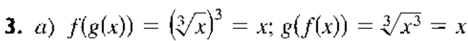
Sección 5.3 (página 347)

1. *a)* $f(g(x)) = 5[(x-1)/5] + 1 = x$
$g(f(x)) = [(5x+1) - 1]/5 = x$

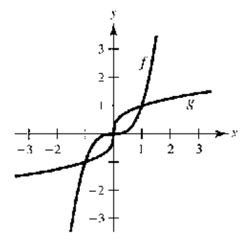
b)



3. *a)* $f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$; $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$

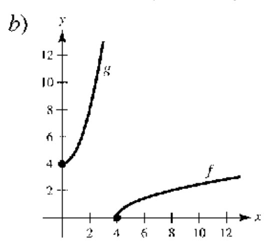


b)



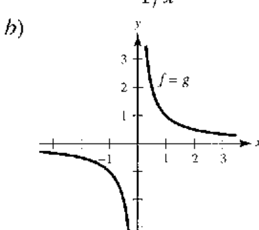
5. *a)* $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 4 - 4} = x$;
$g(f(x)) = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 4 = x$

b)



7. *a)* $f(g(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$

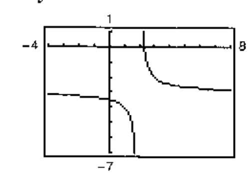
b)



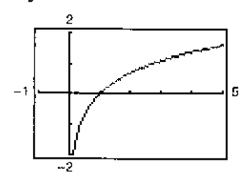
9. c **10.** b **11.** a **12.** d

13. La inversa existe. **15.** No existe la inversa.

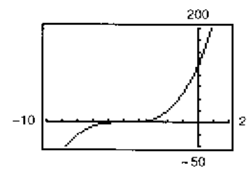
17. Inyectiva



19. Inyectiva



21. Inyectiva

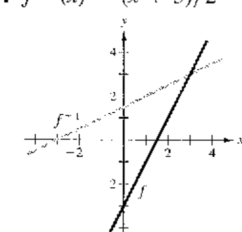


23. No existe la inversa.

25. No existe la inversa.

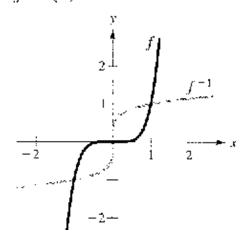
27. Existe la inversa.

29. $f^{-1}(x) = (x+3)/2$



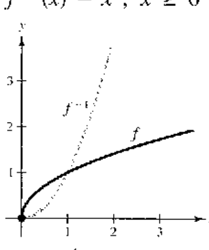
f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

31. $f^{-1}(x) = x^{1/5}$



f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

33. $f^{-1}(x) = x^2,\ x \geq 0$

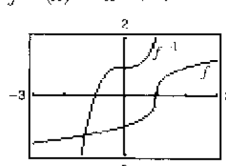


f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

35. $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2},\ 0 \leq x \leq 2$

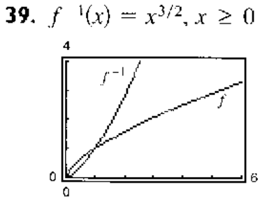
f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

37. $f^{-1}(x) = x^3 + 1$



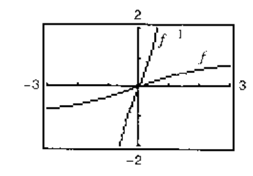
f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

39. $f^{-1}(x) = x^{3/2},\ x \geq 0$



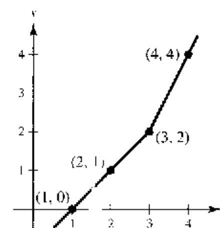
f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

41. $f^{-1}(x) = \sqrt{7}x/\sqrt{1 - x^2},\ -1 < x < 1$



f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

43.



x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2	4

45. *a*) Demostración

b) $y =$ [illegible]$(80 - x)$

x: costo total

y: número de libras del bien menos costoso

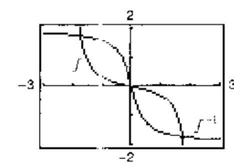
c) $[62.5, 80]$ *d*) 20 libras

47. $f'(x) = 2(x - 4) > 0$ en $(4, \infty)$

49. $f'(x) = -8/x^3 < 0$ en $(0, \infty)$

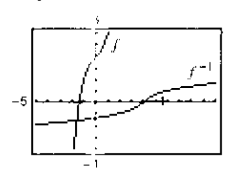
51. $f'(x) = -\operatorname{sen} x < 0$ en $(0, \pi)$

53. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \left[1 - \sqrt{1 + 16x^2}\right]/(2x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$



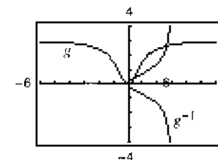
La gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.

55. *a*) y *b*)



c) f es inyectiva y tiene función inversa.

57. *a*) y *b*)



c) g no es inyectiva y no tiene función inversa.

59. Inyectiva

$f^{-1}(x) = x^2 + 2,\ x \geq 0$

61. Inyectiva

$f^{-1}(x) = 2 - x,\ x \geq 0$

63. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3,\ x \geq 0$ (No es la única respuesta.)

65. $f^{-1}(x) = x - 3,\ x \geq 0$ (No es la única respuesta.)

67. Existe la inversa. El volumen es una función creciente, por lo tanto es inyectiva. La función inversa proporciona el tiempo t que corresponde al volumen V.

69. No existe la inversa.

71. $1/5$

73. $2\sqrt{3}/3$

75. $1/13$

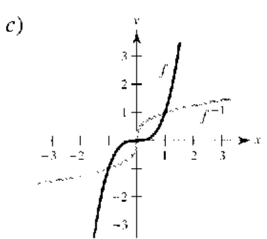
77. *a*) Dominio de f: $(-\infty, \infty)$

Dominio de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$

b) Rango de f: $(-\infty, \infty)$

Rango de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$

c)



d) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},\ (f^{-1})'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3}$

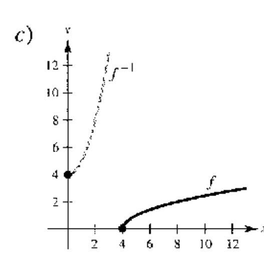
79. *a*) Dominio de f: $[4, \infty)$

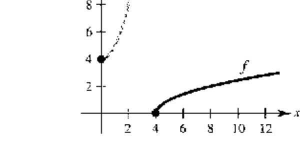
Dominio de f^{-1}: $[0, \infty)$

b) Rango de f: $[0, \infty)$

Rango de f^{-1}: $[4, \infty)$

c)





d) $f'(5) = \frac{1}{2}, (f^{-1})'(1) = 2$

81. $-\frac{1}{11}$ **83.** 32 **85.** 600

87. $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (x + 1)/2$ **89.** $(f \circ g)^{-1}(x) = (x + 1)/2$

91. Sea $y = f(x)$ inyectiva. Despejar x en función de y. Intercambiar x y y para obtener $y = f^{-1}(x)$. Sea el dominio de f^{-1} el rango de f. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Ejemplo: $f(x) = x^3$; $y = x^3$; $x = \sqrt[3]{y}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

93. Muchos valores de x dan el mismo valor en y. Por ejemplo, $f(\pi) = 0 = f(0)$. La gráfica no es continua en $[(2n - 1)\pi]/2$ donde n es un entero.

95. $\frac{1}{4}$ **97.** *a)* y *b)* Demostraciones **99.** Demostración

101. Falso. Sea $f(x) = x^2$. **103.** Cierto

105. No. Sea $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$.

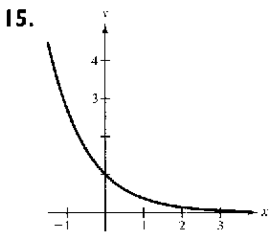
107. $\sqrt{17}$ **109.** Demostración

Sección 5.4 (página 356)

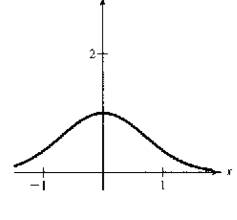
1. $x = 4$ **3.** $x \approx 2.485$ **5.** $x = 0$ **7.** $x \approx 0.511$

9. $x \approx 7.389$ **11.** $x \approx 10.389$ **13.** $x \approx 5.389$

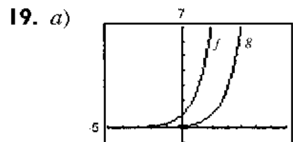
15.



17.



19. *a)*

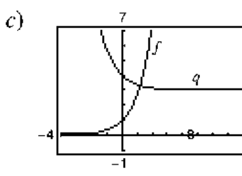


Traslación dos unidades hacia la derecha

b)

Reflexión respecto al eje x y un encogimiento vertical

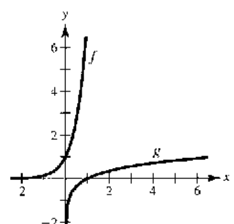
c)



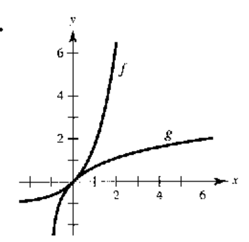
Reflexión respecto al eje y y traslación tres unidades hacia arriba

21. c **22.** d **23.** a **24.** b

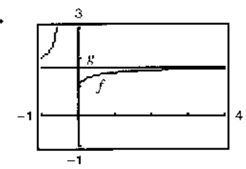
25.



27.



29.



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = e^{0.5}$

31. $2.7182805 < e$ **33.** *a)* $y = 3x + 1$ *b)* $y = -3x + 1$

35. $2e^{2x}$ **37.** $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$ **39.** $3(e^{-t} + e^t)^2(e^t - e^{-t})$

41. $2e^{2x}/(1 + e^{2x})$ **43.** $[-2(e^x - e^{-x})]/(e^x + e^{-x})^2$

45. $2e^x \cos x$ **47.** $\cos(x)/x$ **49.** $y = -x + 2$

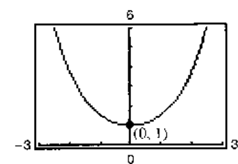
51. $y = -4(x + 1)$ **53.** $y = ex$ **55.** $y = (1/e)x - 1/e$

57. $\dfrac{10 - e^y}{xe^y + 3}$ **59.** $y = (-e - 1)x + 1$ **61.** $3(6x + 5)e^{-3x}$

63. $y'' - 2y' + 3y = 0$

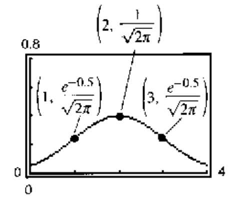
$e^x[-\cos\sqrt{2}x - \operatorname{sen}\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x] -$
$2e^x[-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x + \cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x] +$
$3e^x[\cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x] = 0$
$0 = 0$

65. Mínimo relativo: $(0, 1)$

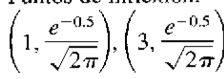


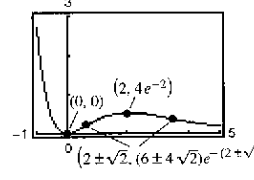
67. Máximo relativo: $(2, 1/\sqrt{2\pi})$

Puntos de inflexión: $\left(1, \dfrac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}}\right), \left(3, \dfrac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}}\right)$



69. Mínimo relativo: $(0, 0)$



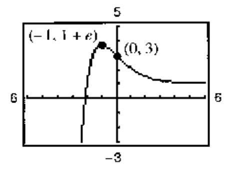


Máximo relativo: $(2, 4e^{-2})$

Puntos de inflexión: $(2 \pm \sqrt{2}, (6 \pm 4\sqrt{2})e^{-(2 \pm \sqrt{2})})$

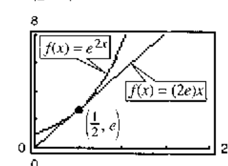
71. Mínimo relativo: $(-1, 1 + e)$

Punto de inflexión: $(0, 3)$

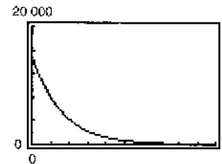


73. $A = \sqrt{2}e^{-1/2}$ **75.** Demostración

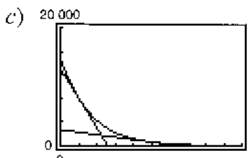
77. $\left(\frac{1}{2}, e\right)$



79. *a)*



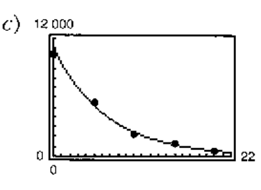
c)



b) Cuando $t = 1$, $\frac{dV}{dt} \approx -5\,028.84$.

Cuando $t = 5$, $\frac{dV}{dt} \approx -406.89$.

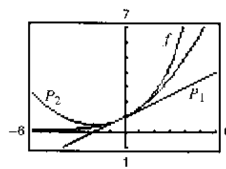
81. *a)* $\ln P = -0.1499h + 9.3018$ *c)*



b) $P = 10\,57.7\ e^{-0.1499h}$ *d)* $h = 5$: -776

$h = 18$: -111

83. $P_1 = 1 + \frac{1}{2}x$; $P_2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$



Los valores de f, P_1, y P_2 y sus primeras derivadas, coinciden en $x = 0$.

85. $e^{5x} + C$ **87.** $2e^{\sqrt{x}} + C$

89. $x - \ln(e^x + 1) + C_1$ o $-\ln(1 + e^{-x}) + C_2$

91. $-\frac{2}{3}(1 - e^{-x})^{3/2} + C$ **93.** $\ln|e^x - e^{-x}| + C$

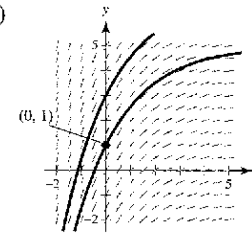
95. $-\frac{5}{2}e^{-2x} + e^{-x} + C$ **97.** $\ln|\cos e^{-x}| + C$

99. $(e^2 - 1)/(2e^2)$ **101.** $(e - 1)/(2e)$ **103.** $(e/3)(e^2 - 1)$

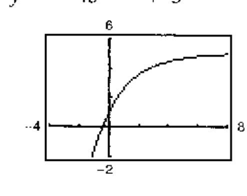
105. $(1/\pi)[e^{(\operatorname{sen}\pi^2/2)} - 1]$ **107.** $[1/(2a)]e^{ax^2} + C$

109. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

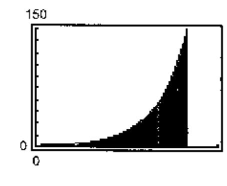
111. *a)*

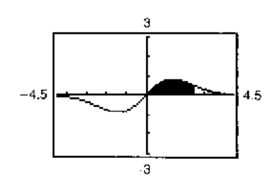


b) $y = -4e^{-x/2} + 5$



113. $e^5 - 1 \approx 147.413$ **115.** $2(1 - e^{-3/2}) \approx 1.554$





117. Regla del punto medio: 92.190; Regla de los trapecios: 93.837; Regla de Simpson: 92.7385

119. La probablilidad de que una batería dada dure entre 48 y 60 meses es aproximadamente 47.72%.

121. $\int_0^x e^t\,dt \ge \int_0^x 1\,dt$; $e^x - 1 \ge x$; $e^x > x + 1$ para $x \ge 0$

123. $f(x) = e^x$

El dominio de $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango de $f(x)$ es $(0, \infty)$. $f(x)$ es continua, creciente, inyectiva y cóncava hacia arriba en todo su dominio.

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

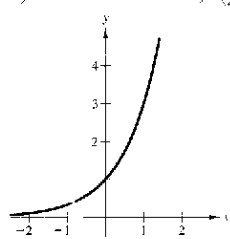
125. $f(x) = e^x = f'(x)$ **127.** $x \approx 0.567$ **129.** Demostración

Sección 5.5 (página 366)

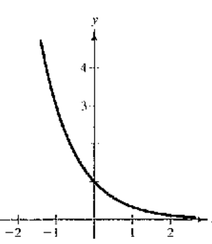
1. -3 **3.** 0 **5.** *a)* $\log_2 8 = 3$ *b)* $\log_3(1/3) = -1$

7. *a)* $10^{-2} = 0.01$ *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

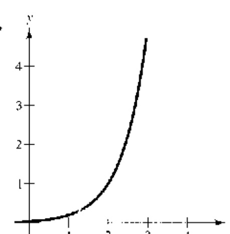
9.



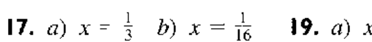
11.



13.



15. *a)* $x = 3$ *b)* $x = -1$

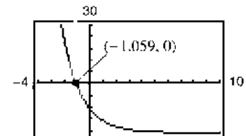


17. *a)* $x = \frac{1}{3}$ *b)* $x = \frac{1}{16}$ **19.** *a)* $x = -1, 2$ *b)* $x = \frac{1}{3}$

21. 1.965 **23.** -6.288 **25.** 12.253

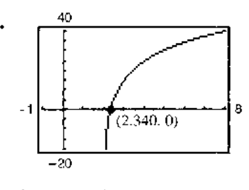
27. 33.000 **29.** ± 11.845

31.



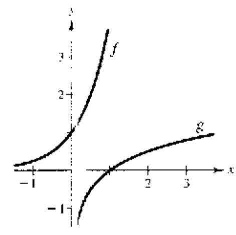
$(-1.059, 0)$

33.



$(2.340, 0)$

35.



37. $(\ln 4)4^x$

39. $t2^t(t \ln 2 + 2)$ **41.** $-2^{-\theta}[(\ln 2)\cos \pi\theta + \pi \operatorname{sen} \pi\theta]$

43. $(x - 2)/[(\ln 2)x(x - 1)]$ **45.** $x/[(\ln 5)(x^2 - 1)]$

47. $5(1 - \ln t)/(t^2 \ln 2)$ **49.** $y = -2x \ln 2 - 2 \ln 2 + 2$

51. $y = [1/(27 \ln 3)]x + 3 - 1/\ln 3$ **53.** $2(1 - \ln x)x^{(2/x)-2}$

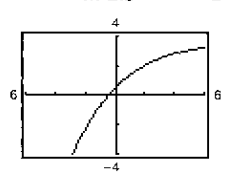
55. $(x-2)^{x+1}[(x+1)/(x-2)+\ln(x-2)]$

57. $y = x$ **59.** $y = \dfrac{\cos e}{e}x - \cos e + 1$ **61.** $3^x/\ln 3 + C$

63. $[-1/(2\ln 5)](5^{-x^2}) + C$ **65.** $\ln(3^{2x}+1)/(2\ln 3) + C$

67. $7/(2\ln 2)$ **69.** $4/\ln 5 - 2/\ln 3$ **71.** $26/\ln 3$

73. *a*) *b*) $y = \dfrac{3(1-0.4^{x/3})}{\ln 2.5} + \dfrac{1}{2}$



75. *a*) Falso. $y = a^x \Longrightarrow 0 = a^1 \Longrightarrow a = 0$, pero las funciones exponenciales no están definidas para $a = 0$.
b) Verdadero: $y = \log_2 x$ *c*) Verdadero: $2^y = x$
d) Falso. (1, 0), (2, 1), y (8, 3) no son colineales.

77. $g(x) = x^x$, $k(x) = 2^x$, $h(x) = x^2$, $f(x) = \log_2 x$

79. *a*) \$40.64 *b*) $C'(1) \approx 0.051P$, $C'(8) \approx 0.072P$ *c*) ln 1.05

81.

n	1	2	4	12
A	\$4 321.94	\$4 399.79	\$4 440.21	\$4 467.74

n	365	Continua
A	\$4 481.23	\$4 481.69

83.

t	1	10	20	30
P	\$95 122.94	\$60 653.07	\$36 787.94	\$22 313.02

t	40	50
P	\$13 533.53	\$8 208.50

85.

t	1	10	20	30
P	\$95 132.82	\$60 716.10	\$36 864.45	\$22 382.66

t	40	50
P	\$13 589.88	\$8 251.24

87.

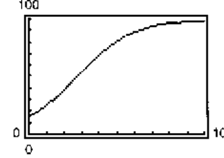
n	1	2	4	12
A	\$1 410.60	\$1 414.78	\$1 416.91	\$1 418.34

n	365	Continua
A	\$1 419.04	\$1 419.07

89. c

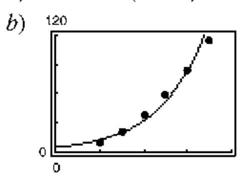
91. *a*) 6.7 millones de pies³/acre
b) $t = 20$: $\dfrac{dV}{dt} = 0.073$; $t = 60$: $\dfrac{dV}{dt} = 0.040$

93. *a*)



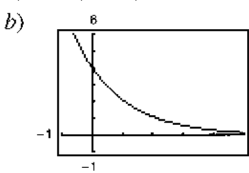
b) 16.7%
c) $x \approx 38.8$ o 38 800 huevos
d) $x \approx 27.75$ o 27 750 huevos

95. *a*) $B = 4.75(6.774)^d$
b)



c) Cuando $d = 0.8$, el ritmo o velocidad de crecimiento es 41.99.
Cuando $d = 1.5$, el ritmo o velocidad de crecimiento es 160.21.

97. *a*) 5.67; 5.67; 5.67
b)



c) $f(t) = g(t) = h(t)$. No, porque las integrales definidas de dos funciones en un intervalo dado pueden ser iguales aun cuando las funciones no sean iguales.

99. $y = 1\,200(0.6^t)$ **101.** Falso: *e* es un número irracional.

103. Verdadero **105.** Verdadero **107.** Demostración

109. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yx\ln y}{x^2 - xy\ln x}$
b) *i*) 1 cuando $c \neq 0$, $c \neq e$ *ii*) -3.1774 *iii*) -0.3147
c) (0, 0), (*e*, *e*)

111. Problema Putnam A15, 1940

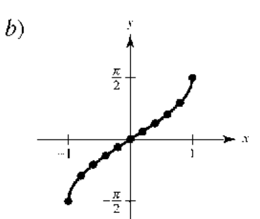
Sección 5.6 (página 377)

1. *a*)

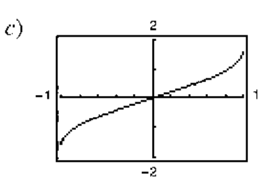
x	−1	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2
y	−1.57	−0.93	−0.64	−0.41	−0.20

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0	0.20	0.41	0.64	0.93	1.57

b)



c)



d) Intersección: (0, 0);
Simetría: respecto al origen

3. $\left(-\sqrt{2}/2, 3\pi/4\right)$, $(1/2, \pi/3)$, $\left(\sqrt{3}/2, \pi/6\right)$

5. $\pi/6$ **7.** $\pi/3$ **9.** $\pi/6$ **11.** $-\pi/4$ **13.** 2.50

15. $\arccos(1/1.269) \approx 0.66$ **17.** *a*) 3/5 *b*) 5/3

19. *a*) $-\sqrt{3}$ *b*) $-\frac{13}{5}$ **21.** $\sqrt{1-4x^2}$ **23.** $\sqrt{x^2-1}/|x|$

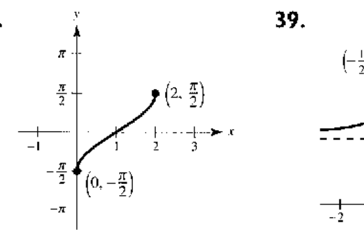
25. $\sqrt{x^2-9}/3$ **27.** $\sqrt{x^2+2}/x$

29. *a*) *b*) Demostración
c) Asíntotas horizontales: $y = -1$, $y = 1$

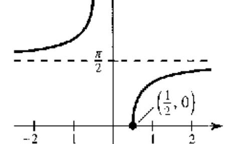
31. $x = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\right] \approx 1.207$ **33.** $x = \frac{1}{3}$

35. *a*) y *b*) Demostraciones

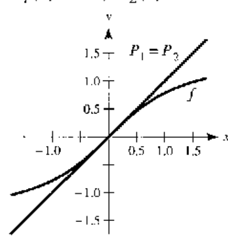
37.



39.

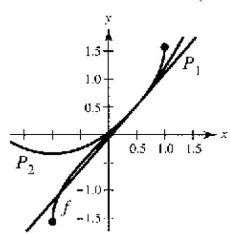


41. $2/\sqrt{2x - x^2}$ **43.** $-3/\sqrt{4 - x^2}$ **45.** $a/(a^2 + x^2)$
47. $(3x - \sqrt{1 - 9x^2} \operatorname{arcsen} 3x)/(x^2\sqrt{1 - 9x^2})$
49. $-t/\sqrt{1 - t^2}$ **51.** $\arccos x$ **53.** $1/(1 - x^4)$
55. $\operatorname{arcsen} x$ **57.** $x^2/\sqrt{16 - x^2}$ **59.** $2/(1 + x^2)^2$
61. $y = \frac{1}{3}(4\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + \pi)$
63. $y = \frac{1}{4}x + (\pi - 2)/4$ **65.** $y = (2\pi - 4)x + 4$
67. $P_1(x) = x;\ P_2(x) = x$



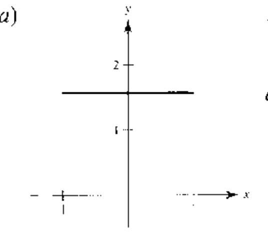
69. $P_1(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

$P_2(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$



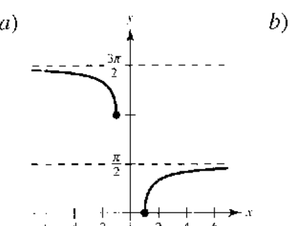
71. Máximo relativo: $(1.272, -0.606)$
Mínimo relativo: $(-1.272, 3.747)$
73. Mínimo relativo: $(2, 2.214)$
75. $y = -2\pi x/(\pi + 8) + 1 - \pi^2/(2\pi + 16)$
77. $y = -x + \sqrt{2}$
79. Si los dominios no estuvieran restringidos, entonces las funciones trigonométricas no serían inyectivas y, por lo tanto, no tendrían inversas.
81. Si $x > 0$, $y = \operatorname{arccot} x = \arctan \dfrac{1}{x}$; Si $x < 0$, $y = \arctan \dfrac{1}{x} + \pi$.
83. Falso. El rango de arccos es $[0, \pi]$. **85.** Verdadero
87. Verdadero
89. *a)* $\theta = \operatorname{arccot}(x/5)$
b) $x = 10$: 16 rad/h; $x = 3$: 58.824 rad/hr
91. *a)* $h(t) = -16t^2 + 256$; $t = 4$ sec
b) $t = 1$: -0.0520 rad/seg; $t = 2$: -0.1116 rad/seg
93. *a)* y *b)* Demostraciones **95.** $k \le -1$ o $k \ge 1$

97. *a)*



b) La gráfica es una recta horizontal en $\dfrac{\pi}{2}$.
c) Demostración

99. $c = 2$
101. *a)*

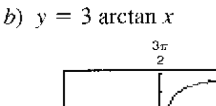


b) Demostración

Sección 5.7 (página 385)

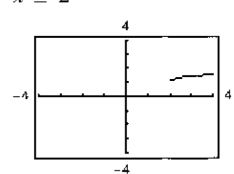
1. $5 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{3} + C$ **3.** $\dfrac{7}{4} \arctan \dfrac{x}{4} + C$ **5.** $\operatorname{arcsec}|2x| + C$
7. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ **9.** $\operatorname{arcsen}(x + 1) + C$
11. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 + C$ **13.** $\frac{1}{4}\arctan(e^{2x}/2) + C$
15. $2 \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + C$ **17.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\arctan x + C$
19. $8 \operatorname{arcsen}[(x - 3)/3] - \sqrt{6x - x^2} + C$ **21.** $\pi/18$
23. $\pi/6$ **25.** $\frac{1}{32}\pi^2 \approx 0.308$ **27.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2) \approx -0.134$
29. $\pi/4$ **31.** $\pi/2$
33. $\ln|x^2 + 6x + 13| - 3\arctan[(x + 3)/2] + C$
35. $\operatorname{arcsen}[(x + 2)/2] + C$ **37.** $-\sqrt{-x^2 - 4x} + C$
39. $4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi \approx 1.059$ **41.** $\frac{1}{2}\arctan(x^2 + 1) + C$
43. $2\sqrt{e^t - 3} - 2\sqrt{3}\arctan(\sqrt{e^t - 3}/\sqrt{3}) + C$ **45.** $\pi/6$
47. *a* y *b* **49.** *a*, *b* y *c* **51.** *c* **53.** $y = \operatorname{arcsen}(x/2) + \pi$
55. *a)*

b) $y = 3\arctan x$

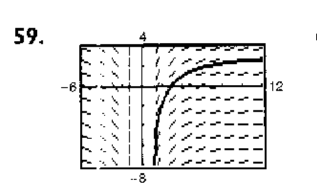


57. *a)*

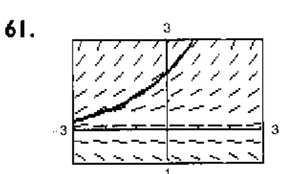
b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}(x/2) + 1$, $x \ge 2$



59.



61.



63. $\pi/8$ **65.** $\pi/6$ **67.** $3\pi/2$

69. *a)* Demostración *b)* $\ln(\sqrt{6}/2) + (9\pi - 4\pi\sqrt{3})/36$

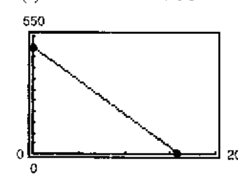
71. *a)* *b)* 0.5708 *c)* $(\pi - 2)/2$

73. *a)* $F(x)$ representa el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[x, x + 2]$. Máximo en $x = -1$.
b) $x = -1$.

75. Falso. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{1}{12}\operatorname{arcsec}\frac{|3x|}{4} + C$

77. Verdadero **79 a 81.** Demostraciones

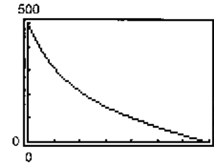
83. *a)* $v(t) = -32t + 500$



b) $s(t) = -16t^2 + 500t$; 3 906.25 pies

c) $v(t) = \sqrt{\dfrac{32}{k}}\tan\left[\arctan\left(500\sqrt{\dfrac{k}{32}}\right) - \sqrt{32k}\,t\right]$

d)



$t_0 = 6.86$ seg

e) 1 088 pies

f) Cuando se toma en cuenta la fricción del aire, la altura máxima del objeto no es tan grande.

Sección 5.8 (página 396)

1. *a)* 10.018 *b)* -0.964 **3.** *a)* $\frac{4}{3}$ *b)* $\frac{13}{12}$

5. *a)* 1.317 *b)* 0.962 **7 a 11.** Demostraciones

13. $\cosh x = \sqrt{13}/2$; $\tanh x = 3\sqrt{13}/13$; $\operatorname{csch} x = 2/3$; $\operatorname{sech} x = 2\sqrt{13}/13$; $\coth x = \sqrt{13}/3$

15. $-\operatorname{sech}(x + 1)\tanh(x + 1)$ **17.** $\coth x$ **19.** $\operatorname{csch} x$

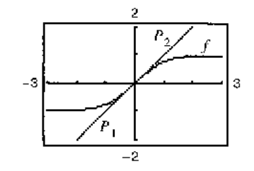
21. $\operatorname{senh}^2 x$ **23.** $\operatorname{sech} t$ **25.** $y = -2x + 2$ **27.** $y = 1 - 2x$

29. Máximos relativos: $(\pm\pi, \cosh \pi)$; Mínimo relativo: $(0, -1)$

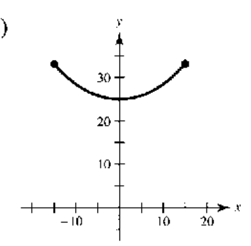
31. Máximo relativo: $(1.20, 0.66)$
Mínimo relativo: $(-1.20, -0.66)$

33. $y = a\operatorname{senh} x$; $y' = a\cosh x$; $y'' = a\operatorname{senh} x$; $y''' = a\cosh x$; Por lo tanto, $y''' - y' = 0$.

35. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x$



37. *a)*



b) 33.146 unidades; 25 unidades
c) $m = \operatorname{senh}(1) \approx 1.175$

39. $-\frac{1}{2}\cosh(1 - 2x) + C$ **41.** $\frac{1}{3}\cosh^3(x - 1) + C$

43. $\ln|\operatorname{senh} x| + C$ **45.** $-\coth(x^2/2) + C$

47. $\operatorname{csch}(1/x) + C$ **49.** $\frac{1}{2}\arctan x^2 + C$ **51.** $\ln 5 - 2\ln 2$

53. $\frac{1}{5}\ln 3$ **55.** $\pi/4$ **57.** $3/\sqrt{9x^2 - 1}$ **59.** $|\sec x|$

61. $2\sec 2x$ **63.** $2\operatorname{senh}^{-1}(2x)$ **65.** Las respuestas varían.

67. ∞ **69.** 0 **71.** 1 **73.** $\ln(\sqrt{e^{2x} + 1} - 1) - x + C$

75. $2\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x} + C = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1 + x}) + C$

77. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x - 4}{x}\right| + C$ **79.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(x + 1) + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(x + 1) - \sqrt{3}}\right| + C$

81. $\dfrac{1}{4}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{4x - 1}{9}\right) + C$ **83.** $-\dfrac{x^2}{2} - 4x - \dfrac{10}{3}\ln\left|\dfrac{x - 5}{x + 1}\right| + C$

85. $8\arctan(e^2) - 2\pi \approx 5.207$ **87.** $\frac{5}{2}\ln(\sqrt{17} + 4) \approx 5.237$

89. *a)* $\ln(\sqrt{3} + 2)$ *b)* $\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{3}$

91. $\frac{52}{31}$ kg **93.** $-\sqrt{a^2 - x^2}/x$ **95 a 101.** Demostraciones

103. Problema Putnam 8, 1939

Ejercicios de repaso para el capítulo 5 (página 399)

1. Asíntota vertical: $x = 0$

3. $\frac{1}{5}[\ln(2x + 1) + \ln(2x - 1) - \ln(4x^2 + 1)]$

5. $\ln(3\sqrt[3]{4 - x^2}/x)$ **7.** $e^4 - 1 \approx 53.598$

9. $1/(2x)$ **11.** $(1 + 2\ln x)/(2\sqrt{\ln x})$

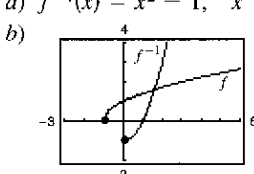
13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b^2}\left(b - \dfrac{ab}{a + bx}\right) = \dfrac{x}{a + bx}$ **15.** $y = -x + 1$

17. $\frac{1}{7}\ln|7x - 2| + C$ **19.** $-\ln|1 + \cos x| + C$

21. $3 + \ln 4$ **23.** $\ln(2 + \sqrt{3})$

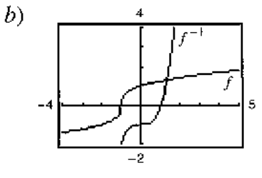
25. *a)* $f^{-1}(x) = 2x + 6$
b)
c) Demostración

27. *a)* $f^{-1}(x) = x^2 - 1$, $x \geq 0$
b)



c) Demostración

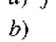
29. *a)* $f^{-1}(x) = x^3 - 1$
b)

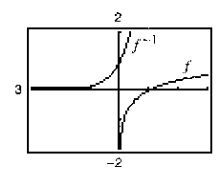


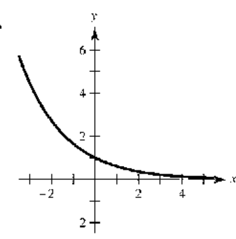
c) Demostración

31. $1/\left[3(\sqrt[3]{-3})^2\right] \approx 0.160$ **33.** $3/4$

35. *a*) $f^{-1}(x) = e^{2x}$ **37.**







c) Demostración

39. $te^t(t + 2)$ **41.** $(e^{2x} - e^{-2x})/\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

43. $x(2 - x)/e^x$ **45.** $y = -4x + 4$ **47.** $-y/[x(2y + \ln x)]$

49. $(1 - e^{-3})/6 \approx 0.158$ **51.** $(e^{4x} - 3e^{2x} - 3)/(3e^x) + C$

53. $-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$ **55.** $\ln(e^2 + e + 1) \approx 2.408$

57. $y = e^x(a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)$

$y' = e^x[(-3a + b) \operatorname{sen} 3x + (a + 3b) \cos 3x]$

$y'' = e^x[(-6a - 8b) \operatorname{sen} 3x + (-8a + 6b) \cos 3x]$

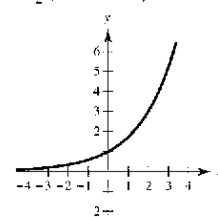
$y'' - 2y' + 10y$

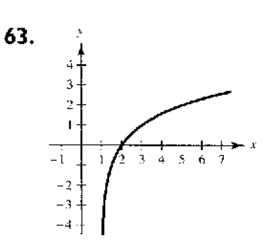
$= e^x\{[(-6a - 8b) - 2(-3a + b) + 10b] \operatorname{sen} 3x +$

$[(-8a + 6b) - 2(a + 3b) + 10a] \cos 3x\} = 0$

59. $-\frac{1}{2}(e^{-16} - 1) \approx 0.500$

61. **63.**

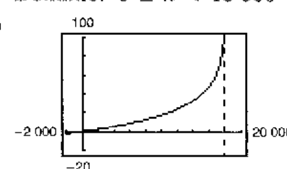




65. $3^{x-1} \ln 3$ **67.** $x^{2x+1}(2 \ln x + 2 + 1/x)$

69. $-1/[\ln 3(2 - 2x)]$ **71.** $5^{(x+1)^2}/(2 \ln 5) + C$

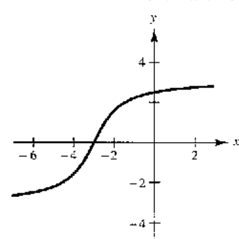
73. *a*) Dominio: $0 \le h < 18\,000$



c) $t = 0$

Asíntota vertical: $h = 18\,000$

75.



77. *a*) $1/2$ *b*) $\sqrt{3}/2$

79. $(1 - x^2)^{-3/2}$ **81.** $\dfrac{x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{arcsec} x$ **83.** $(\operatorname{arcsen} x)^2$

85. $\frac{1}{2} \arctan(e^{2x}) + C$ **87.** $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + C$

89. $\frac{1}{4}[\arctan (x/2)]^2 + C$ **91.** $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2 \approx 1.826$

93. $y = A \operatorname{sen}\left(t\sqrt{k/m}\right)$

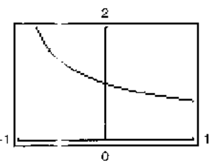
95. $y' = x\left(\dfrac{2}{1 - 4x^2}\right) + \tanh^{-1} 2x = \dfrac{2x}{1 - 4x^2} + \tanh^{-1} 2x$

97. $\frac{1}{3} \tanh x^3 + C$

SP Solución de problemas (página 401)

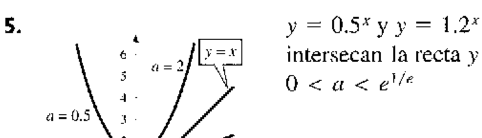
1. $a \approx 4.7648$; $\theta \approx 1.7263$ or $98.9°$

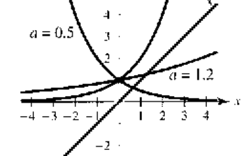
3. *a*)



b) 1 *c*) Demostración

5.





$y = 0.5^x$ y $y = 1.2^x$ intersecan la recta $y = x$; $0 < a < e^{1/e}$

7. *a*) Área de la región $A = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)/2 \approx 0.1589$

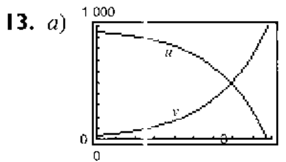
Área de la región $B = \pi/12 \approx 0.2618$

b) $\frac{1}{24}\left[3\pi\sqrt{2} - 12\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - 2\pi\right] \approx 0.1346$

c) 1.2958 *d*) 0.6818

9. Demostración **11.** 0.2318

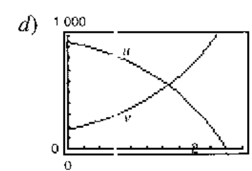
13. *a*)



b) Intereses sobre saldos insolutos; $t \approx 27.68$ años

c) Las pendientes son la negativa una de otra; $u'(15) \approx -14.0572$; $v'(15) \approx 14.0572$

d)



$t \approx 12.67$ años

Hay varias respuestas posibles.

Capítulo 6

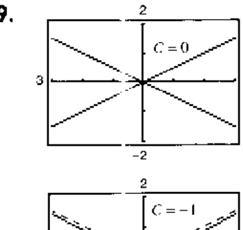
Sección 6.1 (página 409)

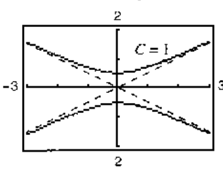
1 a 11. Demostraciones **13.** No es solución **15.** Solución

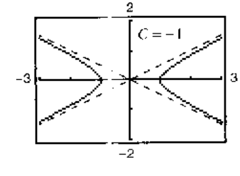
17. Solución **19.** No es solución **21.** Solución

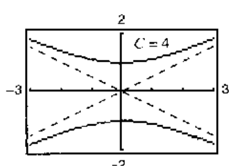
23. No es solución **25.** $y = 3e^{-x/2}$ **27.** $4y^2 = x^3$

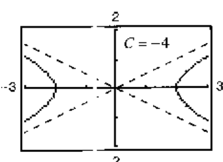
29.











31. $y = 3e^{-2x}$ **33.** $y = 2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\cos 3x$

35. $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$ **37.** $y = x^3 + C$

39. $y = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$ **41.** $y = x - \ln x^2 + C$

43. $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

45. $y = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C$

47. $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

49.

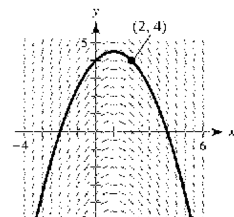
x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	-2	No def.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

51.

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	$-2\sqrt{2}$	-2	0	0	$-2\sqrt{2}$	-8

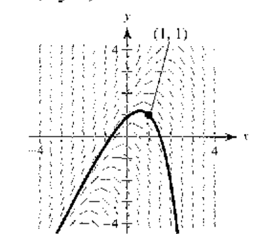
53. b **54.** c **55.** d **56.** a

57. *a*) y *b*)



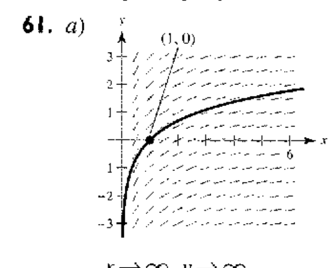
c) $x \to \infty$ implica que $y \to -\infty$; $x \to -\infty$ implica que $y \to \infty$

59. *a*) y *b*)



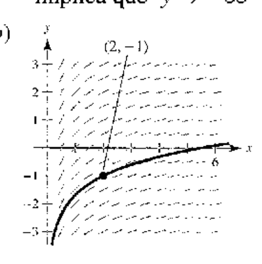
c) $x \to \infty$ implica que $y \to -\infty$; $x \to -\infty$ implica que $y \to -\infty$

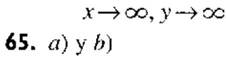
61. *a*)



$x \to \infty, y \to \infty$

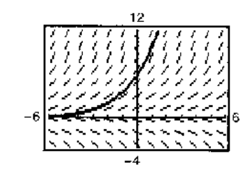
b)



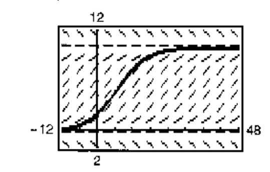


$x \to \infty, y \to \infty$

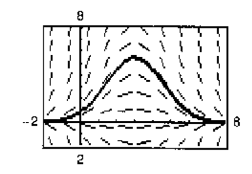
63. *a*) y *b*)



65. *a*) y *b*)



67. *a*) y *b*)



69.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_n	2	2.2	2.43	2.693	2.992	3.332	3.715

n	7	8	9	10
x_n	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	4.146	4.631	5.174	5.781

71.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
y_n	3	2.7	2.438	2.209	2.010	1.839	1.693

n	7	8	9	10
x_n	0.35	0.4	0.45	0.5
y_n	1.569	1.464	1.378	1.308

73.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_n	1	1.1	1.212	1.339	1.488	1.670	1.900

n	7	8	9	10
x_n	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	2.213	2.684	3.540	5.958

75.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exact)	3.0000	3.6642	4.4755	5.4664	6.6766	8.1548
$y(x)$ $(h = 0.2)$	3.0000	3.6000	4.3200	5.1840	6.2208	7.4650
$y(x)$ $(h = 0.1)$	3.0000	3.6300	4.3923	5.3147	6.4308	7.7812

77.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exact)	0.0000	0.2200	0.4801	0.7807	1.1231	1.5097
$y(x)$ $(h = 0.2)$	0.0000	0.2000	0.4360	0.7074	1.0140	1.3561
$y(x)$ $(h = 0.1)$	0.0000	0.2095	0.4568	0.7418	1.0649	1.4273

79. *a*) $y(1) = 112.7141°$; $y(2) = 96.3770°$; $y(3) = 86.5954°$
b) $y(1) = 113.2441°$; $y(2) = 97.0158°$; $y(3) = 87.1729°$

81. La solución general es una familia de curvas que satisface la ecuación diferencial. Una solución particular es un miembro de esa familia, que satisfaga las condiciones dadas.

83. Comenzar con un punto (x_0, y_0) que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Después utilizar un tamaño de paso pequeño h, para calcular el punto $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))$. Continuar generando la secuencia de puntos
$(x_n + h, y_n + hF(x_n, y_n))$ o (x_{n+1}, y_{n+1}).

85. Falso: $y = x^3$ es una solución de $xy' - 3y = 0$, pero $y = x^3 + 1$ no es una solución.

87. Verdadero

89. *a*)

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	4	2.6813	1.7973	1.2048	0.8076	0.5413
y_1	4	2.56	1.6384	1.0486	0.6711	0.4295
y_2	4	2.4	1.44	0.864	0.5184	0.3110
e_1	0	0.1213	0.1589	0.1562	0.1365	0.1118
e_2	0	0.2813	0.3573	0.3408	0.2892	0.2303
r	0	0.4312	0.4447	0.4583	0.4720	0.4855

b) Puesto que r es de aproximadamente 0.5, si h se reduce a la mitad, entonces el error se reduce a cerca de la mitad.

c) De nuevo, el error se reducirá a la mitad.

91. *a*) *b*) $\lim\limits_{t \to \infty} I(t) = 2$

93. $\omega = \pm 4$ rad/seg

95. Problema Putnam 3, sesión matutina, 1954

Sección 6.2 (página 418)

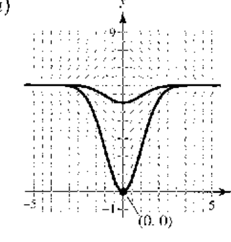
1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ **3.** $y = Ce^x - 2$ **5.** $y^2 - 5x^2 = C$

7. $y = Ce^{(2x^{3/2})/3}$ **9.** $y = C(1 + x^2)$

11. $dQ/dt = k/t^2$
$Q = -k/t + C$

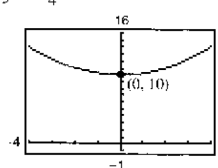
13. $dN/ds = k(250 - s)$
$N = -(k/2)(250 - s)^2 + C$

15. *a*)

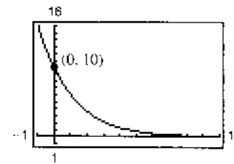


b) $y = 6 - 6e^{-x^2/2}$

17. $y = \frac{1}{4}t^2 + 10$



19. $y = 10e^{-t/2}$



21. $dy/dx = ky$
$y = 4e^{0.3054x}$
$y(6) \approx 25$

23. $dV/dt = kV$
$V = 20\,000e^{-0.1175t}$
$V(6) \approx 9\,882$

25. $y = \frac{1}{2}e^{0.4605t}$ **27.** $y = 0.6687e^{0.4024t}$

29. C es el valor inicial de y, y k es la constante de proporcionalidad.

31. Cuadrantes I y III; dy/dx es positiva cuando x y y, ambas, son positivas (Cuadrante I) o negativas (Cuadrante III).

33. Cantidad después de 1 000 años: 6.48 g;
Cantidad después de 10 000 años: 0.13 g

35. Cantidad inicial: 38.16 g;
Cantidad después de 1 000 años: 24.74 g

37. Cantidad después de 1 000 años: 4.43 g;
Cantidad después de 10 000 años: 1.49 g

39. Cantidad inicial: 2.16 g;
Cantidad después de 10 000 años: 1.62 g

41. 95.76%

43. Tiempo necesario para duplicarlo: 11.55 años; Cantidad después de 10 años: \$1 822.12

45. Tasa anual: 8.94%; Cantidad después de 10 años: \$1 833.67

47. Tasa anual: 9.50%; Tiempo necesario para duplicarlo: 7.30 años

49. \$112 087.09 **51.** \$30 688.87

53. *a*) 10.24 años *b*) 9.93 años *c*) 9.90 años *d*) 9.90 años

55. *a*) 8.50 años *b*) 8.18 años *c*) 8.16 años *d*) 8.15 años

57. *a*) $P = 7.77e^{-0.009t}$ *b*) 6.79 millones
c) Puesto que $k < 0$, la población está decreciendo.

59. *a*) $P = 5.07e^{0.026t}$ *b*) 7.48 millones
c) Puesto que $k > 0$, la población está creciendo.

61. *a*) $100.1596(1.2455)^t$ *b*) 6.3 horas

63. *a*) $N \approx 30(1 - e^{-0.0502t})$ *b*) 36 días

65. *a*) $P_1 = 181e^{0.01245t}$ o $P_1 = 181(1.01253)^t$
b) $P_2 = 182.3248(1.01091)^t$
c)

P_2 es una mejor aproximación.
d) 2 011

67. *a*) 20 decibeles *b*) 70 decibeles
c) 95 decibeles *d*) 120 decibeles

69. 2 014 ($t = 16$) **71.** 379.2°

73. Falso. El ritmo de crecimiento dy/dx es proporcional a y.

75. Verdadero

Sección 6.3 (página 429)

1. $y^2 - x^2 = C$ **3.** $r = Ce^{0.05s}$ **5.** $y = C(x + 2)^3$

7. $y^2 = C - 2\cos x$ **9.** $y = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$

11. $y = Ce^{(\ln x)^2/2}$ **13.** $y^2 = 2e^x + 14$ **15.** $y = e^{-(x^2+2x)/2}$

17. $y^2 = 4x^2 + 3$ **19.** $u = e^{(1-\cos v^2)/2}$ **21.** $P = P_0e^{kt}$

23. $9x^2 + 16y^2 = 25$ **25.** $f(x) = Ce^{-x/2}$

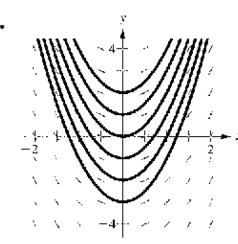
27. Homogénea de grado 3 **29.** Homogénea de grado 3

31. Heterogénea **33.** Homogénea de grado 0

35. $|x| = C(x - y)^2$ **37.** $|y^2 + 2xy - x^2| = C$

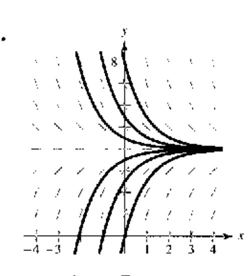
39. $y = Ce^{-x^2/2y^2}$ **41.** $e^{y/x} = 1 + \ln x^2$ **43.** $x = e^{\operatorname{sen}(y/x)}$

45.



$y = \frac{1}{2}x^2 + C$

47.



$y = 4 + Ce^{-x}$

49. *a*) $y = 0.1602$ *b*) $y = 5e^{-3x^2}$ *c*) $y = 0.2489$

51. *a*) $y = 3.0318$ *b*) $y^3 - 4y = x^2 + 12x - 13$ *c*) $y = 3$

53. 98.9% de la cantidad original

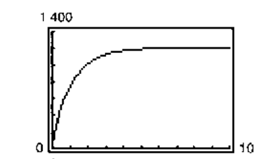
55. *a*) $dy/dx = k(y - 4)$ *b*) a *c*) Demostración

56. *a*) $dy/dx = k(x - 4)$ *b*) b *c*) Demostración

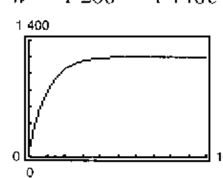
57. *a*) $dy/dx = ky(y - 4)$ *b*) c *c*) Demostración

58. *a*) $dy/dx = ky^2$ *b*) d *c*) Demostración

59. *a*) $w = 1\,200 - 1\,140e^{-0.8t}$ $w = 1\,200 - 1\,140e^{-0.9t}$

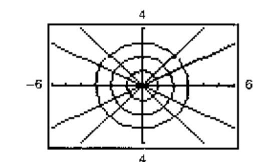


$w = 1\,200 - 1\,140e^{-t}$

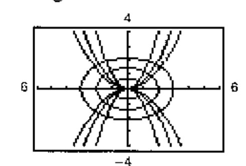


b) 1.31 años; 1.16 años; 1.05 años *c*) 1 200 lb

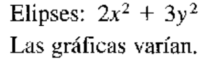
61. Circunferencias: $x^2 + y^2 = C$
Rectas: $y = Kx$
Las gráficas varían.

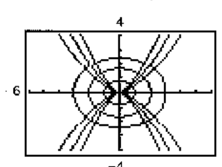


63. Parábolas: $x^2 = Cy$
Elipses: $x^2 + 2y^2 = K$
Las gráficas varían.



65. Curvas: $y^2 = Cx^3$
Elipses: $2x^2 + 3y^2 = K$
Las gráficas varían.

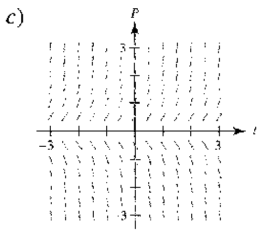




67. d **68.** a **69.** b **70.** c

71. *a*) 0.75 *b*) 1 500 unidades *c*) 60 unidades *d*) 4.24 años
e) $dP/dt = 0.75P(1 - P/1\,500)$

73. *a*) 3 *b*) 100 unidades
c)



d) 50 unidades

75. $y = 40/(1 + 4e^{-t})$ **77.** $y = 120/(1 + 14e^{-0.8t})$

79. *a*) $P = \dfrac{200}{1 + 7e^{-0.2640t}}$ *b*) 70 panteras *c*) 7.37 años
d) $dP/dt = 0.2640P(1 - P/200)$; 65.6 *e*) 100 años

81. Las respuestas varían.

83. Dos familias de curvas son mutuamente ortogonales si toda curva de la primer familia interseca a toda curva de la seguna familia en águlo recto.

85. Falso. $y' = x/y$ es separable, pero $y = 0$ no es una solución.

87. Falso: $f(tx, ty) \neq t^n f(x, y)$. **89.** Demostración

Sección 6.4 (página 438)

1. Lineal; se puede escribir de la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$

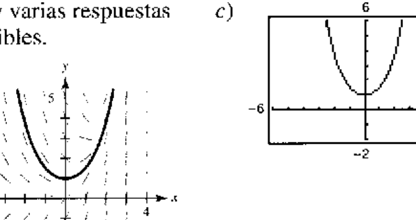
3. No lineal; no se puede escribir de la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$

5. $y = x^2 + 2x + C/x$ **7.** $y = -10 + Ce^x$

9. $y = -1 + Ce^{\operatorname{sen} x}$ **11.** $y = (x^3 - 3x + C)/[3(x - 1)]$

13. $y = e^{x^3}(x + C)$

15. *a*) Hay varias respuestas posibles. *c*)



b) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

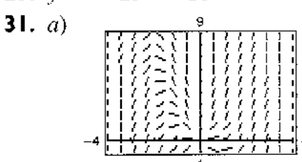
17. $y = 1 + 4/e^{\tan x}$ **19.** $y = \operatorname{sen} x + (x + 1)\cos x$

21. $xy = 4$ **23.** $y = -2 + x\ln|x| + 12x$

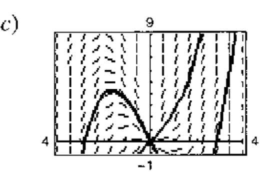
25. $1/y^2 = Ce^{2x^3} + \frac{1}{3}$ **27.** $y = 1/(Cx - x^2)$

29. $y^{2/3} = 2e^x + Ce^{2x/3}$

31. *a*)

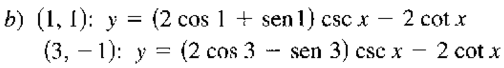


c)



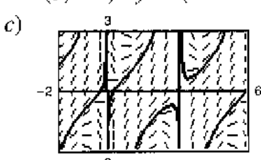
b) $(-2, 4)$: $y = \frac{1}{2}x(x^2 - 8)$
$(2, 8)$: $y = \frac{1}{2}x(x^2 + 4)$

33. *a*)



b) $(1, 1)$: $y = (2\cos 1 + \operatorname{sen} 1)\csc x - 2\cot x$
$(3, -1)$: $y = (2\cos 3 - \operatorname{sen} 3)\csc x - 2\cot x$

c)



35. $P = -N/k + (N/k + P_0)e^{kt}$

37. *a*) \$583 098.01 *b*) \$3 243 606.35

39. *a)* $\frac{dQ}{dt} = q - kQ$ *b)* $Q = \frac{q}{k} + \left(Q_0 - \frac{q}{k}\right)e^{-kt}$ *c)* $\frac{q}{k}$

41. Demostración

43. *a)* $Q = 25e^{-t/20}$ *b)* $-20\ln(\frac{3}{5}) \approx 10.2$ min *c)* 0

45. *a)* $t = 50$ min *b)* $100 - \frac{25}{\sqrt{2}} \approx 82.32$ lb

47. $V(t) = -159.47(1 - e^{-0.2007t})$; -159.47 pies/seg

49. $I = \frac{E_0}{R} + Ce^{-Rt/L}$ **51.** $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$; $u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

53. c **54.** d **55.** a **56.** b **57.** $2e^x + e^{-2y} = C$

59. $y = Ce^{-\operatorname{sen} x} + 1$ **61.** $x^3y^2 + x^4y = C$

63. $y = [e^x(x - 1) + C]/x^2$ **65.** $x^4y^4 - 2x^2 = C$

67. $y = \frac{12}{5}x^2 + C/x^3$ **69.** Falso. $y' + xy = x^2$ es lineal.

Ejercicios de repaso del capítulo 6 (página 441)

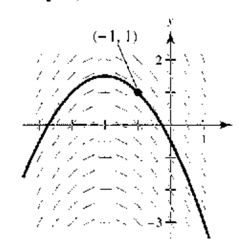
1. No **3.** $y = \frac{2}{3}x^3 + 5x + C$ **5.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

7. $y = 4(x - 7)^{3/2}(3x + 14)/15 + C$

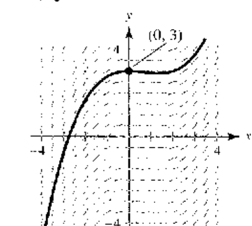
9.

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	-4	No def.	0	1	$\frac{4}{3}$	2

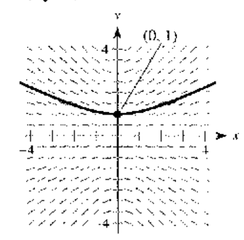
11. *a)* y *b)*



13. *a)* y *b)*



15. *a)* y *b)*



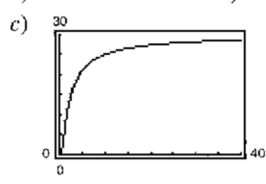
17. $y = 6x - \frac{1}{2}x^2 + C$

19. $y = -3 - 1/(x + c)$ **21.** $y = Ce^x/(2 + x)^2$

23. $y = \frac{3}{4}e^{0.379t}$ **25.** $y = 5e^{-0.680t}$ **27.** ≈ 7.79 pulg

29. *a)* $S \approx 30e^{-1.7918/t}$ *b)* 20 965 unidades

c)

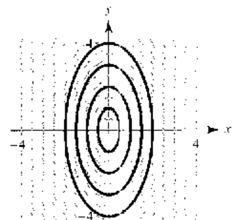


31. Aproximadamente 46. 2 años **33.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3\ln|x| + C$

35. $y = Ce^{x^2}$ **37.** $x/(x^2 - y^2) = C$

39. Demostración; $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$

41.



Las gráficas varían.
$4x^2 + y^2 = C$

43. *a)* 0.55 *b)* 7 200 *c)* 160 *d)* 6.88 años

e) $\frac{dP}{dt} = 0.55P\left(1 - \frac{P}{7\,200}\right)$

45. *a)* $P(t) = \frac{20\,400}{1 + 16e^{-0.553t}}$ *b)* 17 118 truchas *c)* 4.94 años

47. $y = -8 + Ce^x$ **49.** $y = e^{x/4}\left[\frac{1}{4}(x + C)\right]$

51. $y = (x + C)/(x - 2)$

53. $y = Ce^{3x} - \frac{1}{13}(2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x)$

55. $y = e^{5x}/10 + Ce^{-5x}$ **57.** $y = 1/(1 + x + Ce^x)$

59. $y^2 = Cx^2 + 2/(3x)$

61. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta: $(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$; $x^3 = C(x^2 + y^2)$

63. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta: $x^3y' + 2x^2y = 1$; $x^2y = \ln|x| + C$

SP Solución de problemas (página 443)

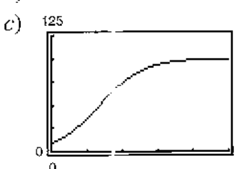
1. *a)* $y = 1/(1 - 0.01t)^{100}$; $T = 100$

b) $y = 1\Big/\left[\left(\frac{1}{y_0}\right)^{\varepsilon} - k\varepsilon t\right]^{1/\varepsilon}$; Hay varias respuestas posibles.

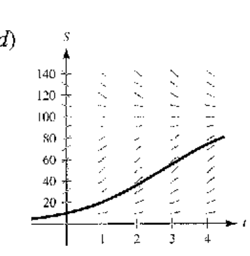
3. *a)* $dS/dt = kS(L - S)$; $S = 100/(1 + 9e^{-0.8109t})$

b) 2.7 meses

c)



d)

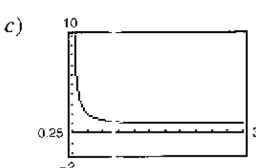


e) Las ventas disminuirán hacia la recta $S = L$.

5. Demostración **7.** *a)* 9 809.1 seg *b)* 7.21 pies

9. *a)* (1.155, 0) *b)* $\left(\frac{h\sqrt{2 + h}}{2h + 4 - 3\sqrt{2 + h}} - 1, 0\right)$

c)



Existe una asíntota vertical en $h = \frac{1}{4}$, que es la altura de la montaña.

11. *a)* $C = C_0e^{-Rt/V}$ *b)* $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$

13. *a)* $C = (Q/R)(1 - e^{-Rt/V})$ *b)* $\lim_{t\to\infty} C(t) = Q/R$

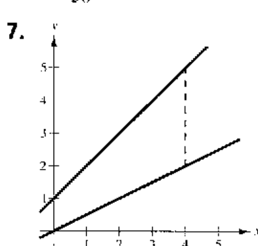
Capítulo 7

Sección 7.1 (página 452)

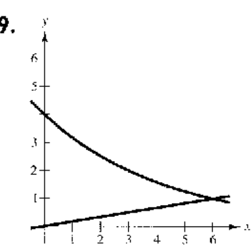
1. $-\int_0^6 (x^2 - 6x)\,dx$ **3.** $\int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx$

5. $-6\int_0^1 (x^3 - x)\,dx$

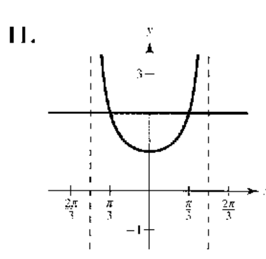
7.



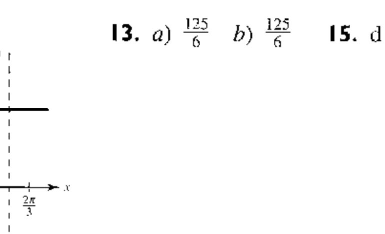
9.



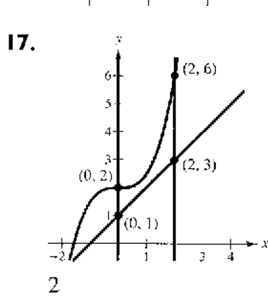
11.



13. *a)* $\frac{125}{6}$ *b)* $\frac{125}{6}$ **15.** d

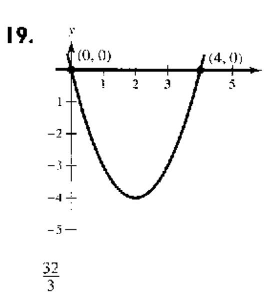


17.



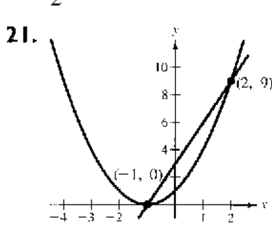
2

19.



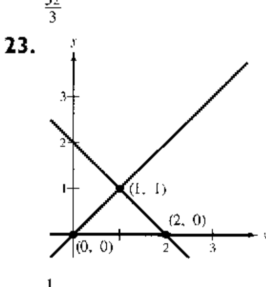
$\frac{32}{3}$

21.



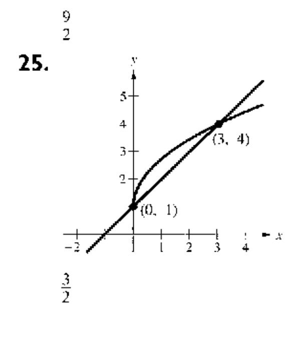
$\frac{9}{2}$

23.



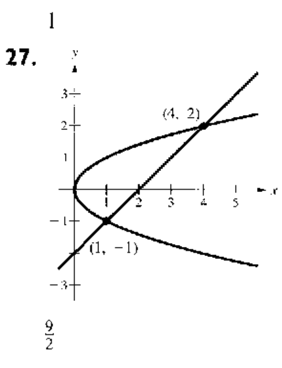
1

25.



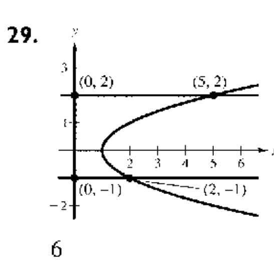
$\frac{3}{2}$

27.



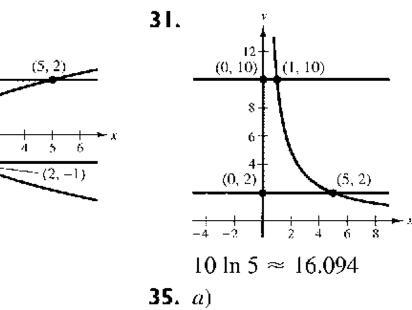
$\frac{9}{2}$

29.



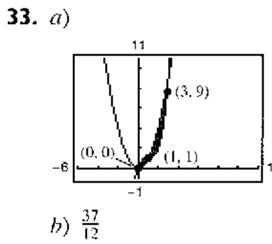
6

31.



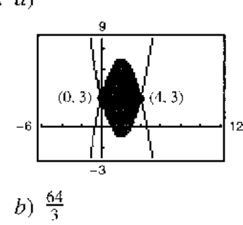
$10 \ln 5 \approx 16.094$

33. *a)*



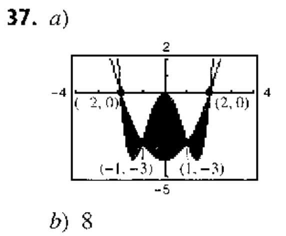
b) $\frac{37}{12}$

35. *a)*



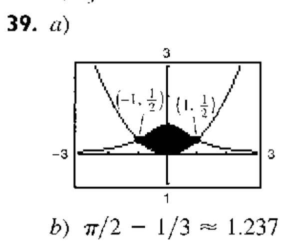
b) $\frac{64}{3}$

37. *a)*



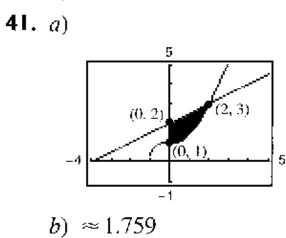
b) 8

39. *a)*



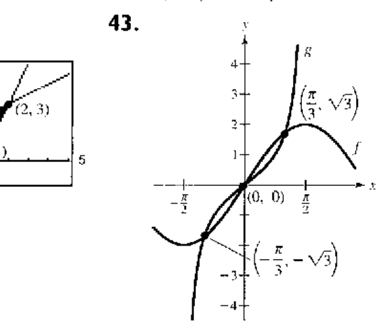
b) $\pi/2 - 1/3 \approx 1.237$

41. *a)*



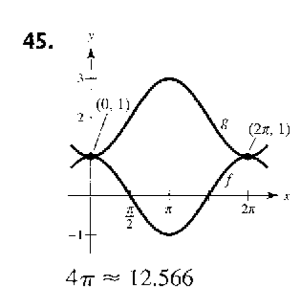
b) ≈ 1.759

43.



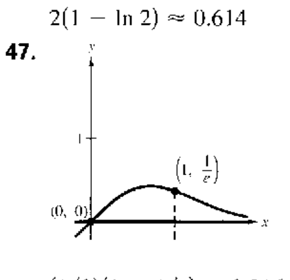
$2(1 - \ln 2) \approx 0.614$

45.



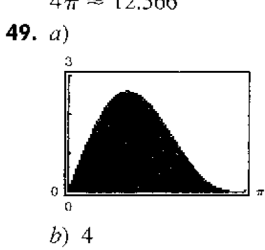
$4\pi \approx 12.566$

47.



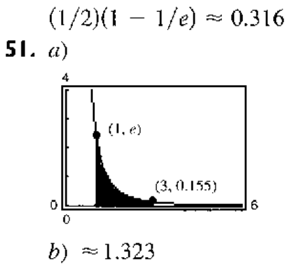
$(1/2)(1 - 1/e) \approx 0.316$

49. *a)*



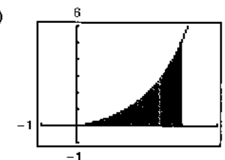
b) 4

51. *a)*



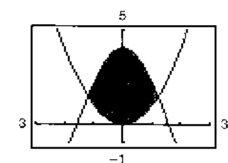
b) ≈ 1.323

53. *a)*



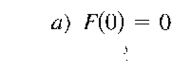
b) Es complicado integrar la función.
c) ≈ 4.772

55. *a)*

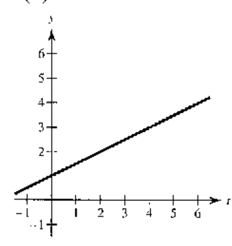


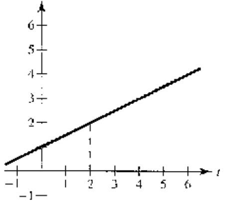
b) Es difícil encontrar las intersecciones.
c) ≈ 6.304

57. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

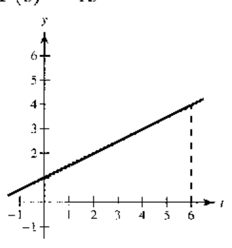


a) $F(0) = 0$ *b)* $F(2) = 3$

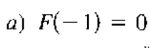




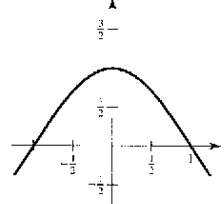
c) $F(6) = 15$

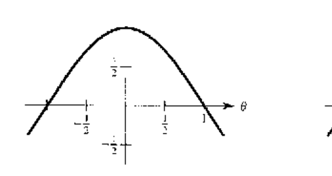


59. $F(\alpha) = (2/\pi)[\operatorname{sen}(\pi\alpha/2) + 1]$

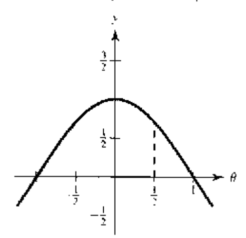


a) $F(-1) = 0$ *b)* $F(0) = 2/\pi \approx 0.6366$





c) $F(1/2) = (\sqrt{2} + 2)/\pi \approx 1.0868$



61. 14 **63.** 16

65. Hay varias respuestas posibles. Ejemplos de respuesta:
a) ≈ 846 pies^2 *b)* ≈ 848 pies^2

67. $\int_{-2}^{1} [x^3 - (3x - 2)]\, dx = \frac{27}{4}$

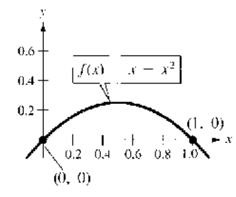
69. $\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2 + 1} - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] dx \approx 0.0354$

71. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $x^4 - 2x^2 + 1 \leq 1 - x^2$ en $[-1, 1]$, $\int_{-1}^{1} [(1 - x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)]\, dx = \frac{4}{15}$

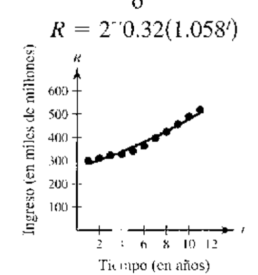
73. La oferta 2 es mejor porque el salario acumulado (área bajo la curva) es mayor.

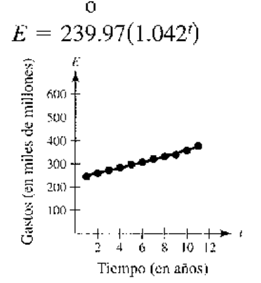
75. $b = 9(1 - 1/\sqrt[3]{4}) \approx 3.330$ **77.** $a = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.172$

79. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta: $\frac{1}{6}$ **81.** \$1.625 mil millones



83. *a)* $R = 270.32e^{0.057t}$ o $R = 270.32(1.058^t)$ *b)* $E = 239.97e^{0.040t}$ o $E = 239.97(1.042^t)$





c) Ejemplo de respuesta: ≈ 931.6 mil millones
d) No. El modelo para los ingresos totales crecen a mayor ritmo o velocidad que el modelo de los gastos totales. No.

85. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuesta: \$193 156

87. *a)* $k = 3.25$ *b)* 13.02083

89. *a)* 5.908 m^2 *b)* 11.816 m^3 *c)* 59 082 lb

91. Cierto **93.** $\sqrt{3}/2 + 7\pi/24 \approx 2.7823$

95. Problema Putnam A1, 1993

Sección 7.2 (página 463)

1. $\pi\int_0^1 (-x + 1)^2\, dx = \frac{\pi}{3}$ **3.** $\pi\int_1^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \frac{15\pi}{2}$

5. $\pi\int_0^1 [(x^2)^2 - (x^3)^2]\, dx = \frac{2\pi}{35}$ **7.** $\pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2\, dy = 8\pi$

9. $\pi\int_0^1 (y^{3/2})^2\, dy = \frac{\pi}{4}$

11. *a)* 8π *b)* $128\pi/5$ *c)* $256\pi/15$ *d)* $192\pi/5$

13. *a)* $32\pi/3$ *b)* $64\pi/3$ **15.** 18π

17. $\pi(16 \ln 2 - \frac{3}{4}) \approx 32.485$ **19.** $208\pi/3$ **21.** $384\pi/5$

23. $\pi \ln 4$ **25.** $3\pi/4$ **27.** $(\pi/2)(1 - 1/e^2) \approx 1.358$

29. $277\pi/3$ **31.** 8π **33.** $\pi^2/2 \approx 4.935$

35. $(\pi/2)(e^2 - 1) \approx 10.036$ **37.** 1.969 **39.** 15.4115

41. Una curva seno desde $[0, \pi/2]$ girada con respecto al eje x.

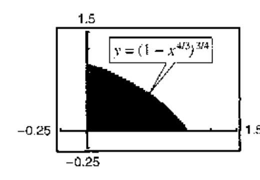
43. *a)* El área parece estar cerca de 1 y por tanto, el volumen (Área$^2 \times \pi$) estará cerca de 3.

45. La parábola $y = 4x - x^2$ es una traslación horizontal de la parábola $y = 4 - x^2$. Por tanto, sus volúmenes son iguales.
47. 18π **49.** Demostración **51.** $\pi r^2 h[1 - h/H + h^2/(3H^2)]$
53. $\pi/30$ **55.** *a)* 60π *b)* 50π
57. Un cuarto: 32.64 pies; Tres cuartos: 67.36 pies
59. *a)* ii; Cilindro recto circular con radio r y altura h
b) iv; elipsoide cuya elipse subyacente tiene la ecuación $(x/b)^2 + (y/a)^2 = 1$
c) iii; esfera con radio r
d) i; cono recto circular con radio r y altura h
e) v; toroide con radio transversal r y demás radios R
61. *a)* $\frac{81}{10}$ *b)* $\frac{9}{2}$
63. *a)* $1/10$ *b)* $\pi/80$ *c)* $\sqrt{3}/40$ *d)* $\pi/20$
65. $V = \frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)^{3/2}$ **67.** $\pi/3$ **69.** $2\pi/15$
71. $\pi/2$ **73.** $\pi/6$
75. *a)* Cuando $a = 1$: representa un cuadrado
Cuando $a = 2$: representa un círculo
b) $A = 4\int_0^1 (1 - x^a)^{1/a}\, dx$
Para calcular el volumen de un sólido, se forman n cortes cuyas áreas se aproximan mediante la integral anterior. Después se suman los volúmenes de estos n **cortes**.
77. *a)* Demostración *b)* $V = 2\pi^2 r^2 R$

Sección 7.3 (página 472)

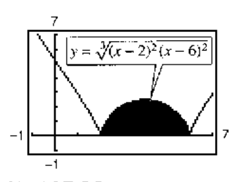
1. $2\pi\int_0^2 x^2\, dx = \frac{16\pi}{3}$ **3.** $2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx = \frac{128\pi}{5}$
5. $2\pi\int_0^2 x^3\, dx = 8\pi$ **7.** $2\pi\int_0^2 x(4x - 2x^2)\, dx = \frac{16\pi}{3}$
9. $2\pi\int_0^2 x(x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{8\pi}{3}$
11. $2\pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0.986$
13. $2\pi\int_0^2 y(2 - y)\, dy = \frac{8\pi}{3}$
15. $2\pi\left[\int_0^{1/2} y\, dy + \int_{1/2}^1 y\left(\frac{1}{y} - 1\right) dy\right] = \frac{\pi}{2}$
17. $2\pi\left[\int_0^8 y^{4/3}\, dy\right] = \frac{768\pi}{7}$ **19.** $2\pi\int_0^2 y(4 - 2y)\, dy = 16\pi/3$
21. 16π **23.** 64π
25. Método de las capas; es mucho más sencillo expresar x en términos de y que a la inversa.
27. *a)* $128\pi/7$ *b)* $64\pi/5$ *c)* $96\pi/5$
29. *a)* $\pi a^3/15$ *b)* $\pi a^3/15$ *c)* $4\pi a^3/15$
31. *a)* Los rectángulos serán verticales.
b) Los rectángulos serán horizontales.
33. Ambas integrales dan el volumen del sólido generado por el giro de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$ y $x = 5$ respecto al eje x.

35. *a)*



b) 1.506

37. *a)*

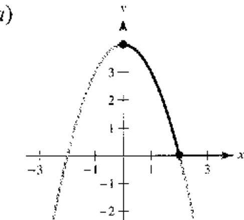


b) 187.25

39. d **41.** Diámetro $= 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \approx 1.464$ **43.** $4\pi^2$
45. *a)* Demostración *b)* *i)* $V = 2\pi$ *ii)* $V = 6\pi^2$
47. *a)* región limitada por $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 2$
b) girada respecto al eje y
49. *a)* región delimitada por $x = \sqrt{6 - y}, y = 0, x = 0$
b) girada respecto a $y = -2$
51. Demostración
53. *a)* $R_1(n) = n/(n + 1)$ *b)* $\lim_{n\to\infty} R_1(n) = 1$
c) $R_2(n) = n/(n + 2)$ *d)* $\lim_{n\to\infty} R_2(n) = 1$
e) A medida que $n \to \infty$, la gráfica se aproxima a la recta $x = 1$.
55. *a)* $\approx 121\,475$ pies^3 *b)* $\approx 121\,475$ pies^3
57. *a)* $64\pi/3$ *b)* $2\,048\pi/35$ *c)* $8\,192\pi/105$ **59.** $c = 2$

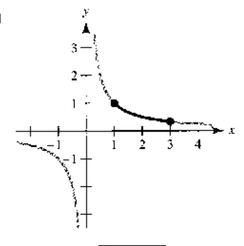
Sección 7.4 (página 483)

1. *a)* y *b)* 13 **3.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1.219$
5. $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \approx 8.352$ **7.** $779/240 \approx 3.246$
9. $\ln[(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1)] \approx 1.763$
11. $\frac{1}{2}(e^2 - 1/e^2) \approx 3.627$ **13.** $\frac{76}{3}$
15. *a)*



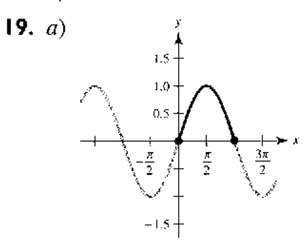
b) $\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$
c) ≈ 4.647

17. *a)*



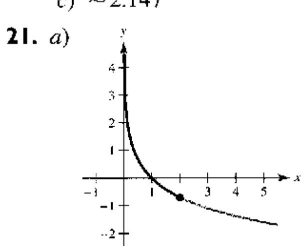
b) $\int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$
c) ≈ 2.147

19. *a)*



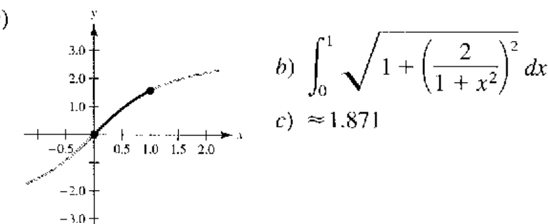
b) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$
c) ≈ 3.820

21. *a)*



b) $\int_0^2 \sqrt{1 + e^{-2y}}\, dy = \int_{e^{-2}}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$
c) ≈ 2.221

23. *a)*

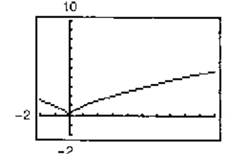


b) $\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}\,dx$

c) ≈ 1.871

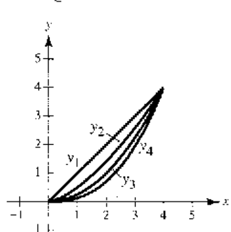
25. b **27.** *a)* 64.125 *b)* 64.525 *c)* 64.666 *d)* 64.672

29. *a)*



b) No; $f'(0)$ no está definida.
c) ≈ 10.5131

31. *a)*



b) y_1, y_2, y_3, y_4
c) $s_1 \approx 5.657$; $s_2 \approx 5.759$; $s_3 \approx 5.916$; $s_4 \approx 6.063$

33. El objeto en escape: $\frac{2}{3}$ unidad

Perseguidor: $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)$

35. $20[\operatorname{senh} 1 - \operatorname{senh}(-1)] \approx 47.0$ m **37.** $3 \operatorname{arcsen}\frac{2}{3} \approx 2.1892$

39. $2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82}-1\right) \approx 258.85$

41. $2\pi\int_1^2 \left(\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx = \frac{47\pi}{16} \approx 9.23$

43. $2\pi\int_1^8 x\sqrt{1+\frac{1}{9x^{4/3}}}\,dx = \frac{\pi}{27}\left(145\sqrt{145}-10\sqrt{10}\right) \approx 199.48$

45. 14.424

47. Una curva rectificable es la que tiene una longitud de arco finita.

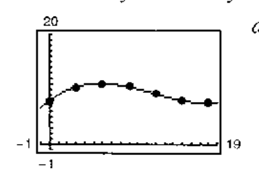
49. La fórmula de integración para el área de una superficie de revolución se deduce de la fórmula para el área lateral de un cono recto circular. La fórmula es $S = 2\pi rL$, donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, que es el radio promedio del tronco y L es la longitud del segmento de recta del tronco.

51. Demostración **53.** $6\pi\left(3-\sqrt{5}\right) \approx 14.40$

55. Área total $= \pi/27$ pies$^2 \approx 16.8$ pulg^2

Cantidad de vidrio $= (\pi/27)(0.015/12)$ pies^3
≈ 0.00015 pies^3
≈ 0.25 pulg^3

57. *a)* Hay varias respuestas posibles. Ejemplos de respuesta: 5 207.62 pulg^3
b) Hay varias respuestas posibles. Ejemplos de respuesta: 1 168.64 pulg^2
c) $r = 0.0040y^3 - 0.142y^2 + 1.23y + 7.9$



d) 5 279.64 pulg^3; 1 179.5 pulg^2

59. *a)* $\pi(1 - 1/b)$ *b)* $2\pi\int_1^b \sqrt{x^4+1}/x^3\,dx$

c) $\lim_{b\to\infty} V = \lim_{b\to\infty} \pi(1 - 1/b) = \pi$

d) Puesto que $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x} > 0$ en $[1, b]$,

se tiene $\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx > \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^b = \ln b$

y $\lim_{b\to\infty} \ln b \to \infty$. De tal modo, $\lim_{b\to\infty} 2\pi\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx = \infty$.

61. Hay varias respuestas posibles. **63.** $192\pi/5$ **65.** Demostración

67. Problema Putnam A1, 1939

Sección 7.5 (página 493)

1. 1 000 pies-lb **3.** 448 N-m

5. Si un objeto se mueve una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F, entonces el trabajo W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

7. c, d, a, b; el área bajo las curvas se incrementa en este orden.

9. 30.625 pulg-lb $\approx$ 2.55 pies-lb **11.** 8 750 N-cm = 87.5 N-m

13. 160 pulg-lb $\approx$ 13.3 pies-lb **15.** 37.125 pies-lb

17. *a)* 487.805 millas-ton $\approx 5.151 \times 10^9$ pies-lb
b) 1 395.349 millas-ton $\approx 1.473 \times 10^{10}$ pies-lb

19. *a)* 2.93×10^4 millas-ton $\approx 3.10 \times 10^{11}$ pies-lb
b) 3.38×10^4 millas-ton $\approx 3.57 \times 10^{11}$ pies-lb

21. *a)* 2 496 pies-lb *b)* 9 984 pies-lb **23.** $470\,400\pi$ N-m

25. $2\,995.2\pi$ pies-lb **27.** $20\,217.6\pi$ pies-lb **29.** $2\,457\pi$ pies-lb

31. 337.5 pies-lb **33.** 300 pies-lb **35.** 168.75 pies-lb

37. 7 987.5 pies-lb **39.** 2 000 ln(3/2) $\approx$ 810.93 pies-lb **41.** $3k/4$

43. 3 249.4 pies-lb **45.** 10 330.3 pies-lb

Sección 7.6 (página 504)

1. $\bar{x} = -\frac{6}{7}$ **3.** $\bar{x} = 12$ **5.** *a)* $\bar{x} = 17$ *b)* $\bar{x} = -3$

7. $x = 6$ pies **9.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{1}{9}\right)$ **11.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5}{8}, \frac{13}{16}\right)$

13. $M_x = 4\rho$, $M_y = 64\rho/5$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (12/5, 3/4)$

15. $M_x = \rho/35$, $M_y = \rho/20$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/5, 12/35)$

17. $M_x = 99\rho/5$, $M_y = 27\rho/4$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/2, 22/5)$

19. $M_x = 192\rho/7$, $M_y = 96\rho$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (5, 10/7)$

21. $M_x = 0$, $M_y = 256\rho/15$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (8/5, 0)$

23. $M_x = 27\rho/4$, $M_y = -27\rho/10$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (-3/5, 3/2)$

25. $A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$

$M_x = \int_0^1 \left(\frac{x+x^2}{2}\right)(x - x^2)\,dx = \frac{1}{15}$

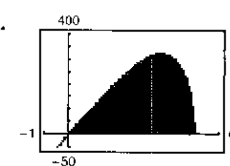
$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)\,dx = \frac{1}{12}$

27. $A = \int_0^3 (2x + 4)\,dx = 21$

$M_x = \int_0^3 \left(\frac{2x+4}{2}\right)(2x + 4)\,dx = 78$

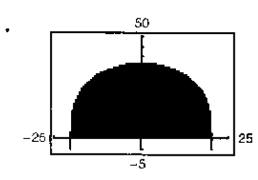
$M_y = \int_0^3 x(2x + 4)\,dx = 36$

29.



$(\bar{x}, \bar{y}) = (3.0, 126.0)$

31.

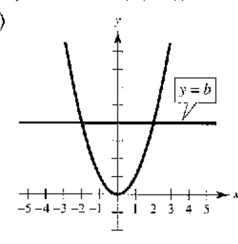


$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 16.2)$

33. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$ **35.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{(a + 2b)c}{3(a + b)}, \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}\right)$

37. $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4b/(3\pi))$

39. *a)*



b) $x = 0$ por simetría

c) $M_y = \displaystyle\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} x(b - x^2)\, dx = 0$ porque $x(b - x^2)$ es una función impar.

d) $\bar{y} > b/2$ porque el área es mayor para $y > b/2$.

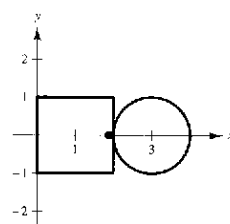
e) $\bar{y} = (3/5)b$

41. *a)* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12.98)$

b) $y = (-1.02 \times 10^{-5})x^4 - 0.0019x^2 + 29.28$

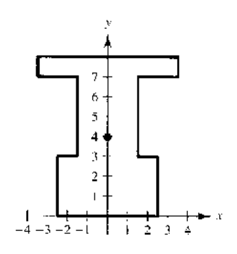
c) $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12.85)$

43.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{4 + 3\pi}{4 + \pi}, 0\right)$

45.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{135}{34}\right)$

47. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2 + 3\pi}{2 + \pi}, 0\right)$ **49.** $160\pi^2 \approx 1\,579.14$

51. $128\pi/3 \approx 134.04$

53. El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es $\bar{x} = M_y/m$ y $\bar{y} = M_x/m$, donde:

1. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema.
2. $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$ es el momento respecto al eje y.
3. $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n$ es el momento respecto al eje x.

55. *a)* $\left(\frac{5}{6}, 2\frac{5}{18}\right)$; la región plana se trasladó 2 unidades hacia arriba.

b) $\left(2\frac{5}{6}, \frac{5}{18}\right)$; la región plana se trasladó 2 unidades hacia la derecha.

c) $\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{18}\right)$; la región plana se reflejó respecto al eje x.

d) No es posible

57. $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2r/\pi)$

59. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{n + 1}{n + 2}, \dfrac{n + 1}{4n + 2}\right)$; A medida que As $n \to \infty$, la región se contrae hacia los segmentos de recta $y = 0$ para $0 \le x \le 1$ y $x = 1$ para $0 \le y \le 1$; $(\bar{x}, \bar{y}) \to \left(1, \dfrac{1}{4}\right)$.

Sección 7.7 (página 511)

1. 936 lb **3.** 748.8 lb **5.** 1 123.2 lb **7.** 748.8 lb
9. 1 064.96 lb **11.** 117 600 N **13.** 2 381 400 N
15. 2 814 lb **17.** 6 753.6 lb **19.** 94.5 lb **21.** Demostración
23. Demostración **25.** 960 lb **27.** 3 010.8 lb **29.** 6 448.7 lb

31. *a)* $3\sqrt{2}/2 \approx 2.12$ pies

b) La presión aumenta al incrementarse la profundidad.

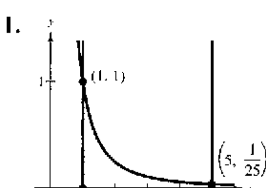
33. La fuerza del fluido F de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) contra una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$F = w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y = w\int_c^d h(y)L(y)\,dy$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y, y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.

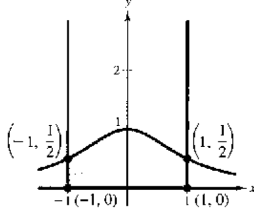
Ejercicios de repaso del capítulo 7 (página 513)

1.



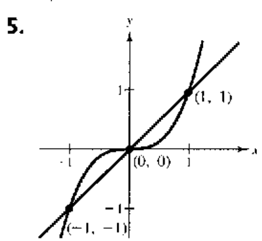
$4/5$

3.



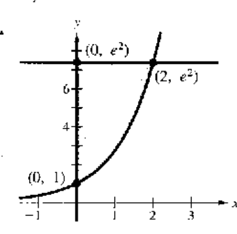
$\pi/2$

5.



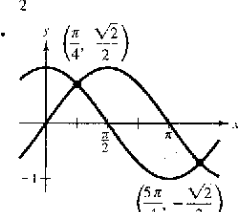
$\frac{1}{2}$

7.



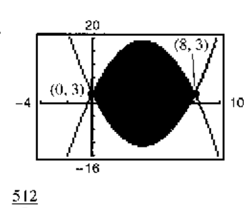
$e^2 + 1$

9.



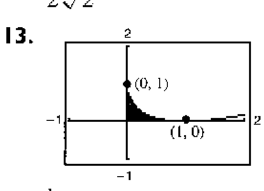
$2\sqrt{2}$

11.



$\frac{512}{3}$

13.



$\frac{1}{6}$

15. $\displaystyle\int_0^2 [0 - (y^2 - 2y)]\, dy = \int_{-1}^{0} 2\sqrt{x + 1}\, dx = \frac{4}{3}$

17. $\displaystyle\int_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] dx + \int_2^3 [1 - (x - 2)]\, dx$

$\displaystyle = \int_0^1 [(y + 2) - (2 - 2y)]\, dy = \frac{3}{2}$

19. Trabajo 1. En todos los años, el sueldo del trabajo 1 es mayor que el sueldo del trabajo 2, con excepción del primer y décimo años.

21. *a)* $64\pi/3$ *b)* $128\pi/3$ *c)* $64\pi/3$ *d)* $160\pi/3$

23. *a)* 64π *b)* 48π **25.** $\pi^2/4$

27. $(4\pi/3)(20 - 9\ln 3) \approx 42.359$ **29.** $\frac{4}{15}$ **31.** 1.958 pies

33. $\frac{8}{15}(1 + 6\sqrt{3}) \approx 6.076$ **35.** 4 018.2 pies

37. 15π **39.** 50 pulg-lb $\approx$ 4.167 pies-lb

41. $104\,000\pi$ pies-lb $\approx$ 163.4 pies-tons **43.** 250 pies-lb

45. $a = 15/4$ **47.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (a/5, a/5)$ **49.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2a^2/5)$

51. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2(9\pi + 49)}{3(\pi + 9)}, 0\right)$

53. Sea D = la superficie del líquido; ρ = el peso por volumen cúbico.

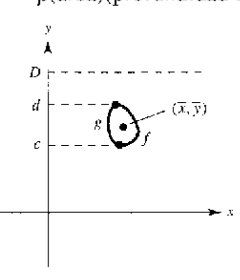
$$F = \rho\int_c^d (D - y)[f(y) - g(y)]\,dy$$

$$= \rho\left[\int_c^d D[f(y) - g(y)]\,dy - \int_c^d y[f(y) - g(y)]\,dy\right]$$

$$= \rho\left[\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy\right]\left[D - \frac{\int_c^d y[f(y) - g(y)]\,dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy}\right]$$

$$= \rho(\text{área})(D - \bar{y})$$

$$= \rho(\text{área})(\text{profundidad del centroide})$$



SP Solución de problemas (página 515)

1. 3 **3.** *a)* $4\pi^2$ *b)* $2\pi^2 r^2 R$ **5.** $\pi h^3/6$

7. *a)* El área S es 16 veces el área R.

b) Sea el punto A (a, a^3). La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en A es $y = 3a^2x - 2a^3$, y el punto B es $(-2a, -8a^3)$. El área R es

$$\int_{-2a}^{a} (x^3 - 3a^2x + 2a^3)\,dx = \frac{27a^4}{4}.$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en B es $y = 12a^2x + 16a^3$, y el punto C es $(4a, 64a^3)$. El área S es

$$\int_{-2a}^{4a} (12a^2x + 16a^3 - x^3)\,dx = 108a^4.$$

Por lo tanto, el área S es 16 veces el área R.

9. *a)* $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$

b) $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$; $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

c) $\int_1^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\,dt$

d) $s(2) \approx 2.0858$. Esta es la longitud de arco de la curva.

11.

a) $\left(\dfrac{12}{7}, 0\right)$

b) $\left(\dfrac{2b}{b + 1}, 0\right)$

c) $(2, 0)$

13. *a)* 12 *b)* 7.5

15. Excedente del consumidor: 1 600; excedente del productor: 400

17. Muro en el extremo bajo: 9 984 libras
Muro en el extremo profundo: 39 936 libras
Muro lateral: 19 968 + 26 624 = 46 592 libras

Capítulo 8

Sección 8.1 (página 522)

1. b **3.** c

5. $\int u^n\,du$, $u = 3x - 2$, $n = 4$ **7.** $\int \dfrac{du}{u}$, $u = 1 - 2\sqrt{x}$

9. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$, $u = t$, $a = 1$ **11.** $\int \operatorname{sen} u\,du$, $u = t^2$

13. $\int e^u\,du$, $u = \operatorname{sen} x$ **15.** $(x - 4)^6 + C$

17. $-5/[4(z - 4)^4] + C$ **19.** $\frac{1}{2}v^2 - 1/[6(3v - 1)^2] + C$

21. $-\frac{1}{3}\ln|-t^3 + 9t + 1| + C$ **23.** $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x - 1| + C$

25. $\ln(1 + e^x) + C$ **27.** $\frac{1}{15}x(12x^4 + 20x^2 + 15) + C$

29. $\operatorname{sen}(2\pi x^2)/(4\pi) + C$ **31.** $-(1/\pi)\csc \pi x + C$

33. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$ **35.** $2\ln(1 + e^x) + C$ **37.** $(\ln x)^2 + C$

39. $-\ln(1 - \operatorname{sen} x) + C = \ln|\sec x(\sec x + \tan x)| + C$

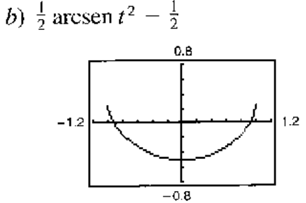
41. $\csc\theta + \cot\theta + C = (1 + \cos\theta)/\operatorname{sen}\theta + C$

43. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2t - 1) + C$ **45.** $\frac{1}{2}\ln|\cos(2/t)| + C$

47. $3\operatorname{arcsen}[(x - 3)/3] + C$ **49.** $\frac{1}{4}\arctan[(2x + 1)/8] + C$

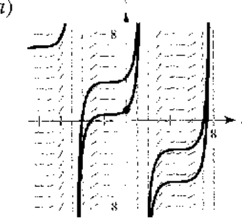
51. *a)*

b) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 - \frac{1}{2}$

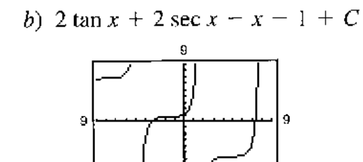


53.

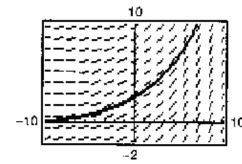
a)



b) $2\tan x + 2\sec x - x - 1 + C$



55. $y = 3e^{0.2x}$



57. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{x} + x + C$

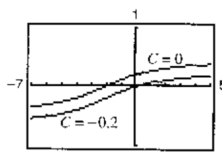
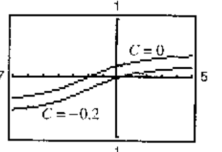
59. $y = \frac{1}{2}\arctan(\tan x/2) + C$ **61.** $\frac{1}{2}$

63. $\frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \approx 0.316$ **65.** 4 **67.** $\pi/18$

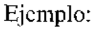
69. $5\sqrt{5} \approx 11.18$ **71.** $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{34}{9}\right) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 2.68$

73. $\frac{4}{3} \approx 1.333$

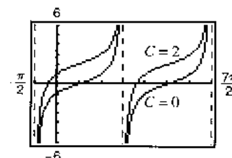
75. $\frac{1}{3}\arctan\left[\frac{1}{3}(x + 2)\right] + C$
Las gráficas varían.
Ejemplo:

Una gráfica es una traslación vertical de la otra.



77. $\tan\theta - \sec\theta + C$
Las gráficas varían.
Ejemplo:



Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

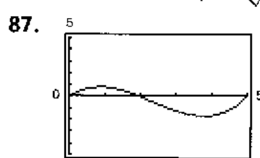
79. Regla de las potencias: $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$;
$u = x^2 + 1,\ du = 2x,\ n = 3$

81. Regla de los logaritmos: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;
$u = x^2 + 1,\ du = 2x$

83. Utilizando las leyes de los logaritmos, $y_1 = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$, donde e^{C_1} es una constante. Por lo tanto, e^{C_1} se puede reemplazar por C, dando como resultado $y_2 = Ce^x$.

85. $a = \sqrt{2},\ b = \frac{\pi}{4};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

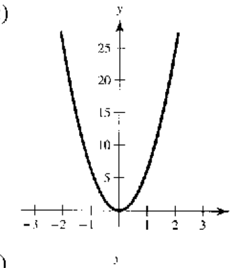
87.



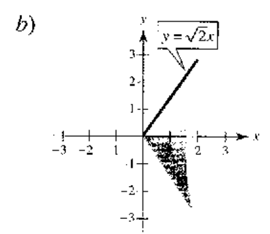
Negativa; hay más área bajo el eje x que sobre él

89. a

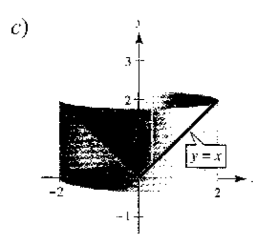
91. *a)*



b)



c)



93. *a)* $\pi(1 - e^{-1}) \approx 1.986$ *b)* $b = \sqrt{\ln\left(\frac{3\pi}{3\pi - 4}\right)} \approx 0.743$

95. $(8\pi/3)(10\sqrt{10} - 1) \approx 256.545$

97. $\frac{1}{3}\arctan 3 \approx 0.416$ **99.** ≈ 1.0320

101. *a)* $\frac{1}{3}\operatorname{sen}x(\cos^2 x + 2)$
b) $\frac{1}{15}\operatorname{sen}x(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)$
c) $\frac{1}{35}\operatorname{sen}x(5\cos^6 x + 6\cos^4 x + 8\cos^2 x + 16)$
d) Utilice la regla para reducir potencias, $\int\cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}\operatorname{sen}^n x}{n} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$ hasta que su integral sea $\int\cos x\,dx$, la cual entonces se puede integrar.

103. Demostración

Sección 8.2 (página 531)

1. b **2.** d **3.** c **4.** a **5.** $u = x,\ dv = e^{2x}\,dx$

7. $u = (\ln x)^2,\ dv = dx$ **9.** $u = x,\ dv = \sec^2 x\,dx$

11. $-(1/4e^{2x})(2x + 1) + C$ **13.** $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

15. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ **17.** $\frac{1}{4}[2(t^2 - 1)\ln|t + 1| - t^2 + 2t] + C$

19. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **21.** $e^{2x}/[4(2x + 1)] + C$

23. $(x - 1)^2e^x + C$ **25.** $\frac{2}{15}(x - 1)^{3/2}(3x + 2) + C$

27. $x\operatorname{sen}x + \cos x + C$

29. $(6x - x^3)\cos x + (3x^2 - 6)\operatorname{sen}x + C$

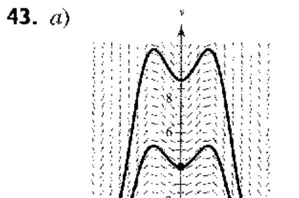
31. $-t\csc t - \ln|\csc t + \cot t| + C$

33. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

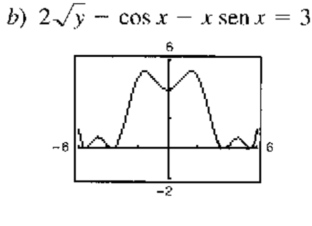
35. $\frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen}x - \cos x) + C$ **37.** $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

39. $y = \frac{2}{405}(27t^2 - 24t + 32)\sqrt{2 + 3t} + C$ **41.** $\operatorname{sen}y = x^2 + C$

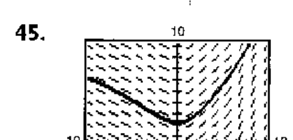
43. *a)*



b) $2\sqrt{y} - \cos x - x\operatorname{sen}x = 3$



45.



47. $4 - 12/e^2$ **49.** $\pi/2 - 1$

51. $(\pi - 3\sqrt{3} + 6)/6 \approx 0.658$

53. $\frac{1}{2}[e(\operatorname{sen}1 - \cos 1) + 1] \approx 0.909$

55. $(24\ln 2 - 7)/9 \approx 1.071$

57. $8\operatorname{arcsec}4 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{15}/2 - 2\pi/3 \approx 7.380$

59. $(e^{2x}/4)(2x^2 - 2x + 1) + C$

61. $(3x^2 - 6)\operatorname{sen}x - (x^3 - 6x)\cos x + C$

63. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$ **65.** $2(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$

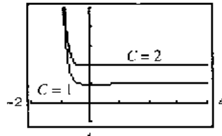
67. $\frac{128}{15}$ **69.** $\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + C$ **71.** Regla del producto

73. No **75.** Sí. Sean $u = x^2$ y $dv = e^{2x}\,dx$.

77. Sí. Sean $u = x,\ dv = \left(1\sqrt{x + 1}\right)dx$. (La sustitución también funciona. Sea $u = \sqrt{x + 1}$.)

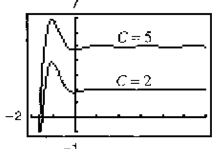
79. *a*) $-(e^{-4t}/128)(32t^3 + 24t^2 + 12t + 3) + C$

b) Las gráficas varían. Ejemplo: *c*) Una gráfica es una traslación vertical de la otra.



81. *a*) $\frac{1}{13}(2e^{-\pi} + 3) \approx 0.2374$

b) Las gráficas varían. Ejemplo: *c*) Una gráfica es una traslación vertical de la otra.



83. $\frac{2}{5}(2x - 3)^{3/2}(x + 1) + C$ **85.** $\frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2}(x^2 - 8) + C$

87. $n = 0$: $x(\ln x - 1) + C$

$n = 1$: $\frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 1) + C$

$n = 2$: $\frac{1}{9}x^3(3 \ln x - 1) + C$

$n = 3$: $\frac{1}{16}x^4(4 \ln x - 1) + C$

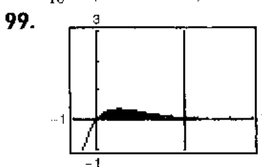
$n = 4$: $\frac{1}{25}x^5(5 \ln x - 1) + C$

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}[(n + 1) \ln x - 1] + C$$

89 a 93. Demostraciones

95. $\frac{1}{16}x^4(4 \ln x - 1) + C$ **97.** $\frac{1}{13}e^{2x}(2 \cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x) + C$

99. **101.**



$1 - \frac{5}{e^4} \approx 0.908$ $\frac{\pi}{1 + \pi^2}\left(\frac{1}{e} + 1\right) \approx 0.395$

103. *a*) 1 *b*) $\pi(e - 2) \approx 2.257$ *c*) $\frac{1}{2}\pi(e^2 + 1) \approx 13.177$

d) $\left(\frac{e^2 + 1}{4}, \frac{e - 2}{2}\right) \approx (2.097, 0.359)$

105. En el ejemplo 6, se demostró que el centroide de una región equivalente era $(1, \pi/8)$. Por simetría, el centroide de esta región es $(1, \pi/8)$.

107. $[7/(10\pi)](1 - e^{-4\pi}) \approx 0.223$ **109.** \$931 265

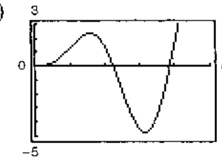
111. Demostración **113.** $b_n = [8h/(n\pi)^2] \operatorname{sen}(n\pi/2)$

115. Capas: $V = \pi\left[b^2f(b) - a^2f(a) - \int_a^b x^2 f'(x)\, dx\right]$

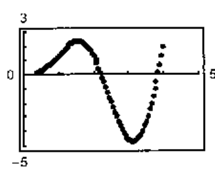
Disco: $V = \pi\left[b^2f(b) - a^2f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2\, dy\right]$

Ambos métodos dan el mismo volumen porque $x = f^{-1}(y)$, $f'(x)\, dx = dy$, si $y = f(a)$ entonces $x = a$, y si $y = f(b)$ entonces $x = b$.

117. *a*) $y = \frac{1}{4}(3 \operatorname{sen} 2x - 6x \cos 2x)$ *b*)

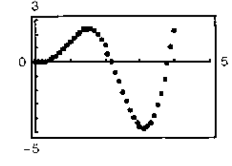


c) Usted obtiene los siguientes puntos.



n	x^n	y^n
0	0	0
1	0.05	0.000250
2	0.10	0.001992
3	0.15	0.006689
4	0.20	0.015745
80	4.00	1.615019

d) Se obtienen los siguientes puntos.



n	x^n	y^n
0	0	0
1	0.1	0.001992
2	0.2	0.015745
3	0.3	0.052081
4	0.4	0.119993
40	4.0	1.615019

e) A menor tamaño de paso, más datos.

119. La gráfica de $y = x \operatorname{sen} x$ se encuentra bajo la gráfica de $y = x$ en $[0, \pi/2]$.

Sección 8.3 (página 540)

1. c **2.** a **3.** d **4.** b

5. $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$ **7.** $\frac{1}{12}\operatorname{sen}^6 2x + C$

9. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

11. $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}\theta - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^{7/2}\theta + C$ **13.** $\frac{1}{12}(6x + \operatorname{sen} 6x) + C$

15. $\frac{1}{8}(\alpha - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\alpha) + C$ o $\frac{1}{8}\alpha - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4\alpha + C$

17. $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x \operatorname{sen} 2x - \cos 2x) + C$ **19.** $\frac{2}{3}$ **21.** $\frac{16}{35}$

23. $5\pi/32$ **25.** $\frac{1}{3}\ln|\sec 3x + \tan 3x| + C$

27. $\frac{1}{15}\tan 5x(3 + \tan^2 5x) + C$

29. $(\sec \pi x \tan \pi x + \ln|\sec \pi x + \tan \pi x|)/(2\pi) + C$

31. $\tan^4(x/4) - 2\tan^2(x/4) - 4\ln|\cos(x/4)| + C$

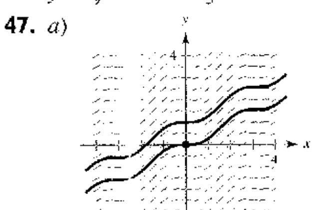
33. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **35.** $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$ **37.** $\frac{1}{24}\sec^6 4x + C$

39. $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **41.** $\ln|\sec x + \tan x| - \operatorname{sen} x + C$

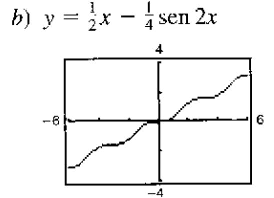
43. $(12\pi\theta - 8 \operatorname{sen} 2\pi\theta + \operatorname{sen} 4\pi\theta)/(32\pi) + C$

45. $y = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C$

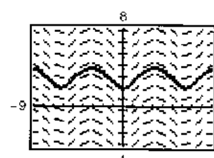
47. *a*)



b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$



49.



51. $-\frac{1}{10}(\cos 5x + 5\cos x) + C$

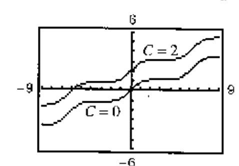
53. $\frac{1}{8}(2\,\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,4\theta) + C$ **55.** $\frac{1}{4}(\ln|\csc^2 2x| - \cot^2 2x) + C$

57. $-\cot\theta - \frac{1}{3}\cot^3\theta + C$ **59.** $\ln|\csc t - \cot t| + \cos t + C$

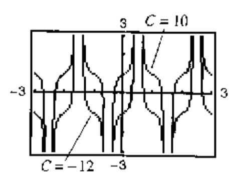
61. $\ln|\csc x - \cot x| + \cos x + C$ **63.** $t - 2\tan t + C$

65. π **67.** $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ **69.** $\ln 2$ **71.** $\frac{4}{3}$

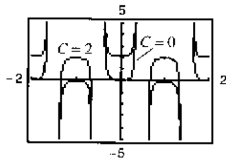
73. $\frac{1}{16}(6x + 8\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x) + C$
Las gráficas varían. Ejemplo:



75. $\left[\sec^3 \pi x \tan \pi x + \frac{3}{2}\left(\sec \pi x \tan \pi x + \ln|\sec \pi x + \tan \pi x|\right)\right]/(4\pi) + C$
Las gráficas varían. Ejemplo:

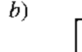


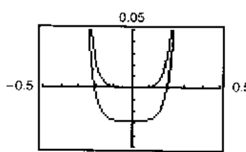
77. $(\sec^5 \pi x)/(5\pi) + C$ **79.** $3\sqrt{2}/10$ **81.** $3\pi/16$
Las gráficas varían. Ejemplo:



83. *a)* Conservar uno de los factores seno y convertir los demás factores en cosenos. Después, expandir e integrar factores.
b) Conservar uno de los factores coseno y convierta los demás en senos. Después, expandir e integrar.
c) Utilizar varias veces las fórmulas de reducción de potencias hasta convertir el integrando a potencias impares del coseno. Después continuar como en el apartado *b*).

85. *a)* $\frac{1}{18}\tan^6 3x + \frac{1}{12}\tan^4 3x + C_1$, $\frac{1}{18}\sec^6 3x - \frac{1}{12}\sec^4 3x + C_2$
b)





c) Demostración

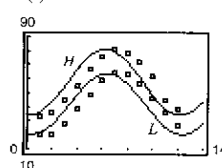
87. $\frac{1}{3}$ **89.** 1 **91.** $2\pi(1 - \pi/4) \approx 1.348$

93. *a)* $\pi^2/2$ *b)* $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, \pi/8)$ **95 a 97.** Demostraciones

99. $-\frac{1}{15}\cos x(3\,\text{sen}^4 x + 4\,\text{sen}^2 x + 8) + C$

101. $\dfrac{5}{6\pi}\tan\dfrac{2\pi x}{5}\left(\sec^2\dfrac{2\pi x}{5} + 2\right) + C$

103. *a)* $H(t) \approx 57.72 - 23.36\cos(\pi t/6) - 2.75\,\text{sen}(\pi t/6)$
b) $L(t) \approx 42.04 - 20.91\cos(\pi t/6) - 4.33\,\text{sen}(\pi t/6)$
c)



La diferencia máxima se encuentra en $t \approx 4.9$ o a principios del verano.

105. Demostración

Sección 8.4 (página 549)

1. b **2.** d **3.** a **4.** c **5.** $x/\left(25\sqrt{25 - x^2}\right) + C$

7. $5\ln\left|\left(5 - \sqrt{25 - x^2}\right)/x\right| + \sqrt{25 - x^2} + C$

9. $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + C$ **11.** $\frac{1}{15}(x^2 - 4)^{3/2}(3x^2 + 8) + C$

13. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{1}{2}[\arctan x + x/(1 + x^2)] + C$

17. $\frac{1}{2}x\sqrt{4 + 9x^2} + \frac{2}{3}\ln\left|3x + \sqrt{4 + 9x^2}\right| + C$

19. $\frac{25}{4}\,\text{arcsen}(2x/5) + \frac{1}{2}x\sqrt{25 - 4x^2} + C$

21. $\sqrt{x^2 + 9} + C$ **23.** $\text{arcsen}(x/4) + C$

25. $4\,\text{arcsen}(x/2) + x\sqrt{4 - x^2} + C$ **27.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 9}\right| + C$

29. $-\dfrac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$ **31.** $-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2 + 9} + 3}{2x}\right| + C$

33. $5\sqrt{x^2 + 5}/(x + 5) + C$ **35.** $\frac{1}{3}(1 + e^{2x})^{3/2} + C$

37. $\frac{1}{2}\left(\text{arcsen}\,e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\right) + C$

39. $\frac{1}{4}\left(x/(x^2 + 2) + \left(1/\sqrt{2}\right)\arctan\left(x/\sqrt{2}\right)\right) + C$

41. $x\,\text{arcsec}\,2x - \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right| + C$

43. $\text{arcsen}[(x - 2)/2] + C$

45. $\sqrt{x^2 + 4x + 8} - 2\ln\left|\sqrt{x^2 + 4x + 8} + (x + 2)\right| + C$

47. *a)* y *b)* $\sqrt{3} - \pi/3 \approx 0.685$

49. *a)* y *b)* $9\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 5.272$

51. *a)* y *b)* $-(9/2)\ln\left(2\sqrt{7}/3 - 4\sqrt{3}/3 - \sqrt{21}/3 + 8/3\right) + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{7} \approx 12.644$

53. $\sqrt{x^2 - 9} - 3\arctan\left(\sqrt{x^2 - 9}/3\right) + 1$

55. $\frac{1}{2}(x - 15)\sqrt{x^2 + 10x + 9} + 33\ln\left|\sqrt{x^2 + 10x + 9} + (x + 5)\right| + C$

57. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) + C$

59. *a)* Sea $u = a\,\text{sen}\,\theta$, $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.
b) Sea $u = a\tan\theta$, $\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
c) Sea $u = a\sec\theta$, $\sqrt{u^2 - a^2} = \tan\theta$ si $u > a$ y $\sqrt{u^2 - a^2} = -\tan\theta$ si $u < -a$, donde $0 \le \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \le \pi$.

61. $\ln\sqrt{x^2 + 9} + C$ **63.** Verdadero

65. Falso: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/3} \cos\theta\,d\theta$

67. πab **69.** *a)* $5\sqrt{2}$ *b)* $25(1 - \pi/4)$ *c)* $r^2(1 - \pi/4)$

71. $6\pi^2$ **73.** $\ln\left[\dfrac{5\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{26} + 1}\right] + \sqrt{26} - \sqrt{2} \approx 4.367$

75. Longitud de un arco de la curva seno: $y = \operatorname{sen} x,\ y' = \cos x$

$$L_1 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

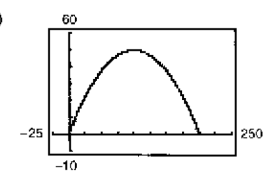
Longitud de un arco de la curva coseno: $y = \cos x,\ y' = -\operatorname{sen} x$

$$L_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2(x - \pi/2)}\, dx, \quad u = x - \pi/2,\ du = dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 + \cos^2 u}\, du = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u}\, du = L_1$$

77. *a)*



b) 200

c) $100\sqrt{2} + 50 \ln[(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1)] \approx 229.559$

79. $(0, 0.422)$ **81.** $(\pi/32)[102\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})] \approx 13.989$

83. *a)* 187.2π lb *b)* $62.4\pi d$ lb

85. Demostración **87.** $12 + 9\pi/2 - 25 \operatorname{arcsen}(3/5) \approx 10.050$

Sección 8.5 (página 559)

1. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 10}$ **3.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 10}$ **5.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 10}$

7. $\frac{1}{2} \ln|(x - 1)/(x + 1)| + C$ **9.** $\ln|(x - 1)/(x + 2)| + C$

11. $\frac{3}{2}\ln|2x - 1| - 2\ln|x + 1| + C$

13. $5\ln|x - 2| - \ln|x + 2| - 3\ln|x| + C$

15. $x^2 + \frac{3}{2}\ln|x - 4| - \frac{1}{2}\ln|x + 2| + C$

17. $1/x + \ln|x^4 + x^3| + C$

19. $2\ln|x - 2| - \ln|x| - 3/(x - 2) + C$

21. $\ln|(x^2 + 1)/x| + C$

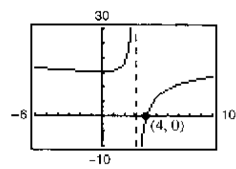
23. $\frac{1}{6}[\ln|(x - 2)/(x + 2)| + \sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2})] + C$

25. $\frac{1}{16}\ln|(4x^2 - 1)/(4x^2 + 1)| + C$

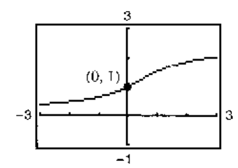
27. $\ln|x + 1| + \sqrt{2}\arctan[(x - 1)/\sqrt{2}] + C$

29. $\ln 2$ **31.** $\frac{1}{2}\ln(8/5) - \pi/4 + \arctan 2 \approx 0.557$

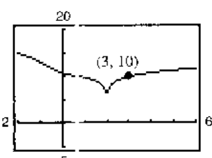
33. $y = 3\ln|x - 3| - 9/(x - 3) + 9$



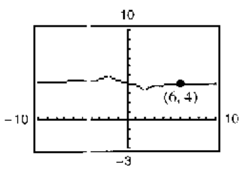
35. $y = (\sqrt{2}/2)\arctan(x/\sqrt{2}) - 1/[2(x^2 + 2)] + 5/4$



37. $y = \ln|x - 2| + \frac{1}{2}\ln|x^2 + x + 1|$
$- \sqrt{3}\arctan[(2x + 1)/\sqrt{3}] - \frac{1}{2}\ln 13$
$+ \sqrt{3}\arctan(7/\sqrt{3}) + 10$



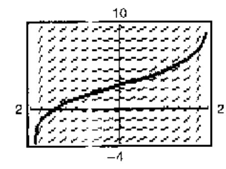
39. $y = \frac{1}{4}\ln|(x - 2)/(x + 2)| + \frac{1}{4}\ln 2 + 4$



41. $\ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right| + C$ **43.** $\ln\left|\dfrac{-1 + \operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x}\right| + C$

45. $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{e^x - 1}{e^x - 4}\right| + C$ **47 a 49.** Demostraciones

51. $y = \dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{2 + x}{2 - x}\right| + 3$ **53.** Dividir primero a x^3 entre $(x - 5)$.



55. *a)* Regla de los logaritmos *b)* Fracciones parciales
c) Regla de la tangente inversa

57. $12\ln(\frac{9}{8}) \approx 1.4134$ **59.** 4.90 o \$490 000

61. $V = 2\pi(\arctan 3 - \frac{3}{10}) \approx 5.963$; $(\bar{x}, \bar{y}) \approx (1.521, 0.412)$

63. $x = n[e^{(n+1)kt} - 1]/[n + e^{(n+1)kt}]$ **65.** $\pi/8$

Sección 8.6 (página 565)

1. $-\frac{1}{2}x(2 - x) + \ln|1 + x| + C$

3. $\frac{1}{2}[e^x\sqrt{e^{2x} + 1} + \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})] + C$

5. $-\sqrt{1 - x^2}/x + C$

7. $\frac{1}{16}(6x - 3\operatorname{sen} 2x\cos 2x - 2\operatorname{sen}^3 2x\cos 2x) + C$

9. $-2(\cot\sqrt{x} + \csc\sqrt{x}) + C$ **11.** $x - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C$

13. $\frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1) + C$

15. *a)* y *b)* $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

17. *a)* y *b)* $\ln|(x + 1)/x| - 1/x + C$

19. $\frac{1}{2}[(x^2 + 1)\operatorname{arcsec}(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2})] + C$

21. $\sqrt{x^2 - 4}/(4x) + C$ **23.** $\frac{2}{9}[\ln|1 - 3x| + 1/(1 - 3x)] + C$

25. $e^x\arccos(e^x) - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$

27. $\frac{1}{2}(x^2 + \cot x^2 + \csc x^2) + C$

29. $(\sqrt{2}/2)\arctan[(1 + \operatorname{sen}\theta)/\sqrt{2}] + C$

31. $-\sqrt{2 + 9x^2}/(2x) + C$

33. $\frac{1}{4}(2\ln|x| - 3\ln|3 + 2\ln|x||) + C$

35. $(3x - 10)/[2(x^2 - 6x + 10)] + \frac{3}{2}\arctan(x - 3) + C$

37. $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 3 + \sqrt{x^4 - 6x^2 + 5}| + C$

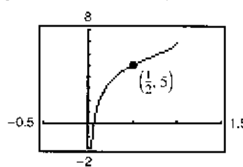
39. $-\frac{1}{3}\sqrt{4 - x^2}(x^2 + 8) + C$

41. $2/(1 + e^x) - 1/[2(1 + e^x)^2] + \ln(1 + e^x) + C$

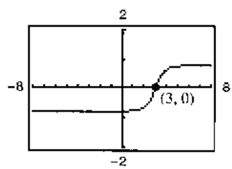
43. $\frac{1}{2}(e-1) \approx 0.8591$ **45.** $9\ln(3) - \frac{26}{9} \approx 6.9986$

47. $\pi/2$ **49.** $\pi^3/8 - 3\pi + 6 \approx 0.4510$ **51 a 55.** Demostraciones

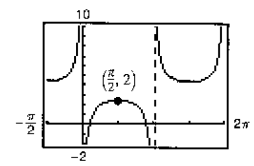
57. $y = -2\sqrt{1-x}/\sqrt{x} + 7$



59. $y = \frac{1}{2}[(x-3)/(x^2-6x+10) + \arctan(x-3)]$



61. $y = -\csc\theta + \sqrt{2} + 2$



63. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\tan(\theta/2) - 3 - \sqrt{5}}{2\tan(\theta/2) - 3 + \sqrt{5}}\right| + C$ **65.** $\ln 2$

67. $\frac{1}{2}\ln(3 - 2\cos\theta) + C$ **69.** $2\operatorname{sen}\sqrt{\theta} + C$ **71.** $\frac{40}{3}$

73. Utilícese la fórmula 23 y hágase $a = 1$, $u = e^x$ y $du = e^x\,dx$, porque tiene la forma $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$.

75. Utilícese la fórmula 81 y hágase $u = x^2$ and $du = 2x\,dx$, porque tiene la forma $\int e^u\,du$.

77. Imposible; no existe fórmula de integración apropiada.

79. *a)* $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

$\int x^3\ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$

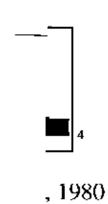
b) $\int x^n\ln x\,dx = x^{n+1}\ln x/(n+1) - x^{n+1}/(n+1)^2 + C$

81. Falso. Se tuvieron que hacer antes sustituciones para escribir la integral de la forma en que aparece en la tabla.

83. 1 919.145 pies-lb

85. *a)* $V = 80\ln(\sqrt{10}+3) \approx 145.5$ pies^3
$W = 11\,840\ln(\sqrt{10}+3) \approx 21\,530.4$ lb
b) (0, 1.19)

87. *a)* $k = 30/\ln 7 \approx 15.42$



, 1980

Sección 8.7 (página 574)

1.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	2.4132	2.4991	2.500	2.500	2.4991	2.4132

2.5

3.

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$	0.9900	90 483.7	3.7×10^9	4.5×10^{10}	0	0

0

5. $\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{1}{4}$ **9.** $\frac{5}{3}$ **11.** 3 **13.** 0 **15.** 2

17. ∞ **19.** $\frac{2}{3}$ **21.** 1 **23.** $\frac{3}{2}$ **25.** ∞

27. 0 **29.** 1 **31.** 0 **33.** 0 **35.** ∞

37. *a)* No indeterminada *b)* ∞ *c)*

39. *a)* $0 \cdot \infty$ *b)* 1 *c)*

41. *a)* No indeterminada *b)* 0 *c)*

43. *a)* ∞^0 *b)* 1 *c)*

45. *a)* 1^∞ *b)* e *c)*

47. *a)* 0^0 *b)* 3 *c)*

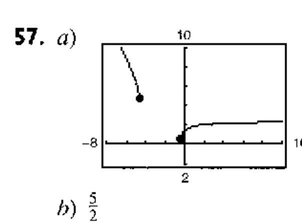
49. *a)* 0^0 *b)* 1 *c)*

51. *a)* $\infty - \infty$ *b)* $-\frac{3}{2}$ *c)*

53. *a)* $\infty - \infty$ *b)* ∞ *c)*

55. *a)* *b)* $\frac{1}{2}$

57. *a)*



b) $\frac{5}{2}$

59. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty - \infty$

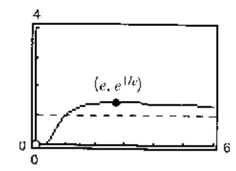
61. Hay varias respuestas posibles. Ejemplos:
a) $f(x) = x^2 - 25, g(x) = x - 5$
b) $f(x) = (x - 5)^2, g(x) = x^2 - 25$
c) $f(x) = x^2 - 25, g(x) = (x - 5)^3$

63.

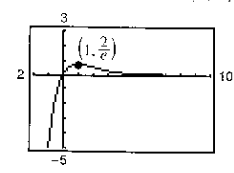
x	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\dfrac{(\ln x)^4}{x}$	2.811	4.498	0.720	0.036	0.001	0.000

65. 0 **67.** 0 **69.** 0

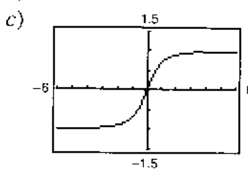
71. Asíntota horizontal: $y = 1$
Máximo relativo: $(e, e^{1/e})$



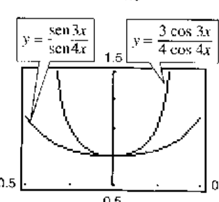
73. Asíntota horizontal: $y = 0$
Máximo relativo: $(1, 2/e)$



75. El límite no tiene la forma 0/0 o ∞/∞.
77. El límite no tiene la forma 0/0 o ∞/∞.
79. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital se obtiene el límite original, de manera que la regla de L'Hôpital no funciona.
b) 1
c)

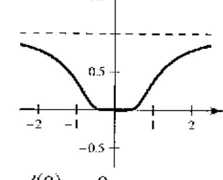


81.



Cuando $x \to 0$, las gráficas se acercan.

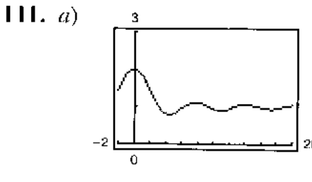
83. $v = 32t + v_0$ **85.** Demostración **87.** $c = \frac{2}{3}$ **89.** $c = \pi/4$
91. Falso: La regla de L'Hôpital no es aplicable, porque $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x + 1) \neq 0$. **93.** Verdadero
95. $\frac{3}{4}$ **97.** $\frac{4}{3}$ **99.** $a = 1, b = \pm 2$ **101.** Demostración
103.



$g'(0) = 0$

105. *a)* $0 \cdot \infty$ *b)* 0
107 a 109. Demostraciones

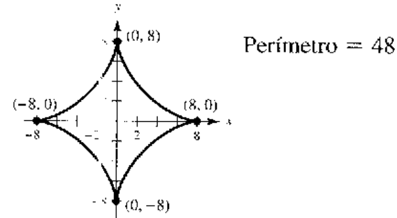
111. *a)*



b) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$
c) No

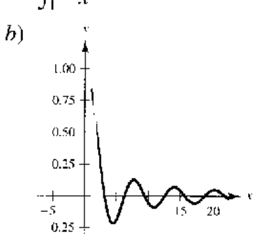
Sección 8.8 (página 585)

1. Impropia: $0 < \frac{2}{3} < 1$ **3.** No impropia; continua en $[0, 1]$
5. Discontinuidad infinita en $x = 0$; 4
7. Discontinuidad infinita en $x = 1$; diverge
9. Límite de integración infinito; 1
11. Discontinuidad infinita en $x = 0$; diverge
13. Límite de integración infinito; converge hacia 1 **15.** 1
17. Diverge **19.** Diverge **21.** 2 **23.** $\frac{1}{2}$
25. $1/[2(\ln 4)^2]$ **27.** π **29.** $\pi/4$ **31.** Diverge
33. Diverge **35.** 6 **37.** $-\frac{1}{4}$ **39.** Diverge **41.** $\pi/3$
43. $\ln(2 + \sqrt{3})$ **45.** 0 **47.** $2\pi\sqrt{6}/3$ **49.** $p > 1$
51. Demostración **53.** Diverge **55.** Converge
57. Converge **59.** Diverge **61.** Converge
63. Una integral con límites de integración infinitos, una integral con una discontinuidad infinita en o entre los límites de integración
65. La integral impropia es divergente. **67.** e **69.** π
71. *a)* 1 *b)* $\pi/2$ *c)* 2π
73.



Perímetro = 48

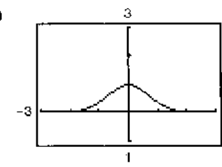
75. $8\pi^2$ **77.** *a)* $W = 20\,000$ millas-ton *b)* 4 000 millas
79. *a)* Demostración *b)* $P = 43.53\%$ *c)* $E(x) = 7$
81. *a)* \$757 992.41 *b)* \$837 995.15 *c)* \$1 066 666.67
83. $P = \left[2\pi NI\left(\sqrt{r^2 + c^2} - c\right)\right]/\left(kr\sqrt{r^2 + c^2}\right)$
85. Falso. Sea $f(x) = 1/(x + 1)$. **87.** Verdadero
89. *a)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ converge si $n > 1$ y diverge si $n \leq 1$.
b)



c) Converge

91. *a)* $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2$ *b)* Demostración
c) $\Gamma(n) = (n - 1)!$
93. $1/s,\ s > 0$ **95.** $2/s^3,\ s > 0$ **97.** $s/(s^2 + a^2),\ s > 0$
99. $s/(s^2 - a^2),\ s > |a|$
101. *a)* 0.4 / 50 / 90 / −0.2
b) ≈ 0.2525
c) 0.2525; igual por simetría
103. $c = 1$; $\ln(2)$
105. $8\pi[(\ln 2)^2/3 - (\ln 4)/9 + 2/27] \approx 2.01545$ **107.** 0.6278

109. *a)*



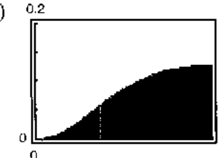
b) Demostración

Ejercicios de repaso del capítulo 8 (página 589)

1. $\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/2} + C$ **3.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$
5. $\ln(2) + \frac{1}{2} \approx 1.1931$ **7.** $16\,\text{arcsen}(x/4) + C$
9. $\frac{1}{13}e^{2x}(2\,\text{sen}\,3x - 3\cos 3x) + C$
11. $\frac{2}{15}(x - 5)^{3/2}(3x + 10) + C$
13. $-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$
15. $\frac{1}{16}\left[(8x^2 - 1)\,\text{arcsen}\,2x + 2x\sqrt{1 - 4x^2}\right] + C$
17. $\text{sen}(\pi x - 1)[\cos^2(\pi x - 1) + 2]/(3\pi) + C$
19. $\frac{2}{3}[\tan^3(x/2) + 3\tan(x/2)] + C$ **21.** $\tan\theta + \sec\theta + C$
23. $3\pi/16 + \frac{1}{2} \approx 1.0890$ **25.** $3\sqrt{4 - x^2}/x + C$
27. $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{1/2}(x^2 - 8) + C$ **29.** π
31. *a)*, *b)* y *c)* $\frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2}(x^2 - 8) + C$
33. $6\ln|x + 2| - 5\ln|x - 3| + C$
35. $\frac{1}{4}[6\ln|x - 1| - \ln(x^2 + 1) + 6\arctan x] + C$
37. $x + \frac{9}{8}\ln|x - 3| - \frac{25}{8}\ln|x + 5| + C$
39. $\frac{1}{9}\left[2/(2 + 3x) + \ln|2 + 3x|\right] + C$ **41.** $1 - \sqrt{2}/2$
43. $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 4x + 8| - \arctan[(x + 2)/2] + C$
45. $\ln|\tan\pi x|/\pi + C$ **47.** Demostración
49. $\frac{1}{8}(\text{sen}\,2\theta - 2\theta\cos 2\theta) + C$
51. $\frac{4}{3}[x^{3/4} - 3x^{1/4} + 3\arctan(x^{1/4})] + C$
53. $2\sqrt{1 - \cos x} + C$ **55.** $\text{sen}\,x\ln(\text{sen}\,x) - \text{sen}\,x + C$
57. $y = \frac{3}{2}\ln|(x - 3)/(x + 3)| + C$
59. $y = x\ln|x^2 + x| - 2x + \ln|x + 1| + C$ **61.** $\frac{1}{5}$
63. $\frac{1}{2}(\ln 4)^2 \approx 0.961$ **65.** π **67.** $\frac{128}{15}$
69. $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4/(3\pi))$ **71.** 3.82 **73.** 0 **75.** ∞ **77.** 1
79. $1\,000e^{0.09} \approx 1\,094.17$ **81.** Converge; $\frac{32}{3}$ **83.** Diverge
85. Converge; 1 **87.** *a)* \$6 321 205.59 *b)* \$10 000 000
89. *a)* 0.4581 *b)* 0.0135

SP Solución de problemas (página 591)

1. *a)* $\frac{4}{3}, \frac{16}{15}$ *b)* Demostración **3.** $\ln 3$
5. 2
7. *a)*



Área ≈ 0.2986

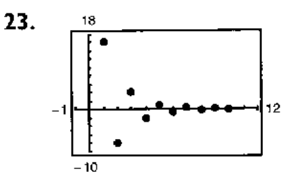
b) $\ln 3 - \frac{4}{5}$
c) $\ln 3 - \frac{4}{5}$

9. $\ln 3 - \frac{1}{2} \approx 0.5986$ **11.** Demostración **13.** ≈ 0.8670
15. *a)* ∞ *b)* 0 *c)* $-\frac{2}{3}$
17. $\dfrac{1/12}{x} + \dfrac{1/42}{x - 3} + \dfrac{1/10}{x - 1} + \dfrac{111/140}{x + 4}$
19. Demostración **21.** ≈ 0.0158

Capítulo 9

Sección 9.1 (página 602)

1. 2, 4, 8, 16, 32 **3.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$ **5.** 1, 0, −1, 0, 1
7. $-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ **9.** $5, \frac{19}{4}, \frac{43}{9}, \frac{77}{16}, \frac{121}{25}$
11. 3, 4, 6, 10, 18 **13.** 32, 16, 8, 4, 2
15. f **16.** a **17.** e **18.** b **19.** d **20.** c
21.

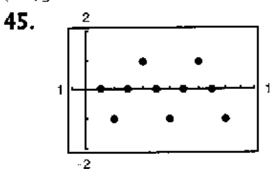


23.

25. 14, 17; sumar 3 al término precedente
27. 80, 160; multiplicar término precedente por 2.
29. $\frac{3}{16}, -\frac{3}{32}$; multiplicar término precedente por $-\frac{1}{2}$ **31.** $10 \cdot 9 = 90$
33. $n + 1$ **35.** $1/[(2n + 1)(2n)]$ **37.** 5 **39.** 2 **41.** 0
43.

Converge a 1

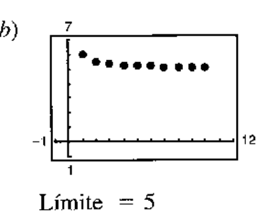
45.



Diverge

47. Diverge **49.** Converge a $\frac{3}{2}$ **51.** Converge a 0
53. Converge a 0 **55.** Converge a 0 **57.** Converge a 0
59. Diverge **61.** Converge a 0 **63.** Converge a 0
65. Converge a e^k **67.** Converge a 0
69. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas: $3n - 2$
71. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas: $n^2 - 2$
73. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas: $(n + 1)/(n + 2)$
75. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas: $(n + 1)/n$
77. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas: $n/[(n + 1)(n + 2)]$
79. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas:
$$\frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)} = \frac{(-1)^{n-1}2^n n!}{(2n)!}$$
81. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo de respuestas: $(2n)!$
83. Monótona, acotada **85.** Monótona, acotada
87. No monótona, acotada **89.** Monótona, acotada
91. No monótona, acotada **93.** No monótona, acotada
95. *a)* $\left|5 + \frac{1}{n}\right| \leq 6 \Rightarrow$ acotada
$a_n > a_{n+1} \Rightarrow$ monótona
Así, $\{a_n\}$ converge.

b)

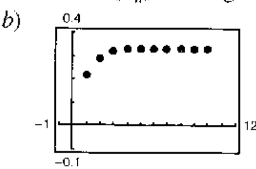


Límite = 5

97. *a)* $\left|\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right| < \frac{1}{3} \Rightarrow$ acotada

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ monótona

Así, $\{a_n\}$ converge.

b) 
Límite $= \frac{1}{3}$

99. $\{a_n\}$ tiene un límite porque es acotada y monótona; ya que $2 \le a_n \le 4$, $2 \le L \le 4$.

101. *a)* No; $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe.

b)

n	1	2	3	4	5
A_n	$9 041.25	$9 082.69	$9 124.32	$9 166.14	$9 208.15

n	6	7	8	9	10
A_n	$9 250.35	$9 292.75	$9 335.34	$9 378.13	$9 421.11

103. *a)* Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

b) Una sucesión converge si tiene un límite.

c) Una sucesión monótona es una sucesión que tiene términos no crecientes o no decrecientes.

d) Una sucesión acotada es una sucesión que tiene tanto cota superior como cota inferior.

105. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $a_n = 10n/(n + 1)$

107. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $a_n = (3n^2 - n)/(4n^2 + 1)$

109. *a)* $\$2\,500\,000\,000(0.8)^n$

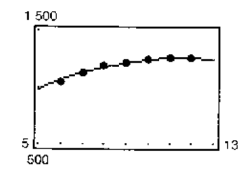
b)

Año	1	2
Presupuesto	$2 000 000 000	$1 600 000 000

Año	3	4
Presupuesto	$1 280 000 000	$1 024 000 000

c) Converge a 0

111. *a)* $a_n = -6.60n^2 + 151.7n + 387$ *b)* 979 especies



113. *a)* $a_9 = a_{10} = 1\,562\,500/567$ *b)* Decreciente

c) Los factoriales se incrementan más rápidamente que las exponenciales.

115. 1, 1.4142, 1.4422, 1.4142, 1.3797, 1.3480; Converge a 1

117. Verdadero **119.** Verdadero

121. *a)* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) 1, 2, 1.5, 1.6667, 1.6, 1.6250, 1.6154, 1.6190, 1.6176, 1.6182

c) Demostración *d)* $\rho = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180$

123. *a)* 1.4142, 1.8478, 1.9616, 1.9904, 1.9976

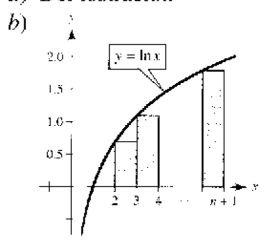
b) $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ *c)* $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

125. *a)* Demostración *b)* Demostración

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = (1 + \sqrt{1 + 4k})/2$

127. *a)* Demostración *b)* Demostración

129. *a)* Demostración

b) 

c) Demostración

d) Demostración

e) $\frac{\sqrt[20]{20!}}{20} \approx 0.4152$; $\frac{\sqrt[50]{50!}}{50} \approx 0.3897$; $\frac{\sqrt[100]{100!}}{100} \approx 0.3799$

131 a 133. Demostraciones **135.** Problema Putnam A1, 1990

Sección 9.2 (página 612)

1. 1, 1.25, 1.361, 1.424, 1.464

3. 3, −1.5, 5.25, −4.875, 10.3125

5. 3, 4.5, 5.25, 5.625, 5.8125 **7.** Serie geométrica: $r = \frac{3}{2} > 1$

9. Serie geométrica: $r = 1.055 > 1$ **11.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$

13. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ **15.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$ **17.** c; 3

18. b; 3 **19.** a; 3 **20.** d; 3 **21.** f; $\frac{34}{9}$ **22.** e; $\frac{2}{3}$

23. Serie telescópica: $a_n = 1/n - 1/(n + 1)$; Converge a 1.

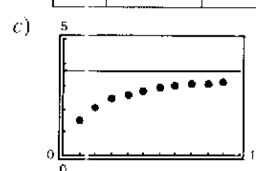
25. Serie geométrica: $r = \frac{3}{4} < 1$

27. Serie geométrica: $r = 0.9 < 1$

29. *a)* $\frac{11}{3}$

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	2.7976	3.1643	3.3936	3.5513	3.6078

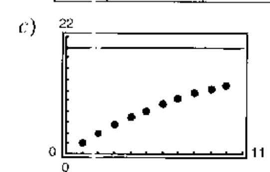
c) 

d) Los términos de la serie decrecen en magnitud, de manera relativamente lenta y la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie de manera relativamente lenta.

31. *a)* 20

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	8.1902	13.0264	17.5685	19.8969	19.9995

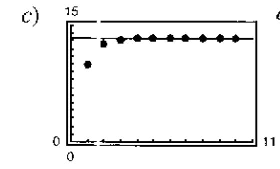
c) 

d) Los términos de la serie decrecen en magnitud de manera relativamente lenta y la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie de manera relativamente lenta.

33. *a)* $\frac{40}{3}$

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	13.3203	13.3333	13.3333	13.3333	13.3333

c) 

d) Los términos de la serie decrecen en magnitud de manera relativamente lenta, y la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie de manera relativamente rápida.

35. $\frac{3}{4}$ **37.** 4 **39.** 2 **41.** $\frac{2}{3}$ **43.** $\frac{10}{9}$ **45.** $\frac{9}{4}$ **47.** $\frac{1}{2}$

49. $\dfrac{\text{sen}(1)}{1-\text{sen}(1)}$ **51.** *a*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{10}(0.1)^n$ *b*) $\dfrac{4}{9}$

53. *a*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{81}{100}(0.01)^n$ *b*) $\dfrac{9}{11}$

55. *a*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{40}(0.01)^n$ *b*) $\dfrac{5}{66}$ **57.** Diverge **59.** Converge

61. Diverge **63.** Converge **65.** Diverge **67.** Diverge

69. Diverge **71.** Diverge **73.** Ver definición en la página 606.

75. Las serie dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, a \neq 0$$

es una serie geométrica con razón r. Cuando $0 < |r| < 1$, la serie converge a la suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

77. $\{a_n\}$ converge a 1 y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Esto concuerda con el teorema 9.9 el cual establece que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

79. $-2 < x < 2; x/(2-x)$ **81.** $0 < x < 2; (x-1)/(2-x)$

83. $-1 < x < 1; 1/(1+x)$

85. x: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty); x/(x-1)$

87. *a*) Sí, hay varias respuestas posibles. *b*) Sí, hay varias respuestas posibles.

89. *a*) x *b*) $f(x) = 1/(1-x)$, $|x| < 1$

c)

91. Asíntota horizontal: $y = 6$
La asíntota horizontal es la suma de la serie.

93. Los términos requeridos para las dos serie son $n = 100$ y $n = 5$, respectivamente. La segunda serie converge a un ritmo o velocidad más alto.

95. $80\,000(1 - 0.9^n)$ unidades

97. $400(1 - 0.75^n)$ millones de dólares; suma = \$400 millones

99. 152.42 pies **101.** $\frac{1}{8}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$

103. *a*) $-1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -1 + \frac{a}{1-r} = -1 + \frac{1}{1-1/2} = 1$
b) No *c*) 2

105. *a*) 126 pulg^2 *b*) 128 pulg^2

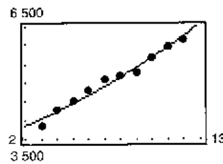
107. \$573 496.06; el \$1 000 000 de la lotería tiene un valor presente de \$573 496.06. Después de aumentar el interés sobre el periodo de 20 años, logra su valor completo.

109. *a*) \$5 368 709.11 *b*) \$10 737 418.23 *c*) \$21 474 836.47

111. *a*) \$16 415.10 *b*) \$16 421.83

113. *a*) \$118 196.13 *b*) \$118 393.43

115. *a*) $a_n = 3484.1363e^{0.0490n}$ *b*) \$50 809 millones *c*) \$50 815 millones



117. Falso. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, pero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

119. Falso. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \left(\frac{a}{1-r}\right) - a$
La fórmula requiere que la serie geométrica empiece con $n = 0$.

121. Verdadero **123.** Demostración

125. Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)$

127 a 131. Demostraciones

133. H = vida media de la droga
n = número de dosis iguales
P = número de unidades de la droga
t = intervalos de tiempo iguales
La cantidad total de la droga en el sistema del paciente en el momento que se da la última dosis es
$T_n = P + Pe^{kt} + Pe^{2kt} + \cdots + Pe^{(n-1)kt}$
donde $k = -(\ln 2)/H$. Un intervalo de tiempo después de que la última dosis se da es
$T_{n+1} = Pe^{kt} + Pe^{2kt} + Pe^{3kt} + \cdots + Pe^{nkt}$
y así sucesivamente. Porque $k < 0$, $T_{n+s} \to 0$ como $s \to \infty$.

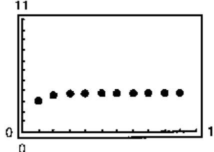
135. Problema Putnam A1, 1966

Sección 9.3 (página 620)

1. Diverge **3.** Converge **5.** Converge **7.** Diverge
9. Diverge **11.** Diverge **13.** Converge **15.** Converge
17. Diverge **19.** Diverge
21. $f(x)$ no es positiva para $x \geq 1$.
23. $f(x)$ no siempre es decreciente. **25.** Converge **27.** Diverge
29. Diverge **31.** Diverge **33.** Converge **35.** Converge
37. c; diverge **38.** f; diverge **39.** b; converge
40. a; diverge **41.** d; converge **42.** e; converge

43. *a*)

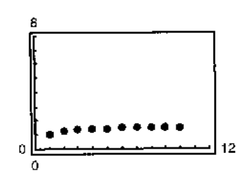
n	5	10	20	50	100
S_n	3.7488	3.75	3.75	3.75	3.75



Las sumas parciales tienden a la suma 3.75 muy rápidamente.

b)

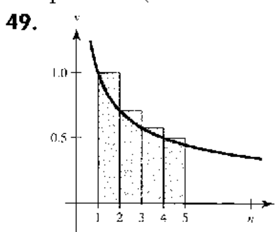
n	5	10	20	50	100
S_n	1.4636	1.5498	1.5962	1.6251	1.635



Las sumas parciales tienden a la suma $\pi^2/6 \approx 1.6449$ más lentamente que la serie en el apartado *a*).

45. Ver el teorema 9.10 en la página 617. Hay varias respuestas posibles. Por ejemplo, convergencia o divergencia pueden determinarse para la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

47. No. Porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=10\,000}^{\infty} \frac{1}{n}$ también diverge. La convergencia o divergencia de una serie no está determinada por los primeros (en número finito) términos de la serie.

49. 
La serie diverge porque el área bajo los rectángulos es mayor que el área inifinita bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geq 1$.

51. $p > 1$ **53.** $p > 1$ **55.** Diverge

57. Converge **59.** Demostración

61. $S_6 \approx 1.0811$ $R_6 \approx 0.0015$ **63.** $S_{10} \approx 0.9818$ $R_{10} \approx 0.0997$ **65.** $S_4 \approx 0.4049$ $R_4 \approx 5.6 \times 10^{-8}$

67. $N \geq 7$ **69.** $N \geq 2$ **71.** $N \geq 1\,000$

73. *a)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ converge por el criterio de la serie p ya que $1.1 > 1$.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge por el criterio de la integral ya que $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ diverge.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}} = 0.4665 + 0.2987 + 0.2176 + 0.1703 + 0.1393 + \cdots$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0.7213 + 0.3034 + 0.1803 + 0.1243 + 0.0930 + \cdots$

c) $n \geq 3.431 \times 10^{15}$

75. *a)* Sea $f(x) = 1/x$. f positiva, continua y decreciente en $[1, \infty)$.

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \ln n$$

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n + 1)$$

Así, $\ln(n + 1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.

b) $\ln(n + 1) - \ln n \leq S_n - \ln n \leq 1$.

También, $\ln(n + 1) - \ln n > 0$ para $n \geq 1$. Por lo tanto, $0 \leq S_n - \ln n \leq 1$ y la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

c) $a_n - a_{n+1} = [S_n - \ln n] - [S_{n+1} - \ln(n + 1)]$
$$= \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{n + 1} \geq 0$$

Por lo tanto, $a_n \geq a_{n+1}$.

d) Porque la sucesión es acotada y monótona, converge a un límite, γ.

e) 0.5822

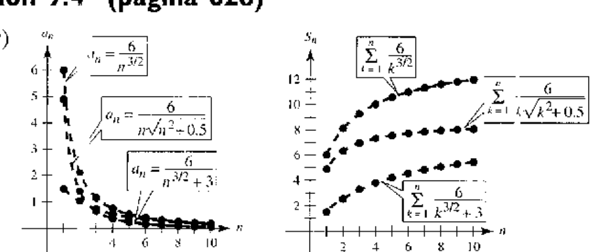
77. *a)* Diverge *b)* Diverge

c) $\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}$ converge para $x < 1/e$.

79. Diverge **81.** Converge **83.** Converge **85.** Diverge

87. Diverge **89.** Converge

Sección 9.4 (página 628)

1. *a)* 

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}}$; converge

c) Las magnitudes de los términos son menores que las magnitudes de los términos de la serie p. Por consiguiente, la serie converge.

d) A menores magnitudes de los términos, menores magnitudes de los términos de la sucesión de sumas parciales.

3. Converge **5.** Diverge **7.** Converge **9.** Diverge

11. Converge **13.** Converge **15.** Diverge **17.** Diverge

19. Converge **21.** Diverge **23.** Converge **25.** Diverge

27. Diverge **29.** Diverge; criterio de la serie p

31. Converge; criterio de la comparación directa con $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

33. Diverge, criterio del n-ésimo término

35. Converge; criterio de la integral

37. $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n \to \infty} na_n$

$\lim_{n \to \infty} na_n \neq 0$, pero es finito.

La serie diverge por el criterio de la comparación en el límite.

39. Diverge **41.** Converge

43. $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{n^3}{5n^4 + 3}\right) = \frac{1}{5} \neq 0$

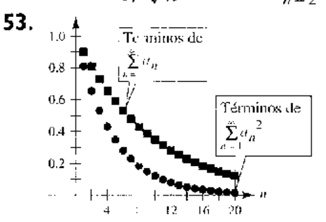
Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4 + 3}$ diverge.

45. Diverge **47.** Converge

49. La convergencia o divergencia depende de la forma del término general de la serie y no necesariamente de la magnitud de los términos.

51. Ver teorema 9.13 en la página 626. Hay varias respuestas posibles. Por ejemplo, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n - 1}}$ diverge porque

$\lim_{n \to \infty} \frac{1/\sqrt{n - 1}}{1/\sqrt{n}} = 1$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (serie p).

53. 

Porque $0 < a_n < 1$, $0 < a_n{}^2 < a_n < 1$.

55. Falso. Sea $a_n = 1/n^3$ y $b_n = 1/n^2$.

57. Verdadero **59.** Verdadero **61.** Demostración **63.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

65 a 69. Demostraciones **71.** Problema Putnam I, sesión de la tarde, 1953

Sección 9.5 (página 636)

1. d **2.** f **3.** a **4.** b **5.** e **6.** c

7. *a*)

n	1	2	3	4	5
S_n	1.0000	0.6667	0.8667	0.7238	0.8349

n	6	7	8	9	10
S_n	0.7440	0.8209	0.7543	0.8131	0.7605

b) 1.1 / 0 / 0.6 / 11

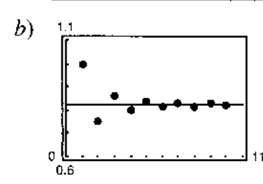
c) Los puntos están alternados a los lados de la recta horizontal $y = \pi/4$ que representa la suma de la serie. Las distancias entre puntos sucesivos y la recta decrecen.

d) La distancia en el apartado *c*) es siempre menor que la magnitud del siguiente término de la serie.

9. *a*)

n	1	2	3	4	5
S_n	1.0000	0.7500	0.8611	0.7986	0.8386

n	6	7	8	9	10
S_n	0.8108	0.8312	0.8156	0.8280	0.8180

b)


c) Los puntos están alternados a los lados de la recta horizontal $y = \pi^2/12$ que representa la suma de la serie. Las distancias entre puntos sucesivos y la recta decrecen.

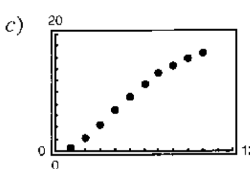
d) La distancia en el apartado *c*) es siempre menor que la magnitud del siguiente término de la serie.

11. Converge **13.** Converge **15.** Diverge **17.** Converge
19. Diverge **21.** Diverge **23.** Diverge **25.** Converge
27. Converge **29.** Converge **31.** Converge
33. $2.3713 \leq S \leq 2.4937$ **35.** $0.7305 \leq S \leq 0.7361$
37. *a*) 7 términos (note que la suma empieza con $N = 0$)
b) 0.368
39. *a*) 3 términos (note que la suma empieza con $N = 0$)
b) 0.842
41. *a*) 1 000 términos *b*) 0.693 **43.** 10 **45.** 7
47. Converge absolutamente **49.** Converge condicionalmente
51. Diverge **53.** Converge condicionalmente
55. Converge absolutamente **57.** Converge absolutamente
59. Converge condicionalmente **61.** Converge absolutamente
63. Una serie alternada es una serie cuyos términos alternan en el signo. Ver teorema 9.14 en la página 631 para el criterio de la serie alternada.
65. Una serie $\Sigma\, a_n$ es completamente convergente si $\Sigma\, |a_n|$ converge. Una serie $\Sigma\, a_n$ es condicionalmente convergente si $\Sigma\, a_n$ converge y $\Sigma\, |a_n|$ diverge.
67. Falso. Sea $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. **69.** Verdadero **71.** $p > 0$
73. *a*) Demostración
b) El inverso es falso. Por ejemplo: Sea $a_n = 1/n$.
75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por lo tanto también $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
77. *a*) No; $a_{n+1} \leq a_n$ no se satisface para toda n. Por ejemplo, $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$. *b*) Sí; 0.5
79. Converge; criterio de la serie p
81. Diverge; criterio del n-ésimo término
83. Converge; criterio de la serie geométrica
85. Converge; criterio de la integral
87. Converge; criterio de la serie alternada
89. El primer término de la serie es 0, no 1. No se pueden reagrupar los términos de la serie arbitrariamente.
91. Problema Putnam 2, la sesión de la tarde, 1954

Sección 9.6 (página 645)

1 a 3. Demostraciones **5.** d **6.** c **7.** f **8.** b **9.** a **10.** e
11. *a*) Demostración
b)

n	5	10	15	20	25
S_n	9.2104	16.7598	18.8016	19.1878	19.2491

c)


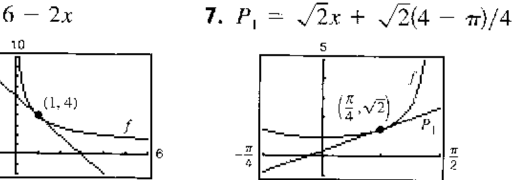
d) 19.26

e) Entre más rápidamente tienden a 0 los términos de la serie, más rápidamente tiende la sucesión de las sumas parciales a la suma de la serie.
13. Diverge **15.** Converge **17.** Converge **19.** Diverge
21. Converge **23.** Diverge **25.** Converge
27. Converge **29.** Diverge **31.** Converge
33 a 35. Demostraciones **37.** Converge **39.** Diverge
41. Converge **43.** Diverge **45.** Converge **47.** Converge
49. Converge **51.** Converge; criterio de la serie alternada
53. Converge; criterio de la serie p
55. Diverge; criterio del n-ésimo término
57. Diverge; criterio del cociente
59. Converge; criterio de comparación en el límite con $b_n = 1/2^n$
61. Converge; criterio de la comparación directa con $b_n = 1/2^n$
63. Converge; criterio del cociente
65. Converge; criterio del cociente
67. Converge; criterio del cociente **69.** a y c **71.** a y b
73. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+1}}$ **75.** *a*) 9 *b*) -0.7769
77. Diverge; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ **79.** Converge; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
81. Diverge; $\lim a_n \neq 0$ **83.** Converge **85.** Converge
87. $(-3, 3)$ **89.** $(-2, 0]$ **91.** $x = 0$
93. Ver teorema 9.17 en la página 639.
95. No; la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 10\,000}$ diverge.
97. Absolutamente; por definición **99 a 103.** Demostraciones
105. Problema Putnam 3, la sesión matutina, 1942

Sección 9.7 (página 656)

1. d **2.** c **3.** a **4.** b

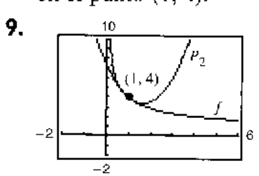
5. $P_1 = 6 - 2x$ **7.** $P_1 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}(4 - \pi)/4$



P_1 es la recta tangente a la curva $f(x) = 4/\sqrt{x}$ en el punto $(1, 4)$.

P_1 es la recta tangente a la curva $f(x) = \sec x$ en el punto $(\pi/4, \sqrt{2})$.

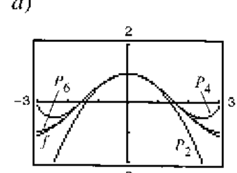
9.



x	0	0.8	0.9	1	1.1
$f(x)$	Error	4.4721	4.2164	4.0000	3.8139
$P_2(x)$	7.5000	4.4600	4.2150	4.0000	3.8150

x	1.2	2
$f(x)$	3.6515	2.8284
$P_2(x)$	3.6600	3.5000

11. *a)*



b) $f^{(2)}(0) = -1$ $P_2^{(2)}(0) = -1$
$f^{(4)}(0) = 1$ $P_4^{(4)}(0) = 1$
$f^{(6)}(0) = -1$ $P_6^{(6)}(0) = -1$

c) $f^{(n)}(0) = P_n^{(n)}(0)$

13. $1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ **15.** $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

17. $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ **19.** $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$

21. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ **23.** $1 + \frac{1}{2}x^2$

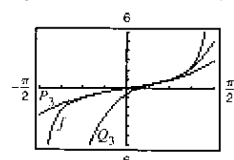
25. $1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + (x - 1)^4$

27. $1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(x - 1)^3 - \frac{5}{128}(x - 1)^4$

29. $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$

31. *a)* $P_3(x) = x + (1/3)x^3$

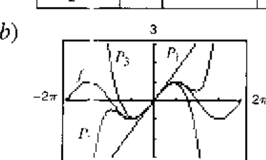
b) $Q_3(x) = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + \frac{8}{3}(x - \pi/4)^3$



33. *a)*

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
sen x	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$P_1(x)$	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$P_3(x)$	0	0.2474	0.4792	0.6797	0.8333
$P_5(x)$	0	0.2474	0.4794	0.6817	0.8417

b)



c) Como la distancia aumenta, la aproximación polinómica se vuelve menos exacta.

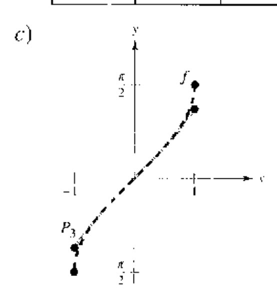
35. *a)* $P_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3$

b)

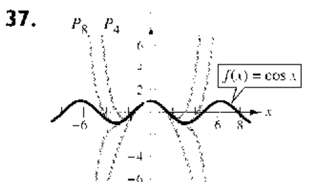
x	−0.75	−0.50	−0.25	0	0.25
$f(x)$	−0.848	−0.524	−0.253	0	0.253
$P_3(x)$	−0.820	−0.521	−0.253	0	0.253

x	0.50	0.75
$f(x)$	0.524	0.848
$P_3(x)$	0.521	0.820

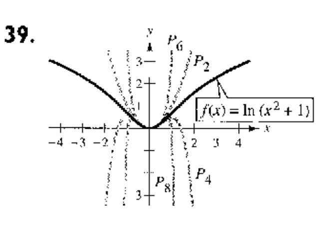
c)



37.



39.



41. 0.6042 **43.** 0.1823 **45.** $R_4 \le 2.03 \times 10^{-5}$; 0.000001

47. $R_3 \le 7.82 \times 10^{-3}$ **49.** 3 **51.** 5

53. $n = 9$; $\ln(1.5) \approx 0.4055$ **55.** $n = 16$; $e^{-\pi(1.3)} \approx 0.16838$

57. $-0.3936 < x < 0$ **59.** $-0.9467 < x < 0.9467$

61. La gráfica de la aproximación polinómica P y la función de P elemental f pasan por el punto $(c, f(c))$, y la pendiente es igual que la pendiente de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$. Si P es de grado n, entonces las n primeras derivadas de f y P coinciden en c. Esto permite a la gráfica de P se parezca a la gráfica de f cerca del punto $(c, f(c))$.

63. Ver las definiciones del n-ésimo polinomio de Taylor y del n-ésimo polinomio de McLaurin en la página 650.

65. A medida que el grado de los polinomios aumenta, la gráfica del polinomio de Taylor se vuelve una mejor aproximación de la función dentro del intervalo de convergencia. Por consiguiente, la exactitud se incrementa.

67. *a)* $f(x) \approx P_4(x) = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + (1/24)x^4$
$g(x) \approx Q_5(x) = x + x^2 + (1/2)x^3 + (1/6)x^4 + (1/24)x^5$
$Q_5(x) = xP_4(x)$
b) $g(x) \approx P_6(x) = x^2 - x^4/3! + x^6/5!$
c) $g(x) \approx P_4(x) = 1 - x^2/3! + x^4/5!$

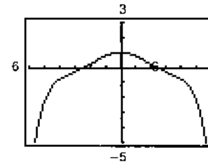
69. *a)* $Q_2(x) = -1 + (\pi^2/32)(x + 2)^2$
b) $R_2(x) = -1 + (\pi^2/32)(x - 6)^2$
c) No. Las traslaciones horizontales del resultado en el apartado *a)* sólo son posibles en $x = -2 + 8n$ ((donde n es un entero) porque el periodo de f es 8.

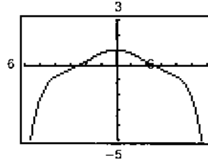
71. Demostración

73. Cuando nos alejamos de $x = c$, el polinomio de Taylor se vuelve menos exacto.

Sección 9.8 (página 666)

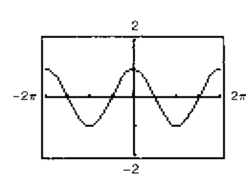
1. 0 **3.** 2 **5.** $R = 1$ **7.** $R = \frac{1}{2}$ **9.** $R = \infty$
11. $(-2, 2)$ **13.** $(-1, 1]$ **15.** $(-\infty, \infty)$ **17.** $x = 0$
19. $(-4, 4)$ **21.** $(0, 10]$ **23.** $(0, 2]$ **25.** $(0, 6)$
27. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **29.** $(-\infty, \infty)$ **31.** $(-1, 1)$ **33.** $x = 3$
35. $R = c$ **37.** $(-k, k)$ **39.** $(-1, 1)$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ **43.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
45. *a)* $(-2, 2)$ *b)* $(-2, 2)$ *c)* $(-2, 2)$ *d)* $[-2, 2)$
47. *a)* $(0, 2]$ *b)* $(0, 2)$ *c)* $(0, 2)$ *d)* $[0, 2]$
49. c; $S_1 = 1$, $S_2 = 1.33$ **50.** a; $S_1 = 1$, $S_2 = 1.67$
51. b; diverge **52.** d; alternada
53. b **54.** c **55.** d **56.** a
57. Una serie de la forma
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \cdots + a_n(x - c)^n + \cdots$$
se llama una serie de potencia centrada en c, donde c es una constante.
59. 1. Un solo punto 2. Un intervalo centrado en c
3. Toda la recta real
61. Hay varias respuestas posibles.
63. *a)* Para $f(x)$: $(-\infty, \infty)$; para $g(x)$: $(-\infty, \infty)$ *b)* Demostración
c) Demostración *d)* $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cos x$
65 a 69. Demostraciones
71. *a)* Demostración *b)* Demostración
c)



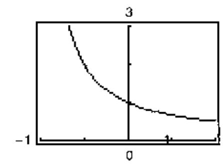


d) 0.92

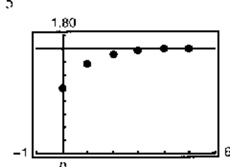
73. $f(x) = \cos x$



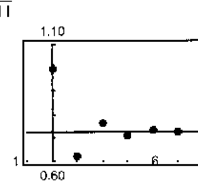
75. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$



77. *a)* $\frac{8}{5}$



b) $\frac{8}{11}$



c) La serie alternada converge más rápidamente. Las sumas parciales de la serie de términos positivos se aproxima a la suma por abajo. Las sumas parciales de la serie alternada se alternan a los lados de la recta horizontal que representa la suma.

d)

M	10	100	1 000	10 000
N	4	9	15	21

79. Falso. Sea $a_n = (-1)^n/(n2^n)$ **81.** Verdadero **83.** Demostración
85. *a)* $(-1, 1)$ *b)* $f(x) = (c_0 + c_1x + c_2x^2)/(1 - x^3)$
87. Demostración

Sección 9.9 (página 674)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(-3)^{n+1}}$ **7.** $-3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
$(2, 8)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

9. $-\frac{1}{11} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{11}(x + 3)\right]^n$ **11.** $\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n$
$\left(-\frac{17}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $(-2, 2)$

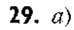
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]x^n$ **15.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n[1 + (-1)^n] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
$(-1, 1)$ $(-1, 1)$

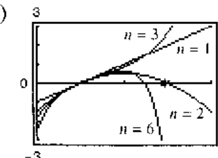
17. $2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1}$ **21.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$
$(-1, 1)$ $(-1, 1)$ $(-1, 1]$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ **25.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^{2n}$
$(-1, 1)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

27.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
S_2	0.000	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500
$\ln(x + 1)$	0.000	0.182	0.336	0.470	0.588	0.693
S_3	0.000	0.183	0.341	0.492	0.651	0.833

29. *a)* 



b) $R = 1$
c) -0.6931
d) $\ln(0.5)$

31. c **32.** d **33.** a **34.** b **35.** 0.245 **37.** 0.125

39. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $-1 < x < 1$ **41.** $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$, $-1 < x < 1$

43. $E(n) = 2$. Porque la probabilidad de obtener una cara en un solo lanzamiento es $\frac{1}{2}$, se espera que, en promedio, se obtenga una cara en cada dos lanzamientos.

45. Como $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$, se sustituye $(-x)$ en la serie geométrica.

47. Como $\frac{5}{1+x} = 5\left(\frac{1}{1-(-x)}\right)$, se sustituye $(-x)$ en la serie geométrica y después se multiplica la serie por 5.

49. Demostración **51.** *a)* Demostración *b)* 3.14

53. $\ln \frac{3}{2} \approx 0.4055$; ver ejercicio 21.

55. $\ln \frac{7}{5} \approx 0.3365$; ver ejercicio 53.

57. $\arctan \frac{1}{2} \approx 0.4636$; ver ejercicio 56.

59. $f(x) = \arctan x$ es una función impar (simétrica respecto al origen).

61. La serie en el ejercicio 56 converge a su suma a un ritmo más lento porque sus términos tienden a cero a un ritmo mucho más lento.

63. La serie converge en el intervalo $(-5, 3)$ y quizás también en uno o en ambos puntos terminales.

65. $\sqrt{3}\pi/6$

Sección 9.10 (página 685)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ **7.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

9. $1 + x^2/2! + 5x^4/4! + \cdots$ **11 a 13.** Demostraciones

15. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$

17. $\frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)x^{2n}}{2^{3n} n!}\right]$

19. $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)x^{2n}}{2^n n!}$

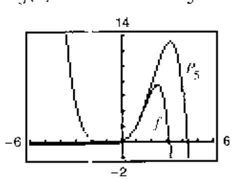
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ **23.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{(2n)!}$ **27.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

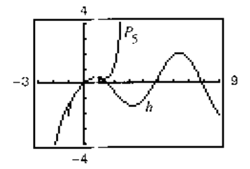
29. $\frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$ **31.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}$

33. $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ **35.** Demostración

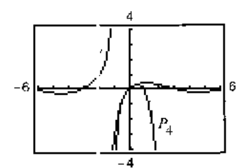
37. $P_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$



39. $P_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$



41. $P_4(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + \cdots$



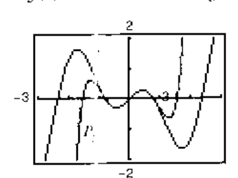
43. c; $f(x) = x \operatorname{sen} x$ **44.** d; $f(x) = x \cos x$ **45.** a; $f(x) = xe^x$

46. b; $f(x) = x^2\left(\frac{1}{1+x}\right)$ **47.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!}$

49. 0.6931 **51.** 7.3891 **53.** 0 **55.** 0.9461

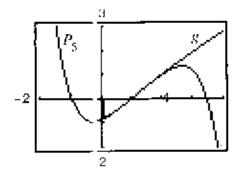
57. 0.2010 **59.** 0.7040 **61.** 0.3413

63. $P_5(x) = x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5$



$\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$

65. $P_5(x) = (x-1) - \frac{1}{24}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{71}{1920}(x-1)^5$



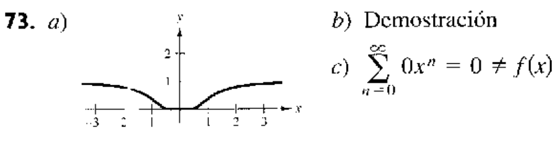
$\left[\frac{1}{4}, 2\right]$

67. Vea las "Estrategias para encontrar una serie de Taylor" en la página 680.

69. *a)* Reemplácese su x por $-x$ en la serie para e^x.
b) Reemplácese su x por $3x$ en la serie para e^x.
c) Multiplíquese la serie para e^x por x.
d) Reemplácese su x por $2x$ en la serie para e^x. Después reemplácese x por $-2x$ en la serie para e^x. Después súmense los dos.

71. Demostración

73. *a)*



b) Demostración
c) $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0 \neq f(x)$

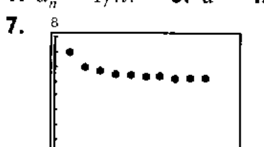
75. Demostración **77.** 10 **79.** -0.0390625

81. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$ **83.** Demostración

Ejercicios de revisión del capítulo 9 (página 688)

1. $a_n = 1/n!$ **3.** a **4.** c **5.** d **6.** b

7.



Converge a 5

9. Converge a 0 **11.** Diverge

13. Converge a 0 **15.** Converge a 0

17. *a*)

n	1	2	3	4
A_n	\$5 062.50	\$5 125.78	\$5 189.85	\$5 254.73

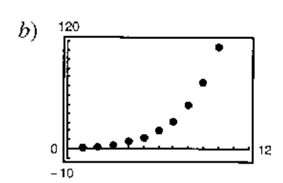
n	5	6	7	8
A_n	\$5 320.41	\$5 386.92	\$5 454.25	\$5 522.43

(*b*) \$8 218.10

19. *a*)

k	5	10	15	20	25
S_k	13.2	113.3	873.8	6 648.5	50 500.3

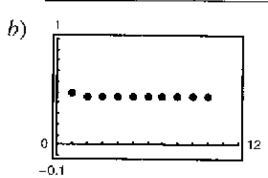
b)



21. *a*)

k	5	10	15	20	25
S_k	0.4597	0.4597	0.4597	0.4597	0.4597

b)



23. Converge **25.** Diverge **27.** 3 **29.** $\frac{1}{2}$

31. *a*) $\sum_{n=0}^{\infty}(0.09)(0.01)^n$ *b*) $\frac{1}{11}$ **33.** $45\frac{1}{3}$ m

35. \$5 087.14 **37.** Converge **39.** Diverge **41.** Converge

43. Diverge **45.** Converge **47.** Diverge **49.** Converge

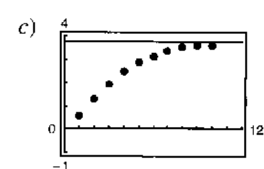
51. Diverge

53. *a*) Demostración

b)

n	5	10	15	20	25
S_n	2.8752	3.6366	3.7377	3.7488	3.7499

c)



d) 3.75

55. *a*)

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}$	1.4636	1.5498	1.5962	1.6122	1.6202
$\int_N^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$	0.2000	0.1000	0.0500	0.0333	0.0250

b)

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}$	1.0367	1.0369	1.0369	1.0369	1.0369
$\int_N^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

La serie en el aparatado *b*) converge más rápidamente. Esto es evidente en las integrales que dan los restos de las sumas parciales.

57. $P_3(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$ **59.** 0.996 **61.** 0.560

63. *a*) 4 *b*) 6 *c*) 5 *d*) 10

65. $(-10, 10)$ **67.** $[1, 3]$ **69.** Sólo converge en $x = 2$

71. Demostración **73.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ **75.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{9}(n+1)\left(\frac{x}{3}\right)^n$

77. $f(x) = \frac{3}{3-2x}, \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

79. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^n$

81. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 3)^n}{n!}$ **83.** $-\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$

85. $1 + x/5 - 2x^2/25 + 6x^3/125 - 21x^4/625 + \cdots$

87. $\ln\frac{5}{4} \approx 0.2231$ **89.** $e^{1/2} \approx 1.6487$ **91.** $\cos\frac{2}{3} \approx 0.7859$

93. La serie para el ejercicio 41 converge a su suma a un ritmo más bajo porque sus términos tienden 0 a un ritmo más bajo.

95. $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$ **97.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

99. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n+1)^2}$ **101.** 0

SP Solución de problemas (página 691)

1. *a*) 1 *b*) Hay varias respuestas posibles. Ejemplo: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$
c) 0

3. $\pi/8$

5. *a*) $R = 1$; suma $= (3x^2 + 2x + 1)/(1 - x^3)$

b) $R = 1$; suma $= \dfrac{a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1x + a_0}{1 - x^p}$

7. *a*) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!} = 2e \approx 5.4366$

9. Sea $a_1 = \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = 1.8519$

$$a_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -0.4338$$

$$a_3 = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = 0.2566$$

$$a_4 = \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -0.1826.$$

Se sigue que el área total es

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots.$$

También, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $0 < a_{n+1} \le a_n$. Por lo tanto, se sigue por el criterio de la serie alternada que $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

11. *a*) $a_1 = 3$, $a_2 \approx 1.7321$, $a_3 \approx 2.1753$, $a_4 \approx 2.2749$, $a_5 \approx 2.2967$, $a_6 \approx 2.3015$
Demostración; $L = \left(1 + \sqrt{13}\right)/2$
b) Demostración; $L = \left(1 + \sqrt{1 + 4a}\right)/2$

13. *a*) $1, \frac{9}{8}, \frac{11}{8}, \frac{45}{32}, \frac{47}{32}$ *b*) Demostración *c*) Demostración

15. $S_6 = 240$; $S_7 = 440$; $S_8 = 810$; $S_9 = 1\,490$; $S_{10} = 2\,740$

17. *a*) Diverge *b*) Converge

Índice de aplicaciones

Ciencias de la vida

Ciencias sociales y del comportamiento

Economía y comercio

General

Ingeniería y Física

Índice analítico

ÍNDICE

F

ÍNDICE

M

N

O

S

DERIVADAS E INTEGRALES

Reglas básicas de derivación

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$
12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$
23. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
24. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
25. $\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} u] = (\cosh u)u'$
26. $\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\operatorname{senh} u)u'$
27. $\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u'$
28. $\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$
29. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u'$
30. $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u'$
31. $\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$
32. $\frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
33. $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$
34. $\frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$
35. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}}$
36. $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$

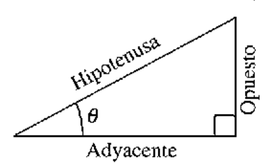
Fórmulas básicas de integración

1. $\int kf(u)\, du = k\int f(u)\, du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\, du = \int f(u)\, du \pm \int g(u)\, du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int a^u\, du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
5. $\int e^u\, du = e^u + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$
9. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
10. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
11. $\int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
12. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
13. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$
14. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$
15. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

TRIGONOMETRÍA

Definición de las seis funciones trigonométricas

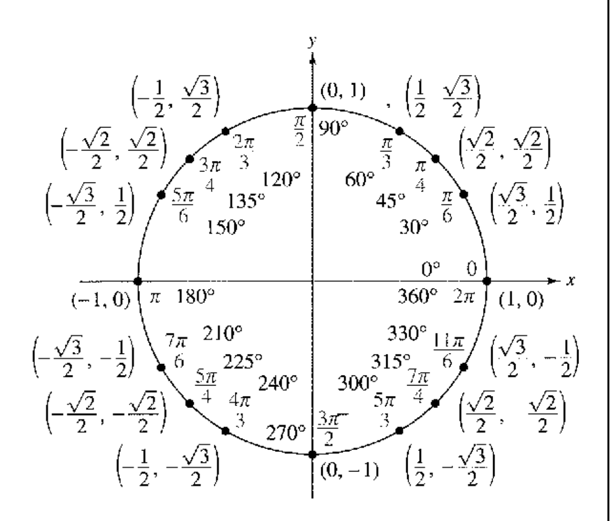
Definiciones por triángulos rectángulos, donde $0 < \theta < \pi/2$.



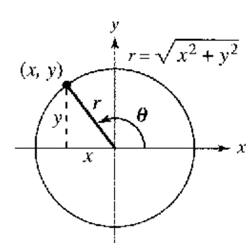
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$



Definiciones como funciones, donde θ es cualquier ángulo.



$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Identidades recíprocas

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\csc x}$ $\quad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad \tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ $\quad \cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ $\quad \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades de tangente y cotangente

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Identidades de cofunciones

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

$\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ $\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$ $\quad \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

Fórmulas de reducción

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$

$\csc(-x) = -\csc x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$

$\sec(-x) = \sec x$ $\quad \cot(-x) = -\cot x$

Fórmulas de suma y diferencia

$\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v$

$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\tan(u \pm v) = \dfrac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$

Fórmulas del ángulo doble

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$

$\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

Fórmulas de reducción de potencias

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$

$\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

$\tan^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

Fórmulas de suma-producto

$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$

$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$

$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$

$\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$

Fórmulas de producto-suma

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \dfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$

$\cos u \cos v = \dfrac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$

$\operatorname{sen} u \cos v = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$

$\cos u \operatorname{sen} v = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$

ÁLGEBRA

Factores y ceros de polinomios

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si $p(a) = 0$, entonces a es un cero del polinomio y una solución de la ecuación $p(x) = 0$. Además $(x - a)$ es un *factor* del polinomio.

Teorema fundamental de álgebra

Un polinomio de grado de n tiene n ceros (no necesariamente distinto) Aunque todos estos ceros pueden ser imaginarios, un polinomio real de grado impar debe tener un cero real por lo menos.

Fórmula cuadrática

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, y $0 \leq b^2 - 4ac$, entonces los 0 reales de p son $x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a$.

Factores especiales

$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$

Teorema del binomio

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x - y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \cdots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

Teorema de los ceros racionales

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todos *los ceros racionales* de p son de la forma $x = r/s$, donde r es un factor de a_0 y s es un factor de a_n.

Factorización por agrupamiento

$$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx + d) + b(cx + d) = (ax^2 + b)(cx + d)$$

Operaciones aritméticas

$ab + ac = a(b + c)$

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

$\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

$\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{d}{c}\right) = \dfrac{ad}{bc}$

$\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c} = \dfrac{a}{bc}$

$\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} = \dfrac{ac}{b}$

$a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{ab}{c}$

$\dfrac{a - b}{c - d} = \dfrac{b - a}{d - c}$

$\dfrac{ab + ac}{a} = b + c$

Exponentes y radicales

$a^0 = 1, \quad a \neq 0$

$(ab)^x = a^x b^x$

$a^x a^y = a^{x+y}$

$\sqrt{a} = a^{1/2}$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

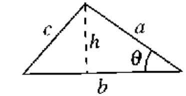
Triángulo

$h = a \operatorname{sen} \theta$

$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$

(Ley de los cosenos)

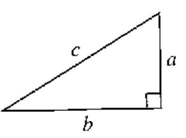
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$



Triángulo rectángulo

(Teorema de Pitágoras)

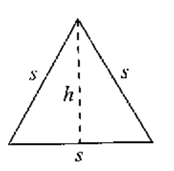
$c^2 = a^2 + b^2$



Triángulo equilátero

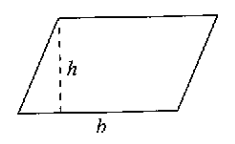
$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$

$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$



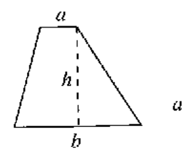
Paralelogramo

$\text{Área} = bh$



Trapecio

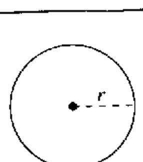
$\text{Área} = \frac{h}{2}(a + b)$



Círculo

$\text{Área} = \pi r^2$

$\text{Circunferencia} = 2\pi r$



Sector circular

(θ en radianes)

$\text{Área} = \frac{\theta r^2}{2}$

$s = r\theta$

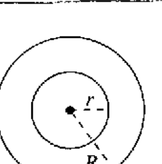
Anillo circular

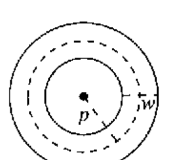
(p = radio medio,

w = anchura del anillo)

$\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi pw$





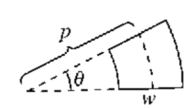
Sector de un anillo circular

(p = radio medio,

w = anchura del anillo,

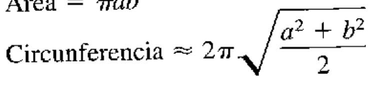
θ en radianes)

$\text{Área} = \theta pw$

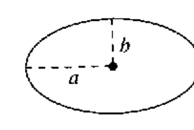


Elipse

$\text{Área} = \pi ab$



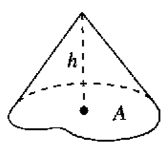
$\text{Circunferencia} \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$



Cono

(A = área de la base)

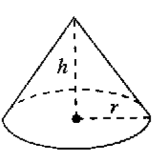
$\text{Volumen} = \frac{Ah}{3}$



Cono circular recto

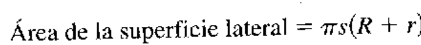
$\text{Volumen} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$\text{Área de la superficie lateral} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

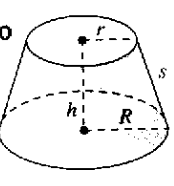


Tronco de un cono circular recto

$\text{Volumen} = \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$



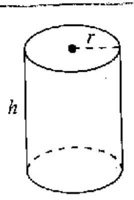
$\text{Área de la superficie lateral} = \pi s(R + r)$



Cilindro circular recto

$\text{Volumen} = \pi r^2 h$

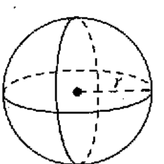
$\text{Área de la superficie lateral} = 2\pi rh$



Esfera

$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\text{Área de la superficie} = 4\pi r^2$



Cuña

(A = área de la cara superior

B = el área de la base)

$A = B \sec \theta$